数理解析研究所講究録
第 592 巻 1986 年 76-96

On the Fourier-Borel transformations of analytic functionals on the complex sphere

上智大理工　和田涼子（ Ryoko Wada ）

$\mathcal{O}(\mathbb{C}^{d+1})$, $\mathrm{Exp}(\mathbb{C}^{d+1})$ を各々 $\mathbb{C}^{d+1}$ 上の整函数の空間および指数型整函数の空間とし，$\mathcal{O}'(\mathbb{C}^{d+1})$, $\mathrm{Exp}'(\mathbb{C}^{d+1})$ をそれらの双対空間とする。 $T \in \mathrm{Exp}'(\mathbb{C}^{d+1})$ について Fourier-Borel 変換 P_λ は $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z \in \mathbb{C}^{d+1}$ のとき次のように定義される（[2]）：

$$P_\lambda T(z) = \langle T_\xi, \exp(i\lambda \xi \cdot z) \rangle .$$

Martineau [4] は P_λ による $\mathrm{Exp}'(\mathbb{C}^{d+1})$ やその他のいくつかの $\mathbb{C}^{d+1}$ 上の汎函数の空間の像を決定した。

$S = S^d$ を $\mathbb{R}^{d+1}$ 上の単位球面，$\tilde{S}$ を $\mathbb{C}^{d+1}$ 上の複素球面 $\{ z \in \mathbb{C}^{d+1} ; \sum_{j=1}^{d+1} z_j^2 = 1 \}$ とする。 $L(z)$ を $\mathbb{C}^{d+1}$ 上の Lie norm とし $\tilde{S}(r) = \{ z \in \tilde{S} ; L(z) < r \}$, $\tilde{S}[r] = \{ z \in \tilde{S} ; L(z) \le r \}$ とおく。$\mathcal{O}(\tilde{S}(r))$, $\mathcal{O}(\tilde{S}[r])$ で各々 $\tilde{S}(r)$, $\tilde{S}[r]$ で正則な函数の空間を表わし，$\mathrm{Exp}(\tilde{S}) = \mathrm{Exp}(\mathbb{C}^{d+1})|_{\tilde{S}}$

とおく。 $\mathrm{Exp}'(\tilde{S})$は $\mathrm{Exp}'(\mathbb{C}^{d+1})$の部分空間とみなせる。Morimoto [7]は $\mathcal{P}_\lambda$ による $\mathrm{Exp}'(\tilde{S})$ および $\mathcal{O}'(\tilde{S})$の像を決定した(定理1.2 参照)。 ここでは$\mathcal{P}_\lambda$による $\mathcal{O}'(\tilde{S}(r))$, $\mathcal{O}'(\tilde{S}[r])$ の像についてのべる(定理3.1)。

次に complex cone $M = \{z \in \mathbb{C}^{d+1} \setminus \{0\} ; \sum_{j=1}^{d+1} z_j^2 = 0\}$ を考える。$f' \in \mathrm{Exp}'(\tilde{S})$ について

$$Ff'(z) = \langle f'_\zeta , \exp(\zeta \cdot z) \rangle$$

とおく。あきらかに $Ff' = \mathcal{P}_{-i} f'|_M$ である。 Ii [3]は $(d+1)$次元n次の球面調和函数の空間のFによる像を決定し, さらにdが偶数の場合の$L^2(S)$のFによる像を特徴づけた。ここではdが奇数の場合の$L^2(S)$のFによる像を決定し(定理2.2), $\mathrm{Exp}'(\tilde{S})$ および その部分空間の像も決める(定理2.1).

