数理解析研究所講究録
第 591 巻 1986 年 257-267

有限生成半群と正則言語の pumping 条件

豊橋技科大　情報工学系　橋口　攻三郎
(K. Hashiguchi)

あらまし：　正則性と等価な色々なpumping条件が知られている。　pumping条件に現われる(for all $i \geqq 0$)を，(for all $i \geqq 1$)(又は$i=0$)に置き換えた条件は，正pumping条件(又は消去条件)と呼ばれる。　有限生成半群が有限であるための条件より，正則性と等価な正pumping条件が存在する事が知られている。　本稿では有限生成半群が有限であるための Luca-Restivo の条件の十分性の別証明と，正pumping条件と，対応する消去条件の相違について，得られた結果を紹介する。

1．正則言語に関するpumping条件

Σを有限アルファベットとし，$L \subset \Sigma^*$とする。　λを空語とする。　$u, v, w, x \in \Sigma^*$とし，$x = uvw$とする。　この時，vはLに関して，uとwの間のxのpumpである

$\Leftrightarrow$ $v \neq \lambda$ かつ ($xyz \in L$ iff $uv^iw \in L$ for all $i \geq 0$) という。 $i \geq 0$ の代わりに, $i \geq 1$ (又は $i=0$) が成立する時, vは正のpump (又は消去lump) という。 pumpに関する条件がpumping条件であり, 又各pumping条件に対して対応する正pumpと消去lumpに関する条件を, それぞれ正pumping条件, 消去条件という。

正整数mと語yに対して, $D(y, m) = \{(y_1, \cdots, y_m) \mid y = y_1 \cdots y_m$ かつ $y_i \neq \lambda$ for all $i\}$ とおく。 正則言語に関するpumping条件は, 二つの型$\exists$一型と$\forall$一型に分類される。 次の条件は$\exists$一型の例である。 ($\ell(y)$はyの長さ)

$C_1(\exists, i \geq 0)$: ある正整数mが存在して, 任意の語x, y, z (但し$\ell(y) \geq m$) に対して, ある$(y_1, \cdots, y_m) \in D(y, m)$と$j, k$ $(1 \leq j \leq k \leq m)$ が存在して, $y_j \cdots y_k$はLに関して, $xy_1 \cdots y_{j-1}$と$y_{k+1} \cdots y_m z$の間のxyzのpumpである。□

次の条件は$\forall$一型の例であり, $C_1(\exists, i \geq 0)$ に対応する。

$C_1(\forall, i \geq 0)$: ある正整数mが存在して, 任意の語x, y, z (但し$\ell(y) \geq m$) に対して, 次が成立する: 任意の$(y_1, \cdots, y_m) \in D(y, m)$に対して, ある$j, k$ $(1 \leq j \leq k \leq m)$ が存在して, $y_j \cdots y_k$はLに関する$xy_1 \cdots y_{j-1}$と$y_{k+1} \cdots y_m z$の間のxyzのpumpである。□

∀－型は[1]に於いて導入され，次の定理が証明された。ここで $\aleph$ は実数の濃度を表わす。

定理1（[1]）． $C_1(\forall, i \geqq 0)$ と $C_1(\forall, i=0)$ は，いづれも正則性と等価である。しかし，$C_1(\exists, i \geqq 0)$ を満足する $\aleph$ 個の言語が存在する。従って $C_1(\exists, i \geqq 0)$ を満足する再帰的可算でない言語が存在する。□

[2]に於いて，次の条件と正則性の等価性が証明された。

$C_2(\exists, i \geqq 0)$： ある正整数 m が存在して，任意の語 y（但し $\ell(y) \geqq m$）に対して，ある $(y_1, \cdots, y_m) \in D(y, m)$ と $j, k\ (1 \leqq j \leqq k \leqq m)$ が存在して，任意の語 x, z に対し，$y_j \cdots y_k$ は L に関する $xy_1 \cdots y_{j-1}$ とその間の，$xy_1 \cdots y_k z$ の pump である。□

Luca-Restivo[3]は，$C_2(\forall, i \geqq 1)$ と正則性の等価性を示した。これは，有限生成半群に関する彼等の定理（次節の定理5）の系として得られた。

2．有限生成半群が有限であるための十分性の別証明

有限生成半群 $\mathcal{S}$ とは，Σ^* 上のある合同関係 $\sim$ に対して，$\mathcal{S} = \Sigma^*/\sim = \{[v] \mid v \in \Sigma^*$ かつ $[v]$ は $w \sim v$ である語 w の集合$\}$ と表わされる半群である。ここで $\mathcal{S}$ の二項演算・は，語 v, w に対して $[v]\cdot[w]=[vw]$ と定義される。

