数理解析研究所講究録
第 591 巻 1986 年 105-110

分散システムの一つのスケジューリング問題

広島大学工学部　阿江　忠 (Tadashi Ae)
広島大学工学部　山下雅史 (Masafumi Yamashita)
広島大学工学部　方　安祥 (An Xiang Fang)

１．まえがき

分散システムの一つであるＬＡＮの方式についてはいろいろ議論されてきたが、現在では，ＣＳＭＡ／ＣＤ方式あるいはトークンパッシング方式に大別できる。ここではトークンパッシング方式（図１）における一つのスケジューリング問題をモデル化し，その計算複雑さを論じる。

通常のトークンパッシング方式では，図２（ａ）のようにトークンをつかまえたプロセッサの処理時間は可変である（上限はパケット長に、下限は実現方法に依存する）。ここでは　理論的な取り扱いを容易にするため，各プロセッサにおけるトークンの滞在時間を一定としたスロット化トークンパッシングのモデルを提案する。

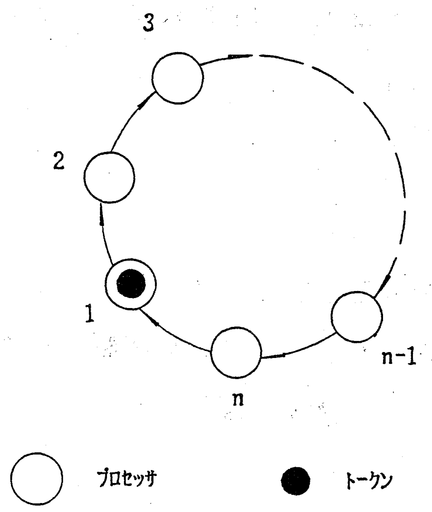
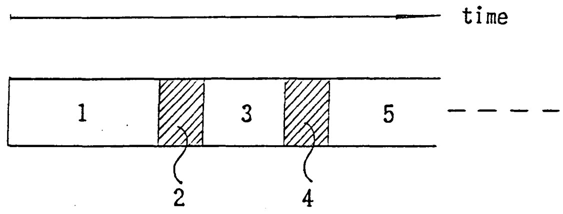
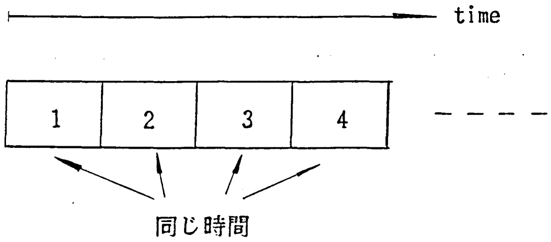


図１．トークンパッシング方式



（a）通常の場合



（b）スロット化トークンパッシング

図２．モデリング

このスロット化トークンパッシング・モデルにおけるスケジューリング問題の計算複雑さは，各プロセスに属するタスク間の先行関係が線形順序であるという制約のもとでも一般にはＮＰ－完全になることを示す。

２．スロット化トークンパッシング・スキーマのスケジューリング

スロット化トークンパッシング・スキーマのスケジューリング問題（以下では単にスケジューリング問題という）は以下のように定義される。

スケジューリング問題：

インスタンス：スロット化タスク（以下，単にタスク）の集合

$\mathcal{T}=\{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$，ただし$t_i$（$i=1,2,\cdots,n$）はプロセッサiでのみ実行可能としプロセッサは1,2,・・・,n，1,2，・・・，n，・・・の順に実行できる。

線形順序の制約を持つm個のジョブJ_1，・・・，Jm，ただし

$$Ji = t_{i1}\ t_{i2} \cdots t_{ij}$$

$$(t_{ij} \in \mathcal{T},\ t_{ij} \neq t_{ik} \quad \text{if} \quad j \neq k)$$

とする。

質問：$t_1\ t_2 \cdots t_n$ までの一巡をラウンドと呼ぶ時ラウンド数b以内ですべてのJ_1，・・・，Jmを終了するスケジュールが存在するか？

すなわち、以下の条件を満足するスケジュール

$$\sigma : \{t_{ij}\} \rightarrow \mathbf{N}\ (\mathbf{N}：自然数)$$

は存在するか？

条件：（i）　σ：単射

（ii）　$\forall i,j \quad \sigma(t_{ij}) < \sigma(t_{i(j+1)})$

（iii）　$\forall i,j \quad t_{ij} = t_{((\sigma(t_{ij})-1) \bmod n)}$

（iv）　$\max\{\sigma(t_{ij})\} \leqq bn$

3．NP－完全の問題

〈場合　1〉　$|\mathcal{T}|=2$でもスケジューリング問題はNP－完全である。

（略証）　$\mathcal{T}=\{1，2\}$とする。スケジューリング問題がNPであることは明らか。分割問題(Partition問題）がスケジューリング問題に多項式時間変換可能であることを示す。