§1. 準備

dを2以上の自然数とする. $z = (z_1, z_2, \cdots, z_{d+1})$, $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_{d+1}) \in \mathbb{C}^{d+1}$ について

$$z \cdot \zeta = \sum_{j=1}^{d+1} z_j \zeta_j ,$$

$$\|z\| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

とおく。 $S = S^d$ を R^{d+1} 上の単位球面とし, ds を S 上の Haar 測度で $\int_S 1\, ds = 1$ となるものとする。さらに

$$\langle f, g \rangle_S = \int_S f(s)\overline{g(s)}\, ds ,$$

$$\| f \|_2 = \langle f, f \rangle_S^{1/2}$$

とする。 $\mathbb{H}_{n,d}$ で $(d+1)$ 次元 n 次の球面調和函数の全体を表わす。球面調和函数については Müller [8] を参照。

$\mathbb{C}^{d+1}$ 上の Lie ノルム $L(z)$ と双対 Lie ノルム $L^*(z)$ は次のように定義される: $z = x + iy$, $x, y \in R^{d+1}$ のとき

$$L(z) = L(x+iy)$$
$$= [\|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\{\|x\|^2\|y\|^2 - (x\cdot y)^2\}^{1/2}]^{1/2},$$

$$L^*(z) = L^*(x+iy) = \sup\{|\xi\cdot z| \,;\, L(\xi) \leq 1\}$$

$$= (1/2)[\|x\|^2 + \|y\|^2 + \{(\|x\|^2 - \|y\|^2)^2 + 4(x\cdot y)^2\}^{1/2}]^{1/2},$$

([1] 参照)。半径 r の開 Lie 球および閉 Lie 球を各々

$$\tilde{B}(r) = \{ z \in \mathbb{C}^{d+1} \,;\, L(z) < r \} \quad (0 < r \leq \infty),$$

$$\tilde{B}[r] = \{ z \in \mathbb{C}^{d+1} \,;\, L(z) \leq r \} \quad (0 \leq r < \infty)$$

と書き $\mathcal{O}(\widetilde{B}(r))$ で $\widetilde{B}(r)$ 上の正則函数の全体を表わす。
$\mathcal{O}(\widetilde{B}(r))$ は 広義一様収束の位相を入れると FS空間になる。
$\mathcal{O}(\widetilde{B}(\infty)) = \mathcal{O}(\mathbb{C}^{d+1})$ は $\mathbb{C}^{d+1}$ 上 の整函数の全体である。さらに

$$\mathcal{O}(\widetilde{B}[r]) = \operatorname*{ind\,lim}_{r'>r} \mathcal{O}(\widetilde{B}(r'))$$

と定義すると $\mathcal{O}(\widetilde{B}[r])$ は DFS 空間になる。

ρ を $\mathbb{C}^{d+1}$ 上の任意のノルムとする。$r>0$ について

$$X_{r,\rho} = \{ f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^{d+1})\,;\ \sup_{z\in\mathbb{C}^{d+1}} |f(z)| \exp(-r\rho(z)) < \infty \}$$

とおくと $X_{r,\rho}$ はノルム $\|f\|_{r,\rho} = \sup_{z\in\mathbb{C}^{d+1}} |f(z)| \exp(-r\rho(z))$ について Banach空間になる。ここで

$$\mathrm{Exp}(\mathbb{C}^{d+1} : (r:\rho)) = \operatorname*{proj\,lim}_{r'>r} X_{r',\rho} \qquad (0 \leq r < \infty)$$

$$\mathrm{Exp}(\mathbb{C}^{d+1} : [r:\rho]) = \operatorname*{ind\,lim}_{r'<r} X_{r',\rho} \qquad (0 < r \leq \infty)$$

とおくと $\mathrm{Exp}(\mathbb{C}^{d+1} : (r:\rho))$ は FS 空間で $\mathrm{Exp}(\mathbb{C}^{d+1} : [r:\rho])$ は DFS 空間である。$\mathrm{Exp}(\mathbb{C}^{d+1}) = \mathrm{Exp}(\mathbb{C}^{d+1} : [\infty:\rho])$ を指数型整函数の全体とよぶ（あきらかに ρ によらない）.
$\mathrm{Exp}'(\mathbb{C}^{d+1})$, $\mathcal{O}'(\widetilde{B}(r))$, $\mathcal{O}'(\widetilde{B}[r])$ で各々 $\mathrm{Exp}(\mathbb{C}^{d+1})$, $\mathcal{O}(\widetilde{B}(r))$, $\mathcal{O}(\widetilde{B}[r])$ の双対空間を表わす。

