数理解析研究所講究録
第 588 巻 1986 年 162-174

Kripkeモデルの基底としての $\mathbb{R}$ と $\mathbb{Q}$

新潟大教育　高野道夫　(Mitio Takano)

小論の目的は下に述べる定理を示すことである．ただし，LJは直観主義論理を表し，P_2, D, K°, C はそれぞれ次の公理型のことである（P_2, D, K° の名称は Umezawa [4] によった．）．

P_2 ...... $(A \supset B) \vee (B \supset A)$

D ...... $\forall x(A(x) \vee B) \supset \forall x A(x) \vee B$

K° ...... $\neg\neg\forall x(A(x) \vee \neg A(x))$

C ...... $(\forall y B(y) \supset \exists x A(x))$
$\qquad\supset \exists x(C \supset A(x)) \vee \exists y(B(y) \supset C)$

定理. 1°) 論理式が $\mathbb{Q}$ を基底とする定領域の Kripke モデルでつねに真であるためには，それが論理 LJ + P_2 + D で証明可能なことが，必要十分である．

2°) $\mathbb{R}$ を基底とする定領域の Kripke モデルでつねに真

であるためには，$LJ+D+C$ で証明可能なことが，必要十分である．

3°) $[0,1]\cap\mathbb{Q}$ を基底とする定領域の Kripke モデルでつねに真であるためには，$LJ+P_2+D+K^{\circ}$ で証明可能なことが，必要十分である．

4°) $[0,1]$ を基底とする定領域の Kripke モデルでつねに真であるためには，$LJ+D+K^{\circ}+C$ で証明可能なことが，必要十分である．

注意． 1°) P_2 は $LJ+C$ で証明可能である．

2°) C' を，C を特殊化した次の公理型とする：

$$C' \cdots\cdots (\forall y B(y) \supset \exists x A(x)) \supset \exists x(\exists z A(z) \supset A(x)) \vee \exists y(B(y) \supset \exists z A(z))$$

このとき，$LJ+D+C$ と $LJ+P_2+D+C'$ とは同じ論理になる．

3°) 定理は前提なしでの証明可能性を特徴づける弱完全性の形で述べてあるが，可算言語では，以下に述べる証明がそのまま強完全性の証明になっている．

関連する結果としては，次の2つが知られている．

事実1（Ono [3]）． 1°） 論理式について，(a) 線型な基底をもつ定領域のKripkeモデルでつねに真であること，(b) 可算で線型な基底をもつ定領域のKripkeモデルでつねに真であること，(c) $LJ+P_2+D$ で証明可能なこと，はいずれも同値である。

2°） 論理式について，(d) 最大元のある線型な基底をもつ定領域のKripkeモデルでつねに真であること，(e) 可算で最大元のある線型な基底をもつ定領域のKripkeモデルでつねに真であること，(f) $LJ+P_2+D+K^{\circ}$ で証明可能なこと，はいずれも同値である。

事実2（Horn [1]）．論理式について，(a) 線型な擬Boole代数を基底とする代数的モデルでつねに真であること (b) 可算で線型な擬Boole代数を基底とする代数的モデルでつねに真であること，(c) $[0,1]$ を基底とする代数的モデルでつねに真であること，(d) $[0,1]\cap\mathbb{Q}$ を基底とする代数的モデルでつねに真であること，(e) $LJ+P_2+D$ で証明可能なこと，はいずれも同値である。

定理の十分性のほうの証明はいずれも略す。必要性については，3°）と4°）は事実1の1°）の代わりに事実1の2°）を

利用すれば定理の 1°), 2°) と同様に証明されるので略す。

小論では簡単のため，対象 u を表す定数記号を同じく u と書く。また，$S \subseteq \mathbb{R}$ に対し順序構造 $(S, \leqq)$ を単に S と表す。

§1. 準備

はじめに定理にかかわるいくつかの用語を確認しておく。

集合 U に対し，論理式 A の **U-例** とは，A に含まれるすべての自由変数に U の元に対応する定数記号をいっせいに代入して得られるもののことである。

