数理解析研究所講究録
第 591 巻 1986 年 157-164

非単調論理に関する一考察

九大総理工　新村　司　（ Tsukasa　Shinmura ）

非単調論理（non-monotonic　logic）は不完全知識に対処するために考え出された論理であるが，必ずしも不完全知識に対処できるとは言い難い．そこで，本稿では無矛盾性に関する新しい定式化を提案する．さらに，新しい定式化における不動点に関するいくつかの結果を与え，モデル理論についても述べる．最後に，システムとして実現する際に問題となる不動点の非決定性について考える．

1．　はじめに

非単調論理では不完全な知識と実世界とのギャップを少しでも埋めるために，理論を拡張するオペレータが導入され，そのオペレータは，与えられた理論に無矛盾な全ての論理式に記号“M”を付けた論理式を導出する．このとき，Ｍｐはｐが無矛盾であることを表す．

ところで，非単調論理は不完全な知識に対処できるように考え出された論理であるが，理論に新しい公理が追加され，オペレータによってその理論が拡張されると，矛盾が生じたり，不動点が存在しなくなるようなものが数多く存在する．

$$\text{理論 } A = \{Mp \supset q\}\ .$$

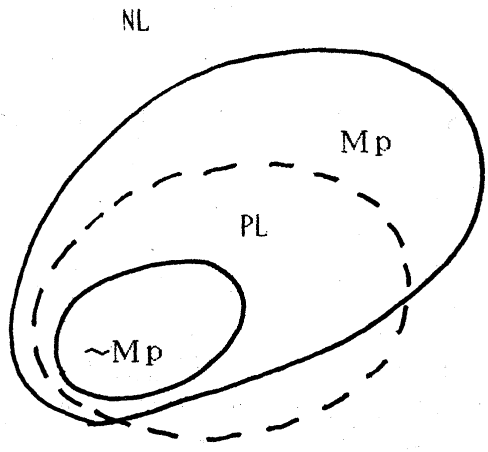
この理論Ａは無矛盾である．ところで，理論Ａに新しい公理～ｑが追加されたとしよう．すなわち，

$$\text{理論 } A' = \{Mp \supset q,\ \sim q\}\ .$$

このとき，従来の非単調論理における定式化では，新しい理論Ａ’には不動点が存在しないので，矛盾であると見なされる．～Ｍｐが述語論理に意味で導出可能のときは，～ｐが述語論理の意味で導出可能でない限り矛盾が生じることになる．したがって，非単調論理で扱える理論は制限されることになる．

このように，述語論理の意味において無矛盾である理論を拡張すると矛盾が生じたり，

不動点が存在しなくなるのでは拡張を行った意味がなく，これでは，不完全な知識に対処できるとは言い難い．一般には，述語論理の意味において無矛盾な理論は非単調論理においても無矛盾であるのが自然であろう．すなわち，理論A’は無矛盾であるべきと考える．このように，従来の非単調論理における定式化では，オペレータがあまりにも強すぎるので，本稿では弱くすることを考える．



PL：Predicate Logic
NL：Non-monotonic Logic
図１　新しいオペレータ

図１において、理論A’を無矛盾にするために，波線の枠にすることを考える．そのために、新しいオペレータを導入する．すなわち、任意の理論に対する新しいオペレータに関する任意の不動点Fに対して，次のことが成り立つようにする．