次に$\widetilde{S}$で$\mathbb{C}^{d+1}$上の複素球面を表わす。すなわち

$$\widetilde{S} = \{ z \in \mathbb{C}^{d+1};\ z^2 = 1 \},$$

ここで $z^2 = \sum_{j=1}^{d+1} z_j^2$ とする。さらに

$$\widetilde{S}(r) = \widetilde{B}(r) \cap \widetilde{S} \qquad (1 < r \leq \infty)$$

$$\widetilde{S}[r] = \widetilde{B}[r] \cap \widetilde{S} \qquad (1 \leq r < \infty)$$

とおく。（あきらかに $S = \widetilde{S} \cap \mathbb{R}^{d+1} = \widetilde{S}[1]$, $\widetilde{S} = \widetilde{S}(\infty)$ である。）$\mathcal{O}(\widetilde{S}(r))$を$\widetilde{S}(r)$上の正則函数の全体とし，広義一様収束の位相を入れる。

$$\mathcal{O}(\widetilde{S}[r]) = \operatorname*{ind\,lim}_{r' > r} \mathcal{O}(\widetilde{S}(r'))$$

と定義すると $\mathcal{O}(\widetilde{S}(r))$はFS空間，$\mathcal{O}(\widetilde{S}[r])$はDFS空間になる。$\mathcal{O}(\widetilde{S}[1]) = \mathcal{O}(S)$はS上の実解析函数の全体である。$\mathrm{Exp}(\widetilde{S})$で$\mathrm{Exp}(\mathbb{C}^{d+1})$の$\widetilde{S}$上への制限を表わす。$\mathcal{O}'(\widetilde{S}(r))$, $\mathcal{O}'(\widetilde{S}[r])$, $\mathrm{Exp}'(\widetilde{S})$で各々$\mathcal{O}(\widetilde{S}(r))$, $\mathcal{O}(\widetilde{S}[r])$, $\mathrm{Exp}(\widetilde{S})$の双対空間を表わすと次の包含関係が成り立つ：

(1.1) $$\mathrm{Exp}'(\widetilde{S}) \supset \mathcal{O}'(\widetilde{S}) \supset \mathcal{O}'(\widetilde{S}[r]) \supset \mathcal{O}'(\widetilde{S}(r)) \supset \mathcal{O}'(S)$$

$$\supset L^2(S) \supset \mathcal{O}(S) \supset \mathcal{O}(\widetilde{S}(r)) \supset \mathcal{O}(\widetilde{S}[r]) \supset \mathcal{O}(\widetilde{S}) \supset \mathrm{Exp}(\widetilde{S}).$$

S上の函数(超函数) fについて f_nでfのn次球面調和成分を表わす. すなわち

(1.2) $$f_n(s) = N(n,d) < f, P_{n,d}(\cdot s) > \quad (s \in S),$$

ここで $N(n,d)$は$\mathbb{H}_{n,d}$の次元を表わす:

(1.3) $$N(n,d) = \frac{(2n+d-1)(n+d-2)!}{n!\,(d-1)!}$$

また $P_{n,d}$は$(d+1)$次元n次のLegendre多項式である. つまり 固定された$\alpha \in S$について

$$L_n(x) = \|x\|^n P_{n,d}\left(\alpha \cdot \frac{x}{\|x\|}\right) \quad (x \in \mathbb{R}^{d+1})$$

とおくと L_nは

(1.4) $A\alpha = \alpha$なる$A \in O(d+1)$について $L_n(Ax) = L_n(x)$,

(1.5) $L_n(\alpha) = 1$

をみたす 唯一のn次同次調和多項式である。

f_nは$\mathbb{H}_{n,d}$の元で (1.1)の空間は 数列$\{\|f_n\|_2\}_{n=0,1,2\cdots}$の増大度によって 特徴づけられる.