定領域の Kripke モデル（以下では単に**モデル**という。）とは，順序構造 $\mathcal{L} = (|\mathcal{L}|, \leqq_{\mathcal{L}})$，空でない集合 U，それに後述の条件 M0－M6 を満たす $|\mathcal{L}|$ の元と論理式の U-例との間の関係 $\Vdash$ からなる3つ組 $(\mathcal{L}, U, \Vdash)$ のことである。$\mathcal{L}$ をこのモデルの**基底**という。

M0. $l \Vdash A,\ l \leqq_{\mathcal{L}} l' \Rightarrow l' \Vdash A.$

M1. $l \Vdash A \wedge B \Leftrightarrow .\ l \Vdash A\ \&\ l \Vdash B.$

M2. $l \Vdash A \vee B \Leftrightarrow .\ l \Vdash A$ or $l \Vdash B.$

M3. $l \Vdash A \supset B \Leftrightarrow \forall l' \in |\mathcal{L}|\, [\, l \leqq_{\mathcal{L}} l'\ \&\ l' \Vdash A. \Rightarrow l' \Vdash B\,].$

M4. $\ell \models \neg A \Longleftrightarrow \forall \ell' \in |\mathfrak{L}| [\ell \leqq_{\mathfrak{L}} \ell' \Longrightarrow \ell' \not\models A]$.

M5. $\ell \models \forall x A(x) \Longleftrightarrow \forall u \in U [\ell \models A(u)]$.

M6. $\ell \models \exists x A(x) \Longleftrightarrow \exists u \in U [\ell \models A(u)]$.

論理式Aがモデル$(\mathfrak{L}, U, \models)$で**真である**とは，$|\mathfrak{L}|$の任意の元$\ell$とAの任意の$U$-例$A'$とについて$\ell \models A'$となることである。

線型な基底をもつモデルを**線型モデル**という。

モデルの作り替えに関する以下の3つの補題は容易に証明される。

補題1（Ono [2]）．$(\mathfrak{L}, U, \models)$を線型モデル，$\mathfrak{M}$を線型順序構造，$f$を$|\mathfrak{M}|$から$|\mathfrak{L}|$への写像とし，

$$\begin{cases} \forall m, m' \in |\mathfrak{M}| [m \leqq_{\mathfrak{M}} m' \Longrightarrow f(m) \leqq_{\mathfrak{L}} f(m')], \\ \forall \ell \in |\mathfrak{L}| \forall m \in |\mathfrak{M}| [f(m) \leqq_{\mathfrak{L}} \ell \\ \qquad \Longrightarrow \exists m' \in |\mathfrak{M}| (m \leqq_{\mathfrak{M}} m' \ \& \ f(m') = \ell)], \end{cases}$$

と仮定する。このとき$|\mathfrak{M}|$の元と論理式のU-例との間の関係$\models^*$を

$$m \models^* A \Longleftrightarrow f(m) \models A$$

と定義すれば，$(\mathfrak{M}, U, \models^*)$はモデルになる。

補題2．$(\mathfrak{M}, U, \models^*)$を線型モデル，$\mathfrak{L}$を線型順序構造，

fを$|\mathfrak{M}|$から$|\mathfrak{L}|$への写像とし,

$$\begin{cases} \forall m, m' \in |\mathfrak{M}| \, [\, m <_{\mathfrak{M}} m' \Longrightarrow f(m) <_{\mathfrak{L}} f(m') \,], \\ \forall l \in |\mathfrak{L}| \, \exists m \in |\mathfrak{M}| \, [\, f(m) \leqq_{\mathfrak{L}} l \,], \end{cases}$$

と仮定する。このとき$|\mathfrak{L}|$の元と論理式のU-例との間の関係$\models$を

$$l \models A \Longleftrightarrow \exists m \in |\mathfrak{M}| \, [\, f(m) \leqq_{\mathfrak{L}} l \;\;\&\;\; m \models^{*} A \,]$$

と定義すれば,3つ組$(\mathfrak{L}, U, \models)$がモデルになる条件は"M5の$\Longleftarrow$"以外はすべて成り立つ。

補題3. 補題2の2つめの仮定を

$$\forall l \in |\mathfrak{L}| \, \exists m \in |\mathfrak{M}| \, [\, l \leqq_{\mathfrak{L}} f(m) \,]$$