分割問題のインスタンスを$A=\{a_1,\cdots,a_n\}$とするとき以下のようにスケジューリング問題を構成する。ここに、

$\sum_{i=1}^{n} a_i = 2b$　（b：自然数）

と一般性を失わずに仮定できる。

次のようにn個のジョブ　$J_0, J_1, \cdots, J_n$を作る。

$$J_0 = 2^{2b}1^{2b}2^{2b}1^{2b}$$

$$J_1 = 1^{2a_1}\,2^{2a_1}$$

$$J_2 = 1^{2a_2}\,2^{2a_2}$$

・

・

・

$$J_n = 1^{2a_n}\,2^{2a_n}$$

まず、上記のジョブに８ｂラウンドのスケジュールが存在するとき、$A' \subset A$が存在して$\sum_{a \in A'} a = b$なるA'なる分割の存在することを言う。上記の作り方から、８ｂラウンドのスケジューリングが存在するためには、必ずJ_0のなかの１つの"2"と$J_1 \sim J_n$のなかの"１"つの１を組み合わせて１つのラウンドを作り、J_0のなかの１つの"１"と$J_1 \sim J_n$のなかの１つの"2"を組み合わせて１つのラウンドを作らなければならないことが証明でき、これを用いれば、容易に示すことができる。

次に分割の解$A' \subset A$が存在するときは、必ずJ_i (i=1,..,n)とJ_0を組み合わせた８ｂラウンドのスケジュールが存在することを言う。$A' = \{a_1, \cdots, a_j\}$を一般性を失うことなく仮定する。以下のスケジュールを考える。

最初$J_1, \cdots, J_j$の先頭の１の列とJ_0の先頭の２ｂ個の２の列を組み合わせる。次に、J_0の前の２ｂ個の１の列を$J_1, \cdots, J_j$の残りの２の列と組み合わせる。更に、$J_{j+1}, \cdots, J_n$の先頭の１とJ_0の残っ

た2b個の2の列を組み合わせ、最後に、J_0 の残った1の列と J_{j+1}, $\cdots$, J_n の2の列を組み合わせる。このことにより、8bのスケジュールが構成される。

以上から分割問題はこのスケジューリング問題に変換することができるので、このスケジューリング問題はNP－完全である。 □

〈場合 2〉すべてのジョブが単調なタスクシーケンスであってもNP－完全である。ここに、ジョブ $J_i = t_{i1} \cdots t_{ij}$ が単調であることは、任意のp，q（$p<q$）に対し、$t_{ip} = t_{p'}$，$t_{iq} = t_{q'}$ とすれば、$p'<q'$ を満たすことである。

（略証） 独立節点集合による節点の被覆問題[1]をスケジューリング問題に帰着する。

具体的には問題『3つの独立節点集合で節点被覆できるか？』がNP－完全になることを使って証明をする。

グラフ $G=(V, E)$,

$$V=\{v_1, \cdots, v_p\},\ E=\{e_1, \cdots, e_q\}$$

に対して

$$\mathcal{T}=\{v_1, \cdots, v_p, e_1, \cdots, e_q, w_1, \cdots, w_p\}$$

ただしタスクは左から順にオーダーがついているものとする。

$v_i \in V$ に対して

$$Ev_i=\{f_1, \cdots, f_j, \cdots, f_r \mid f_j=(u, v)\in E\}$$

とする。

各 v_i に対してつぎの3つのジョブを作る。

$$J^1v_i = v_i f_1 \cdots f_r w_i$$

$$J^2v_i = v_i w_i$$

$$J^3v_i = v_i w_i$$

３｜Ｖ｜個のジョブに対して、３ラウンドのスケジュールが存在する必要十分条件は３つの独立集合による被覆が存在することである。必要条件は明らか。十分条件はv_iとw_iを各ジョブにつけてあることに注意すれば証明できる。３つの独立集合の被覆問題をすべてのジョブが単調なタスクシーケンスであるスケジョール問題に変換することができるのでこのスケジューリング問題はＮＰ－完全である。　□

４．むすび

一見簡単に見えるスロット化トークンパッシング方式上のスケジューリング問題も一般にはＮＰ－完全なることが判明した。最後に多項式時間で解ける部分問題を示す。

〈場合　3〉　ジョブの数をｃ（定数），シーケンスの最大の長さをlとすると、ＤＰを用いて　$O(l^c)$で解ける。

文献.

[1] Garey,M.R. and Johnson,D.S.,"Comuters and Intractability:A Guide to the Theory of NP-Completeness", W.H.Freeman and Company,1979

[2] Ullman,J.D.,"NP-Complete Scheduling Problems",JCSS,vol.10,pp.384-393,1975