<u>補題1.1</u> ([7] Theorem 5.1, 6.1)

$$(1.6)\qquad f\in \mathrm{Exp}'(\widetilde{S}) \iff \overline{\lim_{n\to\infty}}\,(\|f_n\|_2/n!)^{1/n}=0,$$

$$(1.7)\qquad f\in \mathcal{O}'(\widetilde{S}) \iff \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\|f_n\|_2^{1/n}<\infty,$$

$$(1.8)\qquad f\in \mathcal{O}'(\widetilde{S}[r]) \iff \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\|f_n\|_2^{1/n}\le r\quad(1\le r<\infty),$$

$$(1.9)\qquad f\in \mathcal{O}'(\widetilde{S}(r)) \iff \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\|f_n\|_2^{1/n}<r\quad(1<r\le\infty),$$

$$(1.10)\qquad f\in L^2(S) \iff \{\|f_n\|_2\}_{n=0,1,2\cdots}\in \ell^2,$$

$$(1.11)\qquad f\in \mathcal{O}(\widetilde{S}(r)) \iff \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\|f_n\|_2^{1/n}\le 1/r\quad(1<r\le\infty),$$

$$(1.12)\qquad f\in \mathcal{O}(\widetilde{S}[r]) \iff \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\|f_n\|_2^{1/n}<1/r\quad(1\le r<\infty),$$

$$(1.13)\qquad f\in \mathcal{O}(\widetilde{S}) \iff \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\|f_n\|_2^{1/n}=0,$$

$$(1.14)\qquad f\in \mathrm{Exp}(\widetilde{S}) \iff \overline{\lim_{n\to\infty}}\,(n!\,\|f_n\|_2)^{1/n}<\infty.$$

$T\in \mathrm{Exp}'(\mathbb{C}^{d+1})$ のとき Fourier-Borel変換$\mathcal{P}_\lambda$は 次のように定義される:

$$\mathcal{P}_\lambda T(z)=\langle T_\zeta,\exp(i\lambda\zeta\cdot z)\rangle\qquad(z\in\mathbb{C}^{d+1}),$$

ここで λは0でない 固定された複素数である。$\mathrm{Exp}'(\widetilde{S})$は $\mathrm{Exp}'(\mathbb{C}^{d+1})$ の部分空間とみなされるから $\mathrm{Exp}'(\widetilde{S})$上の Fourier-Borel 変換は同様に定義される。 次のことが知ら

れている。

定理1.2（Morimoto [7] Theorem 7.1） 次の写像は位相同型である：

$$(1.15)\qquad \mathcal{P}_\lambda : \mathrm{Exp}'(\tilde{S}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_\lambda(\mathbb{C}^{d+1}),$$

$$(1.16)\qquad \mathcal{P}_\lambda : \mathcal{O}'(\tilde{S}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Exp}_\lambda(\mathbb{C}^{d+1}).$$

ここで $\mathcal{O}_\lambda(\mathbb{C}^{d+1}) = \{F \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^{d+1})\ ;\ (\Delta_z + \lambda^2)F(z) = 0\}$,

$$\mathrm{Exp}(\mathbb{C}^{d+1}) = \mathrm{Exp}(\mathbb{C}^{d+1}) \cap \mathcal{O}_\lambda(\mathbb{C}^{d+1}),$$

$$\Delta_z = \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial z_{d+1}^2}$$

とおく。

次に complex cone $M = \{z \in \mathbb{C}^{d+1}\setminus\{0\}\ ;\ z^2 = 0\}$ を考える。$\mathcal{P}_n(\mathbb{C}^{d+1})$ を $\mathbb{C}^{d+1}$上の n次同次多項式の空間とし，$\mathrm{Holo}(M)$, $\mathcal{P}_n(M)$で各々 $\mathcal{O}(\mathbb{C}^{d+1})$ と $\mathcal{P}_n(\mathbb{C}^{d+1})$ の M上への制限を表わす。Mの部分集合Nを

$$N = \{z = x + iy\ ;\ \|x\| = \|y\| = 1\}$$

で定義する。Nは Sの unit cotangent bundle と同一視でき，また $N \simeq O(d+1)/O(d-1)$である。dNをN上の $O(d+1)$不変な測度で $\int_N 1\, dN(z) = 1$ をみたすものとする。dNに関す

る $L^2(N)$ の内積とノルムを

$$\langle \varphi, \psi \rangle_N = \int_N \varphi(z)\overline{\psi(z)}\, dN(z),$$
$$\|\varphi\|_N = \langle \varphi, \varphi \rangle^{1/2}$$