に取り換える。このとき$|\mathfrak{L}|$の元と論理式のU-例との間の関係$\models$を

$$l \models A \Longleftrightarrow \forall m \in |\mathfrak{M}| \, [\, l \leqq_{\mathfrak{L}} f(m) \Longrightarrow m \models^{*} A \,]$$

と定義すれば,3つ組$(\mathfrak{L}, U, \models)$がモデルになる条件は"M6の$\Longrightarrow$"以外はすべて成り立つ。

§2. 定理(ロ)の必要性の部分の証明

次の補題は前進後退法によって容易に証明される。

補題4. 可算な線型順序構造 $\mathcal{L}$ に対し, $\mathbb{Q}$ から $|\mathcal{L}|$ への写像 f で,

$$\begin{cases} \forall a, a' \in \mathbb{Q}\,[\,a \leqq a' \Longrightarrow f(a) \leqq_{\mathcal{L}} f(a')\,], \\ f \text{ は } |\mathcal{L}| \text{ への全射}, \end{cases}$$

であるものが存在する.

定理 1°) の必要性の部分の証明. 対偶を示すため, 論理式 A が $LJ+P_2+D$ で証明不可能だと仮定する. 事実1, 1°) の "(b) $\Longrightarrow$ (c)" より, 可算で線型な基底をもつあるモデル $(\mathcal{L}, U, \vdash)$ で A は真ではない. したがって $|\mathcal{L}|$ のある元 l と A のある U-例 A' とについて $l \nvdash A'$. ここでこの $\mathcal{L}$ に対して補題4の f をとり, さらに $(\mathcal{L}, U, \vdash)$ と $\mathbb{Q}$, f とに対して補題1の $\vdash^*$ をとってモデル $(\mathbb{Q}, U, \vdash^*)$ を考える. 上の l に対して $f(a)=l$ となる $a \in \mathbb{Q}$ をとれば $a \nvdash^* A'$ となる. したがって, A は $\mathbb{Q}$ を基底とするあるモデルで真ではない. □

§3. 定理 2°) の必要性の部分の証明

補題5. a_0 を $\mathbb{Q}$ の元, $(\mathbb{Q} \cap [a_0, \infty), U, \vdash^*)$ を公理型 C に属するすべての公理を真にするモデルとし,

$$S = (\mathbb{Q} \cap [a_0, \infty))$$
$$\cup \{\inf\{a \in \mathbb{Q} \cap [a_0, \infty) \mid a \models^* \exists x A(x)\} \mid$$
$$\exists x A(x) \text{ は } a_0 \not\models^* \exists x(\exists z A(z) \supset A(x))$$
$$\text{である U-例}\}$$

とおく。

1°) S の元と論理式の U-例との間の関係 $\models^\circ$ を

$$\sigma \models^\circ A \iff \exists a \in \mathbb{Q} \cap [a_0, \infty)\, [a \leqq \sigma \ \& \ a \models^* A]$$

と定義すれば，

(i) $(S, U, \models^\circ)$ はモデルになる；

(ii) $a_0 \not\models^\circ \exists x(\exists z A(z) \supset A(x))$ ならば，集合 $\{\sigma \in S \mid \sigma \not\models^\circ \exists x A(x)\}$ は最大元をもつ。

2°) $[a_0, \infty)$ の元と論理式の U-例との間の関係 $\models$ を

$$\alpha \models A \iff \forall \sigma \in S\, [\alpha \leqq \sigma \Longrightarrow \sigma \models^\circ A]$$

と定義すれば，$([a_0, \infty), U, \models)$ はモデルになる。

1°) の (i) の証明． 補題 2 より "M5 の $\Longleftarrow$"，つまり

$$\forall u \in U\, [\sigma \models^\circ B(u)] \Longrightarrow \sigma \models^\circ \forall y B(y),$$

すなわち

$$\forall u \in U\, \exists a \in \mathbb{Q} \cap [a_0, \infty)\, [a \leqq \sigma \ \& \ a \models^* B(u)]$$
$$\Longrightarrow \exists a \in \mathbb{Q} \cap [a_0, \infty)\, [a \leqq \sigma \ \& \ a \models^* \forall y B(y)]$$

を示せばよい。そこで $\forall u \in U\, \exists a \in \mathbb{Q} \cap [a_0, \infty)\, [a \leqq \sigma\ \&$