有限生成半群が有限（即ち，有限個の元を持つ）であるための条件を，次の三つの定理は与える。

定理3（[4]）．　Sを有限生成半群とし，その部分群はすべて有限群とする。　もしSが単項右イデアルに関する極小条件を満足するならば，Sは有限である。□

定理4（[5]）．　有限生成半群Sに対して，次の三条件は等価である。　(1) Sは有限である。　(2) Sは高々有限個の非冪等元をもつ。　(3) ある正整数mが存在して，任意の系列$(t_1, \cdots, t_m) \in S^m$に対して，$j, k$ $(1 \leqq j \leqq k \leqq m)$が存在して，$t_j \cdots t_k$は冪等元である，即ち$t_j \cdots t_k = (t_j \cdots t_k)^2$。□

定理5（[3]）．　有限生成半群Sに対して，次の二条件は等価である。　(1) Sは有限である。　(2) ある正整数mが存在して，任意の系列$(t_1, \cdots, t_m) \in S^m$に対して，$j, k$ $(1 \leqq j \leqq k \leqq m)$が存在して，$t_1 \cdots t_k = t_1 \cdots t_{j-1} (t_j \cdots t_k)^2$が成立する。□

定理5より，$C_2(\forall, i \geqq 1)$と正則性の等価性は，言語の構文半群を考える事によって容易に示される。[5]に於ける定理4の(3) ⇒ (1)の証明並びに[3]に於ける定理5の(2) ⇒ (1)の証明は，定理3を使っている。　定理5の(2) ⇒ (1)の別証明（定理3に依存しない）（これは定理4の(3) ⇒ (1)の証明にもなる）を得たので，これを簡単に紹介する（詳細は[7]）。

$\sim$をΣ^*上の任意の合同関係とする。$w \in \Sigma^*$とする。$\Sigma(w)$をwに現われるΣの元の集合とする。#Aは集合Aの濃度を表わす。$Sub(w) = \{ y \in \Sigma^* \mid$ ある語x, zに対して$w = xyz$かつ$xz \neq \lambda \}$とおく。m, nを正整数とする。この時，wは$\sim$に関して系列的に(m, n)右周期的である $\Leftrightarrow$ $\#\Sigma(w) = n$, かつ任意の語$x, y_1, \cdots, y_m, z$に対して，もし$w = xy_1 \cdots y_m z$ならば，j, k $(1 \leqq j \leqq k \leqq m)$が存在して $y_1 \cdots y_k \sim y_1 \cdots y_{j-1} (y_j \cdots y_k)^2$ が成立する。□ という。又

語wは($\sim$に関して)系列的に既約である $\Leftrightarrow$ 任意の語$u_0, v_0, \cdots, u_n, v_n, u_{n+1}$ $(n \geqq 0)$に対して，$w = u_0 v_0 \cdots u_n v_n u_{n+1}$かつ$u_0 u_1 \cdots u_{n+1} \neq \lambda$ならば $w \not\sim v_0 v_1 \cdots v_n$である。ここで$\not\sim$は$\sim$の否定である。□

という。又正整数$I(m, n)$を次式で定義する。

(1) $I(1,1) = 1$; $I(1,n) = (I(1,n-1)+1)(n^{I(1,n-1)+1}+1)$;

(2) $I(m,1) = 2m-1$; $I(m,n) = K(mn^K + 1)$, 但し

$$K = m(I(m,n-1)+1)(I(m-1, n^{I(m,n-1)+1})+3).$$

次の定理が成立する。

定理6. m, nを正整数, $w \in \Sigma^*$, $\#\Sigma(w) = n$とする。もし$\ell(w) > I(m,n)$かつwが$\sim$に関して系列的に右周期的ならば，wは系列的に既約でない。□

以下において，定理6の証明について述べる。証明は(m, n)に関する帰納法による。ある$v \in Sub(w)$が存在して，vが系列的に既約でない時，wが系列的に既約でない事は明らかなので，そうでない場合を考える。次の二つの補題が成立する。

補題1. ある語s, t, uに対して$w = stu$とする。任意の語y', vと$a \in \Sigma(u)$（但し$u = y'av$）に対して，ある語p, qが存在して，$t = paq$かつ$paqy' \sim p(aqy')^2$が成立するとする。この時任意の語y, v（但し$u = yv$）に対してある語zが存在して，$t \sim tyz$が成立する。

