数理解析研究所講究録
第590巻 1986年 14-19

絶対誤差を損失としたときの位置母数の同時推定について

東京経済大学　篠崎信雄（Nobuo Shinozaki）

位置母数を同時に推定する場合，その次元が3以上であれば，最良不変推定量よりも良い推定量が存在することを，広い分布のクラスと損失関数の選び方に対して，L. D. Brown（1966）は示している。しかし具体的に改良となる推定量は与えられていない。

正規分布の場合の議論は数多く，もちろん具体的な推定量も与えられているが，損失関数は2次損失である場合がほとんどであり，それ以外の損失関数の場合の議論はJ. O. Berger（1978），Brandwein and Strawderman（1980）に与えられている。しかし十分なものとは思えない。

Shinozaki（1984）は2次損失の場合で，かつ，最良不変推定量の成分が独立に対称な分布をしている場合について，具体的な推定量のクラスを与えている。最良不変推定量をXとするとき，改良する推定量として

$$(1) \qquad \delta(X) = \left\{ 1 - \frac{b}{a + \|X\|^2} \right\} X$$

という形のものがとりあげられた，ここで a, b は適当に選ばれる正の定数である。(1)で与えられる推定量が X の改良となるのは具体的な分布の形にそれほどは依存せず，かなりロバストであることがある程度明らかにされた。

ここでは，2次損失以外の場合について同様の可能性をさぐり，(1)で与えられる推定量が X の改良となっているという性質が損失関数の選び方についてもロバストであるか否かを調べたい。1つの例として絶対誤差損失をとりあげてみる。

X_i ($i=1, \cdots, p$) が $f(|x_i - \theta_i|)$ なる形の密度関数をもつとし，$X_1, \cdots, X_p$ は独立とする。$f(\cdot)$ は bounded とし，$\max f(x) = M$ とおく。 $Z_i = X_i - \theta_i$ としたとき

$$E(Z_i) = 0 , \qquad E(Z_i^2) = 1 ,$$

$$E(|Z_i|^3) = h \times E(|Z_i|), \qquad E(Z_i^4) = \kappa < \infty$$

とおく。

$\theta_1, \cdots, \theta_p$ を $\hat{\theta}_1(X_1, \cdots, X_p), \cdots, \hat{\theta}_p(X_1, \cdots, X_p)$ で推定するときの損失を

$$\sum_{i=1}^{p} |\hat{\theta}_i - \theta_i|$$

とする。推定量としては(1)で与えられる $\delta(X)$ を考える。評

価の都合上 $a \geqq b$, $a \geqq p$ と仮定する。一般性を失わず $\theta_i \geqq 0$ とすると, $|X_i - \theta_i| - |X_i - \theta_i - bX_i/(a+\|X\|^2)|$ は

$$= \frac{bX_i}{a+\|X\|^2}, \qquad X_i - \theta_i \geqq \frac{bX_i}{a+\|X\|^2} \geqq 0 \quad \text{のとき}$$

$$(2) \quad = \frac{bX_i}{a+\|X\|^2} + 2\left\{X_i - \theta_i - \frac{bX_i}{a+\|X\|^2}\right\}, \qquad \frac{bX_i}{a+\|X\|^2} \geqq X_i - \theta_i \geqq 0 \text{のとき}$$

$$= -\frac{bX_i}{a+\|X\|^2}, \qquad X_i - \theta_i < 0 \quad \text{のとき.}$$

と表わされる。

評価の過程で次の等式を何度となく用いている.

$$(3) \quad \frac{1}{a+\|Z+\theta\|^2} = \frac{1}{a+p+\|\theta\|^2} - \frac{\|Z\|^2 + 2Z'\theta - p}{(a+p+\|\theta\|^2)(a+\|Z+\theta\|^2)}.$$

(2)式の第1項に相当する部分については, (3)式を用いることにより

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{|Z_i| + \mathrm{sign}(Z_i)\theta_i}{a+\|Z+\theta\|^2} = \frac{\sum_i(|Z_i| + \mathrm{sign}(Z_i)\theta_i)}{a+p+\|\theta\|^2} - \frac{\sum_i(|Z_i| + \mathrm{sign}(Z_i)\theta_i)(\|Z\|^2 + 2Z'\theta - p)}{(a+p+\|\theta\|^2)^2} + R$$

ここで

$$R \equiv \sum_i \frac{(|Z_i| + \mathrm{sign}(Z_i)\theta_i)(\|Z\|^2 + 2Z'\theta - p)^2}{(a+p+\|\theta\|^2)^2(a+\|Z+\theta\|^2)}$$