$a \vdash^* B(u)]$ と仮定して，$a \leqq \sigma$ & $a \vdash^* \forall y B(y)$ となる $a \in Q \cap [a_0, \infty)$ を求める．

場合1．$\sigma \in Q$ のとき．σ が求める a である．

場合2．$\sigma \notin Q$ のとき．このときは $\sigma \in S$ より

(1) $$a_0 \not\vdash^* \exists x(\exists z A(z) \supset A(x))$$

となるある U-例 $\exists x A(x)$ について $\sigma = \inf\{a \in Q \cap [a_0, \infty) \mid a \vdash^* \exists x A(x)\}$ となる．そこで

(2) $$a_0 \not\vdash^* \exists y(B(y) \supset \exists z A(z))$$

を示そう．(2) を否定すると，ある $u \in U$ に対して $a_0 \vdash^* B(u) \supset \exists z A(z)$．この u に対して仮定から $a \leqq \sigma$ & $a \vdash^* B(u)$ となる $a \in Q \cap [a_0, \infty)$ をとると，$a \leqq \sigma$ & $a \vdash^* \exists z A(z)$，よって $\sigma = a \in Q$ となってしまう．したがって (2) が成り立つ．補題の仮定より

$$a_0 \vdash^* (\forall y B(y) \supset \exists x A(x)) \supset \exists x(\exists z A(z) \supset A(x)) \vee \exists y(B(y) \supset \exists z A(z))$$

だから，(1),(2) より $a_0 \not\vdash^* \forall y B(y) \supset \exists x A(x)$．したがってある $a \in Q \cap [a_0, \infty)$ に対して $a \vdash^* \forall y B(y)$ & $a \not\vdash^* \exists x A(x)$．この a が求めるものである．□

1°) の (ii) の**証明**．$a_0 \not\vdash^\circ \exists x(\exists z A(z) \supset A(x))$ と仮定する．$a_0 \not\vdash^* \exists x(\exists z A(z) \supset A(x))$ となるから，

$$\sigma_0 \equiv \inf\{a \in \mathbb{Q} \cap [a_0, \infty) \mid a \models^* \exists x A(x)\} \in S.$$

そこで,

(3) $\sigma_0 = \max\{\sigma \in S \mid \sigma \not\models^\circ \exists x A(x)\}$,

つまり

(3a) $\sigma \in S,\ \sigma \not\models^\circ \exists x A(x) \Longrightarrow \sigma \leqq \sigma_0$, および

(3b) $\sigma_0 \not\models^\circ \exists x A(x)$

を示せばよい。まず(3a)を示すために $\sigma \in S$ で $\sigma_0 < \sigma$ とすると, σ_0の定義より $\exists a \in \mathbb{Q} \cap [a_0, \infty)\,[a < \sigma \ \&\ a \models^* \exists x A(x)]$, したがって $\sigma \models^\circ \exists x A(x)$. つぎに(3b)を示すために(3b)を否定する。するとある $u \in U$ に対して $\sigma_0 \models^\circ A(u)$. ところがこの u に対して

(4) $a_0 \models^\circ \exists z A(z) \supset A(u)$,

したがって $a_0 \models^\circ \exists x(\exists z A(z) \supset A(x))$ となって仮定に反し, (3b)が成り立つ。そこで(4)を示すために, $\sigma \in S$, $a_0 \leqq \sigma$, $\sigma \models^\circ \exists z A(z)$ と仮定する。するとある $a \in \mathbb{Q} \cap [a_0, \infty)$ に対して $a \leqq \sigma \ \&\ a \models^* \exists z A(z)$. したがって σ_0 の定義より $\sigma_0 \leqq a \leqq \sigma$ となるから $\sigma \models^\circ A(u)$. これで(4)も証明された。 □

2°) の証明. 補題3より "M6 の $\Longrightarrow$", つまり

$$\alpha \models \exists x A(x) \Longrightarrow \exists u \in U\,[\alpha \models A(u)],$$

すなわち

$$\forall\sigma\in S[\alpha\leqq\sigma\Longrightarrow\sigma\Vdash^{\circ}\exists x A(x)]$$
$$\Longrightarrow\exists u\in U\,\forall\sigma\in S[\alpha\leqq\sigma\Longrightarrow\sigma\Vdash^{\circ}A(u)]$$

