数理解析研究所講究録
第 589 巻 1986 年 105-111

E. de Shalit「The Explicit Reciprocity Law in Local Class Field Theory」(preprint)の紹介

東大理 金子 昌信 (Masanobu Kaneko)

§.1 準備

k : 局所体

$\mathcal{O}$; その整数環　$\mathfrak{p}$; 極大イデアル

π : ひとつの素元，$q = \#(\mathcal{O}/\mathfrak{p})$ とする

まず，以下で必要な Lubin-Tate theory を復習する

$$\mathcal{F}_\pi \overset{\text{def}}{=} \{ l \in \mathcal{O}[[T]] \mid l(T) \equiv \pi T \bmod \deg 2,\ l(T) \equiv T^q \bmod \pi \}$$

◎各 $l \in \mathcal{F}_\pi$ に対し，$\mathcal{O}$ 上の 1 次元可換形式群 F_l で，$l \in \mathrm{End}_{\mathcal{O}} F_l$ なるものが唯一存在する．F_l による加法を $[+]_l$，或いは l を省略して $[+]$ で表す．

◎ ring hom

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O} & \xhookrightarrow{\text{inj}} & \mathrm{End}_{\mathcal{O}} F_l \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ a & \longmapsto & [a]_l(T) = aT + \cdots \end{array}$$

があって，特に $[\pi]_l(T) = l(T)$

◎ $l, l' \in \mathcal{F}_\pi \Rightarrow F_l \underset{\mathcal{O}}{\cong} F_{l'}$

$l \in \mathcal{F}_\pi$，$l' \in \mathcal{F}_{\pi'}$ (π' は異なる素元) ならば

$F_\ell \underset{\mathcal{O}_K}{\sim} F_{\ell'}$ ただし $K = \hat{k}_{ur}$（kの最大不分岐拡大の完備化）

◎ $\mathbb{Z} \ni n \geqq 0$ に対し

$W_\ell^n \overset{\mathrm{def}}{=} \{w \in \bar{k} \mid [\pi^n]_\ell(w) = 0\}$ とおくとき

$k(W_\ell^n)$ は ℓ に無関係な k の拡大体で，これを k_π^n とかく．

k_π^n/k は有限次完全分岐アーベル拡大（$[k_\pi^n : k] = (q-1)q^{n-1}$）

ノルム群 $N(k_\pi^n/k) = \langle \pi \rangle \times (1+\mathfrak{p}^n)$

$\widetilde{W}_\ell^n \overset{\mathrm{def}}{=} W_\ell^n - W_\ell^{n-1}$ とすると $\widetilde{W}_\ell^n$ の任意の元は k_π^n の素元

以上 cf. Lubin-Tate [4]

<u>Kummer pairing の定義</u>

$\mathfrak{p}_n$ を k_π^n の整数環の極大イデアルとする．

また，$F_\ell(\mathfrak{p}_n)$ で，集合 $\mathfrak{p}_n$ に F_ℓ による加法及び，$\mathcal{O} \hookrightarrow \mathrm{End}_{\mathcal{O}} F_\ell$ によって $\mathcal{O}$-加群の構造を入れたものを表す．

このとき，pairing

$$(\;,\;)_{n,\ell} \; ; F_\ell(\mathfrak{p}_n) \times (k_\pi^n)^\times \longrightarrow W_\ell^n$$

を次のように定義する．

まず, $\alpha \in \mathfrak{p}_n$ に対し, $\exists a \in \bar{k}$ s.t. $[\pi^n]_\ell(a)=\alpha$

(存在は, $[\pi]_\ell$: 多項式の場合に帰着させる)

このとき $k_\pi^n(a)/k_\pi^n$ は有限次アーベル拡大となる.

$\beta \in (k_\pi^n)^\times$ に対し σ_β で対応する Artin symbol を表す

そこで,

$$(\alpha, \beta)_{n,\ell} \overset{\text{def}}{=} \sigma_\beta(a)\,[-]_\ell\, a \quad \in W_\ell^n$$

右辺は a のとり方によらない.