（証明）. $l(y)$に関する帰納法による。$l(y) = 0$の時明らか。$y = y'a$, $a \in \Sigma$とする。仮定よりある語p, qに対して，$t = paq$かつ$paqy' \sim p(aqy')^2$。帰納法の仮定より，ある語z'に対して，$t \sim ty'z'$。そこで$z = qy'z'$とおけば，$tyz = paqy'aqy'z'$ $\sim paqy'z' = ty'z' \sim t$。□

補題2. もし$p \in Sub(w)$かつ$l(p) \geqq (I(m, n-1)+1)(I(m-1, n^{I(m, n-1)+1})+3)$ならば，任意の$a \in \Sigma(w)$と語$y$（但し$py \in Sub(w)$）に対して，ある語$s, t$が存在して，$p = sat$かつ$saty \sim s(aty)^2$が成立する。□

補題2の証明は省略する([7]参照)。 定理6の証明について述べる。 $m=n=1$ の時, $\Sigma(w)=\{0\}$, $w=00v$, $v\in 0^*$ とすると, $0\sim 00$ であり, $w\sim 0v$ となって証明できた。 $m=1$, $n>1$ とする。補題1より次の系が成立する。

系. ある語 s, x, y, u に対して $w=sxyu$ とする。もし $\Sigma(x)\supset\Sigma(y)$ ならば, ある語 z が存在して, $x\sim xyz$ が成立する。□

$m=1$, $n>1$ の場合の証明は次の通り。 $\ell(w)>I(1,n)$ なので, ある語 s, p, u, t に対して, $\ell(p)=I(1,n-1)+1$, $w=spupt$ が成立する。 p は系列的に既約なので, 帰納法の仮定より $\Sigma(p)=\Sigma(w)$。 系より, ある語 z に対して $p\sim pupz$。 従って $w=spupt\sim spup\cdot pt\sim spup\cdot pupzt\sim spupzt\sim spt$。 よって証明された。 $m>1$, $n=1$ の場合。 この時, ある $v\in 0^*$ に対して $w=0^{2m}v$ となり, $x=\lambda$, $y_1=\cdots=y_m=0$, $z=0^m v$ とおくと, ある j, k $(1\leqq j\leqq k\leqq m)$ が存在して, $0^k\sim 0^k\cdot 0^{k-j+1}$。 従って $w\sim 0^{2m-(k-j+1)}v$ となって証明される。 最後に $m>1$, $n>1$ の場合。 この時, ある語 s, p, q, u, t が存在して, $w=spqupqt$, $spqup\sim sp(qup)^2$, $pq\sim pq^2$, かつ $\ell(q)\geqq$

$(I(m,n-1)+1)(I(m-1,n^{I(m,n-1)+1})+3)$ が成立する。補題1,2よりある語 v が存在して，$qupqv \sim q$。従って $w = spqupqt \sim spqupq \cdot qt \sim spqupq \cdot qupqvt \sim spqupqupqvt \sim spqupqvt \sim spqt$。これによって定理6の証明が完結する。□

定理6が，定理5の(2)⇒(1) 並びに定理4の(3)⇒(1) を包含する事は明らかであろう。

3．正pumping条件と消去条件

定理1は，∃－型と対応する∀－型のpumping条件の相違を述べている。この節では，正pumping条件と対応する消去条件の相違について得られた結果を紹介する。定理4([5])より，次のpumping条件を考える。

$C_3(\forall, i \geqq 0)$ ： ある正整数 m が存在して，任意の語 y (但し $l(y) \geqq m$) に対して，次が成立する： 任意の $(y_1, \cdots, y_m) \in D(y, m)$ に対して，j, k $(1 \leqq j \leqq k \leqq m)$ が存在して，任意の語 x, z に対して，$y_j \cdots y_k$ は L に関する x と z の間の $xy_j \cdots y_kz$ の pump である。□

次の定理を得た。但し(1)の前半は[3]による。

定理7. (1) $C_2(\forall, i \geqq 1)$ と $C_2(\forall, i=0)$ は，いずれも

正則性と等価である。 (2) $C_3(\forall, i \geqq 1)$ は正則性と等価であるが, $C_3(\forall, i=0)$ は正則性より強い。 (3) $C_2(\exists, i=0)$ と $C_3(\exists, i=0)$ はいづれも正則性と等価であるが, $C_2(\exists, i\geqq 1)$ と $C_3(\exists, i\geqq 1)$ を満たす言語は, それぞれ $\aleph$ 個存在する。