$$\sim p \notin F \text{ かつ } \sim Mp \notin F \Longrightarrow Mp \in F.$$

ところで，逆に，従来の定式化では矛盾であって欲しいのに無矛盾であると見なされる理論も存在する．例えば，次の理論Bや理論Cがそうである．

$$\text{理論 } B = \{Mp, \sim p\}.$$
$$\text{理論 } C = \{\sim Mp, p\}.$$

したがって，次の条件も満たすようなオペレータを導入する．

$$\sim p \in F \Longleftrightarrow \sim Mp \in F.$$

以上の考察は，Moore[4] の主張を考慮したものである．

２．　新しい定式化

非単調論理では，無矛盾性を表す記号“M”が導入される．このとき，ｐが論理式ならば，Ｍｐも論理式である．さらに，論理式Ｍｐが閉じているとは，論理式ｐが閉じている

ことである．したがって，非単調論理における言語は，記号“M”を含む第一階言語である．

1．における考察を定式化する．そのために，新しいオペレータを定義する．

【定義1】

$\mathscr{L}$：第一階言語（ただし，記号“M”を含む），

S：$\mathscr{L}$の中の閉論理式の集合，

A：$\mathscr{L}$の中の理論，

p：$\mathscr{L}$の中の閉論理式，

$Th(S) = \{p : S \vdash p\}$,

$NAS1(S) = \{\sim p : \sim Mp \in S\}$,

$NAS2(S) = \{\sim Mp : \sim p \in S\}$,

$NAS(S) = NAS1(S) \cup NAS2(S)$,

$AS(S) = \{Mp : p \in \mathscr{L}$ かつ $\sim p \notin S$ かつ $\sim Mp \notin S\}$,

$NNM : 2^{\mathscr{L}} \rightarrow 2^{\mathscr{L}}$,

$NNM(S) = Th(A \cup AS(S) \cup NAS(S))$.

このとき，NNM(S)＝Sなる集合Sを，理論Aに対するオペレータNNMに関する<u>不動点</u>（fixed point）という．

注意：以後，単に不動点とは，オペレータNNMに関するものとする．

【定義2】

E_i（i=1,2,･･･）が理論Aに対するオペレータNNMに関する全ての不動点のとき，<u>証明可能な閉論理式の集合</u>TH(A)を次のように定義する．

$$TH(A) = \mathscr{L} \cap \{\cap_i E_i\}.$$

このとき，閉論理式pが理論Aから<u>証明可能</u>(provable)であるとは，$p \in TH(A)$であることである．また，理論Aに対する不動点が存在しないときは，$TH(A) = \mathscr{L}$である．簡単のために，$p \in TH(A)$を$A \underset{NM}{\vdash} p$で略記する．

注意：以後，“$\vdash$”は monotonic derivability，“$\underset{NM}{\vdash}$”は non-monotonic derivability を表すものとする．

【定義3】

理論Aが<u>無矛盾</u>(consistent)であるとは，理論Aに対するオペレータNNMに関する全ての不動点が無矛盾であることである．ここで，不動点が無矛盾であるとは，不動点Fと任意の閉論理式pに対して次の条件を満たすことである．

$$(\sim p \land p) \notin F.$$

また，理論Aに不動点が存在しないときは，理論Aは<u>矛盾</u>である．

【例１】　理論 $A=\{Mp\supset q,\ \sim q\}$．

この理論Aは無矛盾である．なぜなら，理論Aに対する不動点はただ１つ存在して，それをFとすれば，$\sim Mp\in F$であるが，$Mp\notin F$．したがって，$q\notin F$．これより，不動点Fは無矛盾である．すなわち，理論Aは無矛盾である．

【例２】　理論 $B=\{Mp,\ \sim p\}$．

この理論Bは矛盾である．なぜならば，オペレータは$\sim Mp$を導出する．

【例３】　理論 $C=\{\sim Mp,\ p\}$．

この理論Cは矛盾である．なぜならば，オペレータは$\sim p$を導出する．

このように，新しいオペレータは，従来の定式化における問題点を解決している．

３．　不動点に関するいくつかの結果

不動点は複数個存在するかもしれない．つまり，不完全な知識からの拡張はいくつか考えられる場合がある．

以下，不動点に関するいくつかの結果を与える．

【命題１】

任意の無矛盾な理論Aに対して，Aに対する不動点は存在する．

《証明》　定義２および定義３より，明らか．　■

【定理２】　(McDermott & Doyle)

$\mathcal{L}$：第一階言語（ただし，記号“M”を含む），

A：$\mathcal{L}$の中の理論，

E，F：Aに対する任意の不動点．

このとき，

$E\subseteq F \Longrightarrow E=F$．　■

McDermott と Doyle は任意の理論に対する証明を与えたが，理論が無矛盾なものに制限することによって，同様の結果が示せる．証明は以下の通りである．

《証明》　$p\notin E$かつ$p\in F$なる論理式pが存在すると仮定する．このとき，$M\sim p\in E$ かつ $\sim M\sim p\in F$ である．一方，$E\subseteq F$より，$M\sim p$，$\sim M\sim p\in F$．すなわち，Fは矛盾である．ところが，理論Aは無矛盾であるから，定義３から不動点Fは無矛盾でなければならない．したがって，$p\notin E$かつ$p\in F$なる論理式pは存在しない．　■