$(\alpha, \beta)_{n,\ell}$ は α について $\mathcal{O}$-linear

β について linear

§.2 定理

F_ℓ の Tate module の generator $(\omega_n)_{n\geq 1}$ を fix する

即ち, $\omega_n \in \widetilde{W}_\ell^n$, $[\pi]_\ell(\omega_n) = \omega_{n-1}$

$\alpha \in \mathfrak{p}_n$ に対し $\exists f \in T\cdot\mathcal{O}[[T]]$ s.t. $f(\omega_n) = \alpha$.

(ω_n は k_π^n の素元であった)

また, Coleman [1] によって

$\beta \in (k_\pi^n)^\times$ に対し $\exists g \in \mathcal{O}((T))^\times$

s.t. $g(\omega_i) = N_i^n(\beta) \quad 1 \leq i \leq n$

$(N_i^n = N_{k_\pi^n/k_\pi^i})$

i.e.

$$\begin{tikzcd}
k_\pi^1 \arrow[d, phantom, sloped, "\ni"] & k_\pi^2 \arrow[d, phantom, sloped, "\ni"] & & & k_\pi^{n-1} \arrow[d, phantom, sloped, "\ni"] & k_\pi^n \arrow[d, phantom, sloped, "\ni"] \\
g(\omega_1), & g(\omega_2), \arrow[l, bend left, "\text{ノルム}"] & \cdots \arrow[l, bend left, "\text{ノルム}"] & \cdots & g(\omega_{n-1}), \arrow[l, bend left, "\text{ノルム}"] & g(\omega_n) = \beta \arrow[l, bend left, "\text{ノルム}"]
\end{tikzcd}$$

定理 (de Shalit)

$\alpha \in \mathfrak{p}_n$, $\beta \in (k_\pi^n)^\times$ に対し先のように f, g をとる

$$(f, g)_{n,\ell} \overset{\mathrm{def}}{=} \pi^{-n} \sum_{\omega \in W_\ell^n} \left(\lambda \circ f - \frac{\lambda \circ f \circ [\pi]}{\pi}\right)(\omega)\, \delta g(\omega) + \pi^{-n} \frac{df}{dT}(0)\left(1 - \frac{Ng}{g}(0)\right)$$ とおく

ここで λ は F_ℓ の Lubin-Tate logarithm

$$\delta g = \frac{1}{d\lambda/dT} \cdot \frac{dg/dT}{g} \in T^{-1}\mathcal{O}[[T]]$$

$N : \mathcal{O}((T)) \longrightarrow \mathcal{O}((T))$ は Coleman's norm operator (cf. [1])

この時，$(f, g)_{n,\ell} \in \mathcal{O}$ で

$$(\alpha, \beta)_{n,\ell} = [(f, g)_{n,\ell}]_\ell(\omega_n)$$

注意

・この定理は Coleman によって予想され ([2]) 彼自身，$k = \mathbb{Q}_p$，$[\pi]_\ell = (1+T)^p - 1$ の場合に証明した ([3])

・$(f, g)_{n,\ell}$ の右辺の2項をそれぞれ $\int_{n,\ell}(f, g)$，$\langle f, g \rangle_{n,\ell}$ と書くと，Coleman は，それぞれが $\mathcal{O}$ に属し，$(f, g)_{n,\ell} \bmod \pi^n$ は α, β のみにより，f, g のとり方によらないことを示した．([2])

・$\langle f, g\rangle_{n,\ell}$ は"補正項"と見なせる．それは，
$\alpha\in\mathfrak{p}_n^2$ 又は $\beta\in N(k_\pi^{2n}/k_\pi^n)$
$$\Rightarrow (f,g)_{n,\ell}\equiv \int_{n,\ell}(f,g) \mod \pi^n$$