で定義する。 $n \neq m$ のとき $\mathcal{P}_n(M)$ と $\mathcal{P}_m(M)$ は $\langle\ ,\ \rangle_N$ について直交する（証明はたとえば [3] [10] 参照）。

$f' \in \mathrm{Exp}'(\tilde{S})$, $z \in M$ について

$$Ff'(z) = \langle f'_\zeta, e^{\zeta \cdot z} \rangle$$

とおく。 $Ff' = \mathcal{P}_{-i} f'|_M$ はあきらかである。次のことが知られている。

<u>補題1.3</u>（c.f. Ii [3]） $F : f' \to Ff'$ は $\mathbb{H}_{n,d}$ から $\mathcal{P}_n(M)$ への1対1 onto の線型写像で, $f, g \in \mathbb{H}_{n,d}$ について次が成り立つ.

(1.17) $$\langle f, g \rangle_S = C_n \langle Ff, Fg \rangle_N,$$

ここで $$C_n = \frac{n!\,\Gamma(n+\frac{d+1}{2})\,N(n,d)}{\Gamma(\frac{d+1}{2})}.$$

証明は [3] [10] 参照。

§2. 変換Fの性質

ここで Holo(M) の部分空間をいくつか定義する。

(2.1) $$\mathrm{Exp}(M, r) = \bigcap_{r'>r} \{\psi \in \mathrm{Holo}(M);\ \sup_{z\in M} |\psi(z)| e^{-r'\|z\|} < \infty\},$$

(2.2) $$\mathrm{Exp}[M, r] = \bigcup_{r'<r} \{\psi \in \mathrm{Holo}(M);\ \sup_{z\in M} |\psi(z)| e^{-r'\|z\|} < \infty\},$$

(2.3) $$\mathrm{Exp}(M) = \mathrm{Exp}[M, \infty].$$

この節の目的は $\mathrm{Exp}'(\tilde{S})$ の部分空間の F による像を決定することである。

<u>定理2.1</u>. 次の写像は1対1 ontoの線型写像である。

(2.4) $$F: \mathrm{Exp}'(\tilde{S}) \longrightarrow \mathrm{Holo}(M),$$

(2.5) $$F: \mathcal{O}'(\tilde{S}) \longrightarrow \mathrm{Exp}(M),$$

(2.6) $$F: \mathcal{O}'(\tilde{S}[r]) \longrightarrow \mathrm{Exp}(M, r/\sqrt{2}) \quad (1 \leq r < \infty),$$

(2.7) $$F: \mathcal{O}'(\tilde{S}(r)) \longrightarrow \mathrm{Exp}[M, r/\sqrt{2}] \quad (1 < r \leq \infty),$$

(2.8) $$F: \mathcal{O}(\tilde{S}(r)) \longrightarrow \mathrm{Exp}(M, \tfrac{1}{\sqrt{2}r}) \quad (1 \leq r < \infty),$$

(2.9) $$F: \mathcal{O}(\tilde{S}[r]) \longrightarrow \mathrm{Exp}[M, \tfrac{1}{\sqrt{2}r}] \quad (1 < r \leq \infty),$$

(2.10) $\quad F: \mathcal{O}(\widetilde{S}) \to \mathrm{Exp}(M, 0).$

(略証) (1.15) より F は $\mathrm{Exp}'(\widetilde{S})$ から $\mathrm{Holo}(M)$ への線型写像である。逆に φ が $\mathrm{Holo}(M)$ に属するならば

$$\widetilde{\varphi}|_M = \varphi,$$

$$\widetilde{\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{\varphi}_n$$

をみたす $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^{d+1})$, $\widetilde{\varphi}_n \in P_n(\mathbb{C}^{d+1})$ $(n=0,1,2\cdots)$ が存在する。任意の $\rho>0$ について $\widetilde{\varphi}_n$ は

(2.11) $\quad \widetilde{\varphi}_n(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \oint_{|t|=\rho} \dfrac{\widetilde{\varphi}(tz)}{t^{n+1}}\, dt$