【補題３】

$\mathcal{L}$：第一階言語（ただし，記号“M”を含む），

A：$\mathcal{L}$の中の無矛盾な理論，

E，F：Aに対する異なる不動点．

このとき，次のような論理式pが存在する．

$p\in E$ かつ $\sim p\in F$．

《証明》　定理２と$E\neq F$であることから，$p\notin E$，$p\in F$かつ$q\in E$，$q\notin F$なる論理式p，q（$p\neq q$）が存在する．このとき，

(1)　qが$\sim p$のとき明らか．

(2)　qが$\sim p$でないとき，$p\notin E$より，$M\sim p\in E$．また，$p\in F$より$\sim M\sim p\in F$．

■

【定理4】

$\mathscr{L}$：第一階言語（ただし，記号“M”を含む），

A：$\mathscr{L}$の中の無矛盾な理論，

E，F：Aに対する異なる不動点．

このとき，

E∪Fは矛盾．

《証明》 理論Aは無矛盾であるから，定義3より，全ての不動点は無矛盾である．ところが，補題3より，E∪Fは矛盾である． ■

この定理4はいくつかの拡張が考えられるとき，それぞれの拡張はお互いに矛盾することを示すものである．

【例4】 理論 A＝{Mp⊃～q，Mq⊃～p}．

この理論Aに対する不動点は，2つ存在して，それらをEおよびFとすれば，

Mp，～Mq，～q∈E，

Mq，～Mp，～p∈F．

このとき，Mp，～Mp∈E∪Fより，E∪Fは矛盾．

ところで，定義2で証明可能な論理式を与えたが，述語論理の意味において証明可能な閉論理式は非単調論理においても証明可能であることが言える．このことは，任意の理論に対して保証される．

【定理5】

任意の理論Aと，閉論理式pに対して，

$$A\vdash p \Longrightarrow A \underset{NM}{\vdash} p.$$

《証明》 Th(A)⊆TH(A)を示せばよい．A＝ϕのとき，明らかである．したがって，A≠ϕのときを考える．

(1) 理論Aに対する不動点が存在するとき，定義1より，理論Aに対する任意の不動点F_iに対して，$Th(A)\subseteq F_i$であるから，定義2より，$Th(A)\subseteq \cap_i F_i = TH(A)$．

(2) 理論Aに対する不動点が存在しないとき，定義2より，TH(A)＝$\mathscr{L}$．したがって，$Th(A)\subseteq \mathscr{L} = TH(A)$． ■

以上の考察から，任意の無矛盾な理論に対する任意の不動点F_iとF_j（ただし，i＝jでもよい）に対して以下のような関係が示されたことになる．

(1) $F_i \cap F_j \neq \phi$，

(2) F_i（またはF_j）がF_j（またはF_i）に真に含まれることはない．

4. モデル理論

新しい定式化におけるモデル理論を考える．まず，記号“M”を含む第一階言語$\mathscr{L}$の解釈（interpretation）を与える．記号“M”の付いていない論理式の解釈は通常の述語論理における解釈と同じであるので，省略する．したがって，Mp形式の論理式に対する解釈のみ与える．

【定義４】

理論Ａが与えられたとき，理論Ａの不動点Ｆに対して，

$\mathbf{I}(Mp)=1$,　　（$\sim p \notin F$のとき）

$\mathbf{I}(Mp)=0$.　　（その他）

【定義５】

理論Ａのモデルは，対＜Ｅ，$\mathbf{I}$＞である．ここで，ＥはＡに対するオペレータＮＮＭに関する不動点で，$\mathbf{I}$はＥのモデルである．ここで，不動点Ｅのモデルは，通常の一階述語論理における解釈と定義４によって，Ｅの任意の閉論理式ｐに対して，$\mathbf{I}(p)=1$なる解釈$\mathbf{I}$の集合である．

【定義６】

Ａ：理論，

E_i $(i=1,\cdots)$：Ａに対する全ての不動点．

このとき，

$A \models_{NM} p$

$\overset{}{\underset{def.}{\Longleftrightarrow}} \mathbf{I}_i(p)=1$　(for all $<E_i, \mathbf{I}_i>$ of A).

【補題６】

Ａ：無矛盾な理論，

E_i $(i=1,\cdots)$：Ａに対する全ての不動点，

$<E_i, \mathbf{I}_i>$：Ａのモデル．

このとき，任意のｉ，ｊに対して，

$E_i \neq E_j \Longrightarrow \mathbf{I}_i \neq \mathbf{I}_j$.