・$\beta\in N(k_\pi^{2n}/k_\pi^n)\Rightarrow [(f,g)_{n,\ell}]_\ell(\omega_n)$
$$=[\pi^{-n}\mathrm{Tr}_{k_\pi^n/k}(\lambda(\alpha)\delta g(\omega_n))]_\ell(\omega_n)$$
これはWilesの結果([5])に一致する．

§.3 証明の方針

$[\alpha,\beta]_{n,\ell}=[(f,g)_{n,\ell}]_\ell(\omega_n)$ (定理の右辺) とおく
$[\alpha,\beta]_{n,\ell}$ は α について $\mathcal{O}$-linear
β について linear
示すべきは $(\alpha,\beta)_{n,\ell}=[\alpha,\beta]_{n,\ell}$ であるから，
乗法性によって β は k_π^n の素元としてよい

① $\beta\in N(k_\pi^m/k_\pi^n)$ $\forall m\geq n$ の場合
上の注意にある通り，この場合はWiles([5])によってO.K.
・de ShalitはColeman power seriesを使って
$\beta=\omega_n$ の場合に帰着させ，簡易化された証明を与えている．

②. 一般の場合.

①に帰着させる.

k_π^n/k ; 完全分岐で, βは素元と仮定しているから

$N_{k_\pi^n/k}(\beta) = \pi'$ はk の素元である.

このとき, 局所類体論 (及び k_π^n の性質. §1) より

$$\begin{cases} k_\pi^i = k_{\pi'}^i & 1 \leq i \leq n. \\ \beta \in N(k_{\pi'}^m/k_{\pi'}^n) & \forall m \geq n \end{cases}$$ がわかる.

すると, ①によって $\ell' \in \mathcal{F}_{\pi'}$ (記号は§.1 の通り)

に対し, $(\alpha, \beta)_{n,\ell'} = [\alpha, \beta]_{n,\ell'}$ である.

そこで, O_K 上の同型 $\eta ; F_{\ell'} \xrightarrow{\sim} F_\ell$ を

使い, この式をℓでの pairing に持ち込んで定理

を得る. (この計算は簡単ではないが難しいことは

使わない)

- Wiles ([5]) が, $\ell = X^q + \pi X$ に固定して考えて
いたのに対し. de Shalit は ℓ 及び π も動かし,
そのときの相互の関係を調べたところに証明のポイ
ントがある.

§.4 応用

$k_\pi^\infty = k(\bigcup_n W_\ell^n)$.

M ; k_π^∞に, $\forall n$, $\forall \alpha \in \mathfrak{g}_\infty$ についての $[\pi^n]_\ell(a) = \alpha$

の根 a（ひとつの代数閉包における）をすべて添加した体

$(k_\pi^\infty)^{p,ab}$; k_π^∞ の最大 pro-p abel 拡大 ($p = \mathrm{char}\ \mathcal{O}/\mathfrak{p}$)

この時

<u>定理 (de Shalit)</u>

$M = (k_\pi^\infty)^{p,ab}$

証明には explicit reciprocity (§.2の定理) と，Coleman による，$\lambda(\mathfrak{p}_n)$ の dual に関する結果 ([2]) を使う．

文献

[dS] de Shalit, E ; The Explicit Reciprocity Law in Local Class Field Theory. preprint.

[1] Coleman, R ; Division values in local fields. Inv. Math. 53, 91-116 (1979)

[2] Coleman, R ; The arithmetic of Lubin-Tate division towers. Duke Math. J. 48, 449-466 (1981)

[3] Coleman, R ; The dilogarithm and the norm residue symbol. Bull. Soc. Math. France. 109, 373-402 (1981)

[4] Lubin, J - Tate, J ; Formal complex multiplication in local fields. Ann. of Math. 81, 380-387 (1965)

[5] Wiles, A ; Higher explicit reciprocity laws. Ann. of Math. 107, 235-254 (1978