で与えられるので、$K_n = \sup_{z\in N} |\widetilde{\varphi}_n(z)|$ とおくと (2.11) より

(2.12) $\quad K_n \leq \rho^{-n} \sup_{z\in \rho N} |\widetilde{\varphi}(z)|.$

よって 任意の $\rho>0$ について $\overline{\lim_{n\to\infty}} K_n^{1/n} \leq 1/\rho$ より

(2.13) $\quad \overline{\lim_{n\to\infty}} K_n^{1/n} = 0.$

補題1.3 より

(2.14) $\quad F f_n(z) = \widetilde{\varphi}_n(z) \qquad (\forall z \in M),$

$$(2.15)\qquad \|f_n\|_2 = \sqrt{C_n}\,\|\tilde{\varphi}_n\|_N$$

をみたすような $f_n \in \mathbb{H}_{n,d}$ ($n=0,1,2\cdots$) が存在する。

$\overline{\lim_{n\to\infty}} (\sqrt{C_n}/n!)^{1/n} \leqq 1$ であるから (2.13), (2.15) より

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\frac{\|f_n\|_2}{n!}\right)^{1/n} = 0,$$

よって (1.6) より $f' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \in \mathrm{Exp}'(\tilde{S})$ である。さらに (2.14) より $z \in M$ のとき

$$Ff'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_S f_n(s)\, e^{s\cdot z}\, ds$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} Ff_n(z) = \varphi(z).$$

従って $F(\mathrm{Exp}'(\tilde{S})) = \mathrm{Holo}(M)$ がいえる。

$f' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n' \in \mathrm{Exp}'(\tilde{S})$ かつ $Ff' = 0$ とせよ。 $Ff_n' \in \mathcal{P}_n(M)$ だから $\mathcal{P}_n(M)$ の直交性より N 上で $Ff_n' = 0$, よって (1.17) より $f_n' = 0$ ($n=1,2,\cdots$) となり つまり $f' = 0$ がいえる。これで (2.4) が示せた。

次に $f' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n' \in \mathcal{O}'(\tilde{S}(r))$ $(1<r\leqq\infty)$ とする。$z \in M$ を固定するとき $(s\cdot z)^n$ は s の函数として $\mathbb{H}_{n,d}$ に属するから, $\mathbb{H}_{n,d} \perp \mathbb{H}_{m,d}$ $(n \neq m)$ より

$$(2.16)\qquad Ff'(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_S f_n'(s)e^{s\cdot z}\,ds$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_S f_n'(s)(s\cdot z)^n\,ds \qquad (z\in M)$$

となる。$z\in M$のとき

$$(2.17)\qquad \sup_{s\in S}|s\cdot z|\leq \sup_{s\in S}L(s)\,L^*(z)=L^*(z)=\frac{\|z\|}{\sqrt{2}}$$

だから (2.16), (2.17), (1.9)より ある $r'<r$ と $C>0$ が存在して

$$(2.18)\qquad |Ff'(z)|\leq\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\|f_n'\|_2\left(\frac{\|z\|}{\sqrt{2}}\right)^n\leq Ce^{\frac{r'}{\sqrt{2}}\|z\|}$$

となる。よって $Ff'\in \mathrm{Exp}[M,\frac{r}{\sqrt{2}}]$, このことと (2.4)より Fは $\mathcal{O}(\widetilde{S}(r))$ から $\mathrm{Exp}[M,r/\sqrt{2}]$ への1対1の線型写像である.

逆に $\varphi\in\mathrm{Exp}[M,r/\sqrt{2}]$ のとき $\widetilde{\varphi}|_M=\varphi$ かつ ある$r'<r$, $C>0$について

$$(2.19)\qquad |\widetilde{\varphi}(z)|\leq Ce^{\frac{r'}{\sqrt{2}}\|z\|}\qquad (z\in M)$$