従って, これらを満たすが, 再帰的可算でない言語が, それぞれ存在する。□

(3)の後半の証明は, $\Sigma = \{a, b\}$ に対して, f を Σ^* から Σ の上の言語の族への代入として, $f(a) = a^+b^+a^+$, $f(b) = b^+a^+b^+$ と定義する。 f は, Σ の上の言語の族へと定義域が拡張されて, ここで1対1であり, 又任意の $L \subset \Sigma^*$ に対して, $f(L)$ は $C_2(\exists, i\geqq 1)$ と $C_3(\exists, i\geqq 1)$ を $m=2$ に対して満足する。 他の証明は省略する。

最後に, 次の pumping 条件を考える。

$C_4(\exists, i\geqq 0)$: ある正整数 m が存在して, 任意の語 y (但し $l(y) \geqq m$) に対して, $(y_1, \cdots, y_m) \in D(y, m)$ と j, k $(1 \leqq j \leqq k \leqq m)$ が存在して, $y_j \cdots y_k$ は, L に関する $y_1 \cdots y_{j-1}$ と $y_{k+1} \cdots y_m$ の間の y の pump である。□

次の定理を得た。

定理8. (1) $C_4(\exists, i=0)$ は $C_1(\exists, i=0)$ より弱い。 (2) $C_4(\exists, i=0)$ は, $C_4(\exists, i\geqq 0)$ より弱い。 従って, $C_4(\exists, i=0)$ を満たすが, $C_4(\exists, i\geqq 1)$ を満たさない言語が

存在する。 (3) すべての正則言語は $C_4(\forall, i \geq 0)$ を満足するが，$C_4(\exists, i=0)$ を満足しない文脈自由言語が存在する。

(4) $\Sigma=\{a\}$ 上の言語 L が，$C_4(\forall, i=0)$ を $m \leq 2$ に対して満足するなら，L は正則である。□

定理8の説明。 $\Sigma=\{a, b, c\}$ とおく。 まず $L_1=\{a^p \mid p$ は素数$\}$ とおくと，L_1 は $C_4(\exists, i=0)$ を満たすが，$C_1(\exists, i=0)$ を満たさない。 L_1 は又 $C_4(\exists, i \geq 0)$ も満たさない。 次に $L_2=\{a^n c b^n \mid n \geq 0\}$ とおくと，L_2 は，$C_4(\exists, i=0)$ を満たさない文脈自由言語である。 (4)並びに詳しい証明は省略する（[7] 参照）。

最後に，次の未解決問題を述べて，稿を終る。

問題1. 正則性より弱い $\forall$ー型の pumping 条件が存在するか。 例えば $C_4(\forall, i \geq 0)$ は正則性より弱いか。

問題2. $C_4(\forall, i \geq 0)$ と $C_4(\forall, i=0)$ は等価か。

問題3. $C_2(\forall, i \geq 1)$ と $C_3(\forall, i \geq 1)$ は，明らかにそれぞれ $C_2(\forall, i=2)$ と $C_3(\forall, i=2)$ に等価である。 ここで pumping 条件 $C(\forall, i \geq 0)$ に対して，$C(\forall, i=2)$ は (for all $i \geq 0$) を，$(i=2)$ によって置き換えた条件である。問題は，正則性と等価でかつ $C(\forall, i=2)$ よりは強い正 pumping 条件 $C(\forall, i \geq 1)$ が存在するか。□

参考文献

[1] A. Ehrenfeucht, R. Parikh and G. Rozenberg, Pumping lemmas for regular sets, SIAM J. Comput. 10 (1981), 536-541.

[2] D. F. Stanat and S. F. Weiss, A pumping theorem for regular languages, Sigact News 14 (1982), 36-37.

[3] A. de Luca and A. Restivo, A finiteness condition for finitely generated semigroups, Semigroup Forum, 28 (1984), 123-134.

[4] E. Hotzel, On finiteness conditions in semigroups, J. of Algebra, 60 (1979), 352-370.

[5] I. Simon, Conditions de finitude pour des semigroupes, C. R. Acad. Sci. Paris, 290A (1980), 1081-1082.

[6] J. A. Green and D. Rees, On semigroups in which $x^r = x$, Mat. Proc. Cambridge Phil. Soc. 48 (1952), 35-40.

[7] K. Hashiguchi, Notes on finitely generated semigroups and pumping conditions about regular languages, submitted to T.C.S.