《証明》　$\mathbf{I}_i=\mathbf{I}_j$とする．このとき，$\mathbf{I}_i$は$E_j$のモデルでもある．よって，$\mathbf{I}_i$は$E_i \cup E_j$のモデルである．ところで，定理４から $E_i \neq E_j$とすると，$E_i \cup E_j$は矛盾であるから$E_i \cup E_j$のモデルは存在しない．したがって，$E_i=E_j$でなければならない．　■

この補題６から次の定理７が証明できる．

【定理７】

Ａ：理論．

このとき，

$A \models_{NM} p \Longrightarrow A \vdash_{NM} p$.　　■

５．　不動点の非決定性

オペレータＮＮＭは不完全な知識と実世界とのギャップを少しでも埋めるために導入された．ところで，与えられた理論に対して，オペレータに関する不動点は非決定的であるから，システムとして実現する際には問題になる．

【例5】

$\forall X(\mathrm{night\_student}(X) \supset \mathrm{student}(X))$,

$\forall X(\mathrm{student}(X) \wedge M\mathrm{full\_time}(X) \supset \mathrm{full\_time}(X))$,

$\forall X(\mathrm{night\_student}(X) \wedge M{\sim}\mathrm{full\_time}(X) \supset {\sim}\mathrm{full\_time}(X))$,

$\mathrm{night\_student}(\mathrm{John})$.

この理論に対する不動点は２つ存在し，それらをＥおよびＦとすると，

$\mathrm{night\_student}(\mathrm{John}),\ \mathrm{student}(\mathrm{John}),\ \mathrm{full\_time}(\mathrm{John}) \in E$,

$\mathrm{night\_student}(\mathrm{John}),\ \mathrm{student}(\mathrm{John}),\ {\sim}\mathrm{full\_time}(\mathrm{John}) \in F$.

このとき，full_time(John) および ～full_time(John) は定義２から証明可能ではない．ところで，John が full_time であるのか ～full_time であるのかは非決定的であるので，どちらの不動点を選択するかが問題になる．

例えば，ネットワークで表現することを考えてみよう．

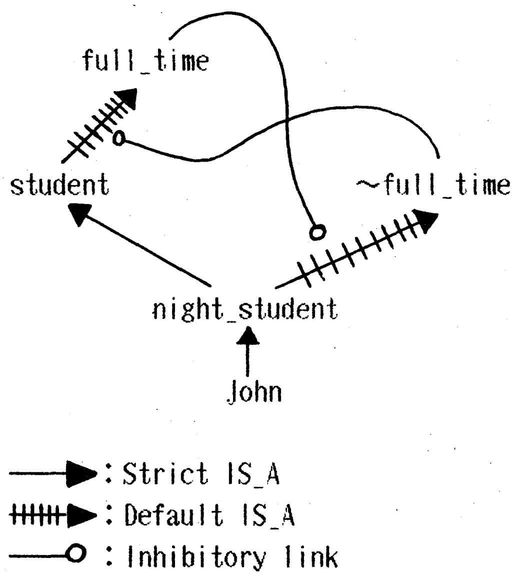


図２　ネットワーク表現

この場合，パスの長さから John に近い ～full_time が選択されるであろう．しかしながら，この考えは必ずしも正しいとは限らない．したがって，システムでの実現においては，不動点の非決定性は重要な問題である．

６．　おわりに

本稿では非単調論理の無矛盾性に関する問題を考えてきた．従来の定式化ではオペレータによって理論が拡張されると矛盾が生じるようなものが数多く存在するので，拡張しても無矛盾性を保つようにすることを考えた．しかしながら，拡張の存在は必ずしも任意の理論に対して保証されないので，さらに考察する必要がある．

ところで，システムとしての実現に関していくつかの問題がある．５．で述べたように不動点の非決定性は勿論のことであるが，最も重要な問題の一つは，決定問題であろう．したがって，この問題も考えなければならない．

参考文献

[1] McDermott,D. and Doyle,J., Non-Monotonic Logic I, Artificial Intelligence, 13(1980),41-72.

[2] Reiter,R.,A logic for Default Reasoning, Artificial Intelligence 13(1980), 81-132.

[3] Reiter,R. and Criscuolo,G.,Some Representatinal Issues in Default Reasoning, Comp. & Maths. with Appls. 9(1983),15-27.

[4] Moore,R.C., Semantical Considerations on Nonmonotonic Logic, Artificial Intelligence 25(1985),75-94.

[5] Lyndon ,R.C., Notes on Logic (Van Nostrand, New York, 1964).