をみたす $\widetilde{\varphi}\in\mathcal{O}(\mathbb{C}^{d+1})$ が存在する。$\widetilde{\varphi}=\sum_{n=0}^{\infty}\widetilde{\varphi}_n$, $\widetilde{\varphi}_n\in P_n(\mathbb{C}^{d+1})$ とすると (2.12), (2.19) より

$$K_n\leq\rho^{-n}\sup_{z\in\rho N}Ce^{\frac{r'}{\sqrt{2}}\|z\|},$$

$z \in N$ のとき $\|z\| = \sqrt{2}$ だから 任意の $\rho > 0$ について

(2.20) $\qquad K_n \leq \rho^{-n} C e^{\rho r'}$

がいえる。$\inf\{\rho^{-n} e^{r'\rho} : \rho > 0\} = (r'e/n)^n$ だから

(2.21) $\qquad K_n \leq C(r'e/n)^n$

である。φ に対して (2.14), (2.15) をみたす $f_n \in \mathbb{H}_{n,d}$ ($n = 0, 1, 2 \cdots$) が存在する。$f' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ とおくと (2.15), (2.21) と Stirling の公式より

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \| f_n \|_2^{1/n} \leq r' < r$$

となるから (1.9) より $f' \in \mathcal{O}(\tilde{S}(r))$ がわかる。従って (2.7) が示せた。(2.5), (2.6), (2.8) − (2.10) も同様の方法で証明できる。//

次に $L^2(S)$ の F による像について考える。Macdonald 函数 K_ν は 次式で与えられる:

$$K_\nu(r) = \int_0^\infty e^{-r\cosh t} \cosh \nu t \, dt \quad (\mathrm{Re}\,\nu > -1/2,\ 0 < r < \infty),$$

$$K_{-\nu}(r) = K_\nu(r).$$

ここで 函数ρ_dを

$$\rho_d(r) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{k} a_l r^{l+1} K_l(2r) & (d\text{が奇数のとき}) \\ \sum_{l=0}^{k} a_l r^{l+\frac{1}{2}} K_{l-1/2}(2r) & (d\text{が偶数のとき}) \end{cases}$$

と定義すると $^\forall n = 0, 1, 2 \cdots$ について

$$\int_0^\infty r^{2n+d-1} \rho_d(r)\, dr = C_n$$

をみたすような k と a_l $(l = 0, 1, \cdots, k)$ が一意的に決まる([10]参照)。このようなρ_dに対して M上の測度μ_dを次のように決める:

$$\int_M f(z)\, d\mu_d(z) = \int_0^\infty r^{d-1} \left(\int_N f(rz')\, dN(z') \right) \rho_d(r)\, dr.$$

μ_dに関する$L^2(M)$の内積$\langle\ ,\ \rangle_M$を

$$\langle \psi, \varphi \rangle_M = \int_M \psi(z)\, \overline{\varphi(z)}\, d\mu_d(z)$$

とおくとき Holo(M)の部分空間$\mathcal{P}(M) = \mathrm{Holo}(M) \cap (L^2(M), \langle\ ,\ \rangle_M)$について 次のことがいえる。

<u>定理2.2</u> (c.f. Ii [3] Theorem 2.5) Fは$(L^2(S), \langle\ ,\ \rangle_S)$から $(\mathcal{P}(M), \langle\ ,\ \rangle_M)$ への unitary isomorphism である。

(証明は [3] [10] 参照).

定理 2.2 の d が偶数の場合は Ii [3] の結果である。

§3. $\mathcal{O}'(\tilde{S}(r))$ と $\mathcal{O}'(\tilde{S}[r])$ の Fourier-Borel 変換

この節では $\mathcal{O}'(\tilde{S}(r))$ と $\mathcal{O}'(\tilde{S}[r])$ の Fourier-Borel 変換 $\mathcal{P}_\lambda$ による像を決定する。

定理 3.1　$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とする。

$$\mathrm{Exp}_\lambda(\mathbb{C}^{d+1} : [|\lambda| r : L^*]) = \mathcal{O}_\lambda(\mathbb{C}^{d+1}) \cap \mathrm{Exp}(\mathbb{C}^{d+1} : [|\lambda| r : L^*]),$$

$$\mathrm{Exp}_\lambda(\mathbb{C}^{d+1} : (|\lambda| r : L^*)) = \mathcal{O}_\lambda(\mathbb{C}^{d+1}) \cap \mathrm{Exp}(\mathbb{C}^{d+1} : (|\lambda| r : L^*))$$