と表現される。従って

$$E\sum_{i=1}^{p}\frac{|Z_i|+\mathrm{sgn}(Z_i)\theta_i}{a+\|Z+\Theta\|^2}=\frac{p\,E(|Z_1|)}{a+p+\|\theta\|^2}-\frac{E(|Z_1|)(2\|\Theta\|^2+ph-p)}{(a+p+\|\Theta\|^2)^2}$$

$$+E(R)$$

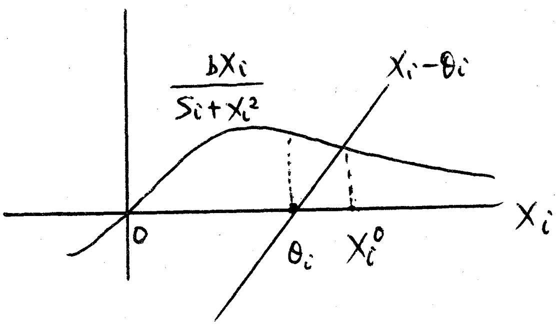
$$=E(|Z_1|)\left\{\frac{p-2}{a+p+\|\theta\|^2}+\frac{2a+3p-ph}{(a+p+\|\Theta\|^2)^2}\right\}+E(R)$$

となり，$p\geqq 3$ ならば改良できる様子がうかがえる。

(2) 式の残りが

$$-\frac{1}{2}\,2M\,\frac{b^2\theta_i^2}{(S_i+\theta_i^2)^2}\left(1+\frac{1+\sqrt{2}}{2}\,\frac{b}{S_i+\theta_i^2}\right)-\frac{1}{2}\,\frac{b^2E(|Z_i|)}{(S_i+\theta_i^2)^2}$$

で下からおさえられることを示す，ここで $S_i=a+\sum_{k\neq i}X_k^2$.



左図のように X_i^0 を

$$X_i-\theta_i=\frac{bX_i}{S_i+X_i^2}$$

を満たす X_i の値とする。

$$x_i-\theta_i-\frac{bx_i}{S_i+x_i^2}=-\frac{b\theta_i}{S_i+x_i^2}+\left(1-\frac{b}{S_i+x_i^2}\right)(x_i-\theta_i)$$

$$\geqq-\frac{b\theta_i}{S_i+\theta_i^2}+\left(1-\frac{b}{S_i+\theta_i^2}\right)(x_i-\theta_i)$$

より

$$2\int_{\theta_i}^{X_i^0}\left(x_i-\theta_i-\frac{bx_i}{S_i+x_i^2}\right)f(x_i-\theta_i)\,dx_i$$

$$\geqq 2\int_{\theta_i}^{X_i^0}\left\{-\frac{b\theta_i}{S_i+\theta_i^2}+\left(1-\frac{b}{S_i+\theta_i^2}\right)(x_i-\theta_i)\right\}f(x_i-\theta_i)\,dx_i\equiv I$$

いま

$$1-\frac{b}{S_i+\theta_i^2} \geqq \frac{1}{1+\frac{1+\sqrt{2}}{2}\frac{b}{S_i+\theta_i^2}} - \frac{1}{2}\frac{b^2}{(S_i+\theta_i^2)^2}$$

であることが示されるので，

$$I \geqq 2\int_N \left\{-\frac{b\theta_i}{S_i+\theta_i^2} + \frac{1}{1+\frac{1+\sqrt{2}}{2}\frac{b}{S_i+\theta_i^2}}(x_i-\theta_i)\right\} f(x_i-\theta_i)\,dx_i$$

$$-\frac{1}{2}\frac{b^2}{(S_i+\theta_i^2)^2}\ 2\int_{\theta_i}^{\infty}(x_i-\theta_i)\ f(x_i-\theta_i)\,dx_i,$$

ここでNは被積分関数が負の範囲を表わす。従って

$$I \geqq -\frac{1}{2}\,2M\,\frac{b^2\theta_i^2}{(S_i+\theta_i^2)^2}\left(1+\frac{1+\sqrt{2}}{2}\frac{b}{S_i+\theta_i^2}\right)-\frac{1}{2}\frac{b^2E(|z_i|)}{(S_i+\theta_i^2)^2}$$

を得る。Mの値がa，bの範囲を具体的に決定するのに重要な役割を果たすようである。

以降，Rおよび $-\frac{1}{(S_i+\theta_i^2)^2}$，$-\frac{1}{(S_i+\theta_i^2)^3}$ について(3)あるいはそれと類似した式をくりかえし適用し，それらの期待値を下から評価する。

詳しい過程は省略するが，現在確かめられているところでは，正規分布の場合（$E(|z_i|)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}=2M$，$n=2$，$k=3$ の場合）には，$p\geqq 12$ 程度ならば $b\leqq(p-2)$，$a\geqq p$ のとき推定量(1)はXの改良となっている。もちろん $p\leqq 11$ の場合でも，aをpより少し大きくとれば，同様の結果が得

される。

References

L. D. Brown (1966) On the admissibility of invariant estimators of one or more location parameters. Ann. Math. Statist. 1087–1136.

J. O. Berger (1978) Minimax estimation of a multivariate normal mean under polynomial loss. J. Multivariate Analysis 8, 173–180.

A. C. Brandwein and W. E. Strawderman (1980) Minimax estimation of location parameters for spherically symmetric distributions with concave loss. Ann. Statist. 8, 279–284.

N. Shinozaki (1984) Simultaneous estimation of location parameters under quadratic loss. Ann. Statist. 12, 322–335.