を示せばよい。そこで $\forall\sigma\in S[\alpha\leqq\sigma\Longrightarrow\sigma\Vdash^{\circ}\exists x A(x)]$ と仮定して $\forall\sigma\in S[\alpha\leqq\sigma\Longrightarrow\sigma\Vdash^{\circ}A(u)]$ となる $u\in U$ を求める。

場合1. $a_0\Vdash^{\circ}\exists x(\exists z A(z)\supset A(x))$ のとき。このときはある $u\in U$ に対して $a_0\Vdash^{\circ}\exists z A(z)\supset A(u)$ となるが，この u が求めるものである。

場合2. $a_0\nVdash^{\circ}\exists x(\exists z A(z)\supset A(x))$ のとき。1°) の (ii) より $\sigma_0=\max\{\sigma\in S\mid\sigma\nVdash^{\circ}\exists x A(x)\}$ とする。$\sigma_0\nVdash^{\circ}\exists x A(x)$ だから仮定より $\sigma_0<\alpha$。したがってある $\sigma_1\in S$ に対して $\sigma_0<\sigma_1<\alpha$。σ_0 のとり方より $\sigma_1\Vdash^{\circ}\exists x A(x)$，したがってある $u\in U$ に対して $\sigma_1\Vdash^{\circ}A(u)$。この u が求めるものである。□

定理 2°) の必要性の部分の証明. 対偶を示すため，論理式 A が $LJ+D+C$ で証明不可能だと仮定する。

定理 1°) の必要性の部分の証明を事実1の "(a) ⟹ (c)" の証明にまでさかのぼってやり直せば，あるモデル $(Q, U, \Vdash^{*})$ において，公理型 C に属するすべての公理は真になるが A は真にはならないことがわかる。したがってある $a_0\in Q$

とAのある U-例 A′ とについて $a_0 \not\models^* A'$.

$\models^*$ を $\mathbb{Q} \cap [a_0, \infty)$ の元と論理式の U-例との間の関係に制限したものを改めて $\models^*$ とすれば, $(\mathbb{Q} \cap [a_0, \infty), \cup, \models^*)$ は公理型Cに属するすべての公理を真にするモデルになり, さらに $a_0 \not\models^* A'$ となる. —— このことはよく知られた事実だが, $(\mathbb{Q}, \cup, \models^*)$ と $\mathbb{Q} \cap [a_0, \infty)$, それに $\mathbb{Q} \cap [a_0, \infty)$ から $\mathbb{Q}$ への標準的単射に対して補題1を適用することによっても示される.

したがって補題5の 1°) のモデル $(S, \cup, \models^\circ)$ に関して $a_0 \not\models^\circ A'$, さらに 2°) のモデル $([a_0, \infty), \cup, \models)$ に関して $a_0 \not\models A'$ となる.

そして $\models$ を $\mathbb{R}$ の元と論理式の U-例との間の関係に, a_0 より小さい元は a_0 と同じ働きをするように, 拡張したものを改めて $\models$ とすれば, $(\mathbb{R}, \cup, \models)$ はモデルになり, さらに $a_0 \not\models A'$ となる. —— このこともよく知られた事実だが, $([a_0, \infty), \cup, \models)$ と $\mathbb{R}$, それに α に $\max\{\alpha, a_0\}$ を対応させる $\mathbb{R}$ から $[a_0, \infty)$ への写像に対して補題1を適用することによっても示される.

したがって, Aは $\mathbb{R}$ を基底とするあるモデルで真ではない. □

文 献

[1] Horn,A., Logic with truth values in a linearly ordered Heyting algebra, J.Symbolic Logic, 34(1969), 395-408.

[2] Ono,H., Kripke models and intermediate logics, Publ.RIMS Kyoto Univ., 6(1970/71), 461-476.

[3] -----, Model extension theorem and Craig's interpolation theorem for intermediate predicate logics, Rep.Math. Logic, 15(1983), 41-58.

[4] Umezawa,T., On logics intermediate between intuitionistic and classical predicate logic, J.Symbolic Logic, 24 (1959), 141-153.