とおくとき 次の写像は線型位相同型：

$$\mathcal{P}_\lambda : \mathcal{O}'(\tilde{S}(r)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Exp}_\lambda(\mathbb{C}^{d+1} : [|\lambda| r : L^*]) \quad (1 < r \leq \infty), \tag{3.1}$$

$$\mathcal{P}_\lambda : \mathcal{O}'(\tilde{S}[r]) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Exp}_\lambda(\mathbb{C}^{d+1} : (|\lambda| r : L^*)) \quad (1 \leq r < \infty). \tag{3.2}$$

定理 3.1 を証明するために 次の定理が必要である。

定理 3.2 (Martineau [4])　$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ のとき 次の写像は線型位相同型：

(3.3) $\quad \mathcal{P}_\lambda : \mathcal{O}'(\widehat{B}[r]) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Exp}(\mathbb{C}^{d+1} : (|\lambda| r : L^*))$,

(3.4) $\quad \mathcal{P}_\lambda : \mathcal{O}'(\widehat{B}(r)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Exp}(\mathbb{C}^{d+1} : [|\lambda| r : L^*])$.

定理3.1の証明。 $\mathcal{O}'(\widetilde{S}(r)) \subset \mathrm{Exp}'(\widetilde{S}) \cap \mathcal{O}'(\widehat{B}(r))$ だから，(1.15) と (3.4) より

$$\mathcal{P}_\lambda(\mathcal{O}'(\widetilde{S}(r))) \subset \mathrm{Exp}_\lambda(\mathbb{C}^{d+1} : [|\lambda| r : L^*])$$

である。よって $\mathcal{P}_\lambda$ は $\mathcal{O}'(\widetilde{S}(r))$ から $\mathrm{Exp}_\lambda(\mathbb{C}^{d+1} : [|\lambda| r : L^*])$ への中への1対1線型写像である。

逆に $\widetilde{\Psi} \in \mathrm{Exp}_\lambda(\mathbb{C}^{d+1} : [|\lambda| r : L^*])$, $\widetilde{\Psi}|_M = \Psi$ とせよ。定義より $r' < r$, $C > 0$ なる定数 r', C が存在して任意の $z \in M$ について

$$|\Psi(z)| \leq C \exp(|\lambda| r' L^*(z)) = C \exp(|\lambda| r' \|z\| / \sqrt{2})$$

となる。よって $\forall z \in M$ について

(3.5) $\quad |\Psi(-iz/\lambda)| \leq C \exp(r' \|z\| / \sqrt{2})$.

ここで $\Psi_{-i/\lambda}(z) = \Psi(-iz/\lambda)$ とおくと (3.5)より $\Psi_{-i/\lambda} \in \mathrm{Exp}[M, r/\sqrt{2}]$ であるから (2.7)より ある $f' \in \mathcal{O}'(\widetilde{S}(r))$ が存在して

$$(3.6) \qquad Ff' = \varphi_{-i/\lambda}$$

となる。 $\tilde{\varphi} \in \mathcal{O}_\lambda(\mathbb{C}^{d+1})$ であるから (1.15)より $\tilde{\varphi} = \mathcal{P}_\lambda h'$ となる $h' \in \mathrm{Exp}'(\tilde{S})$ が存在する。任意の $z \in M$ について

$$\tilde{\varphi}(-iz/\lambda) = \mathcal{P}_\lambda h'(-iz/\lambda) = Fh'(z)$$

であるから (3.6)より

$$(3.7) \qquad Fh' = Ff'.$$

(2.4)と(3.7)より $h' = f'$ が得られるから, $\tilde{\varphi} \in \mathcal{P}_\lambda(\mathcal{O}'(\tilde{S}(r)))$ がわかる。(3.4)より $\mathcal{P}_\lambda$ は $\mathcal{O}'(\tilde{S}(r))$ から $\mathrm{Exp}_\lambda(\mathbb{C}^{d+1}:[|\lambda|r:L^*])$ への連続写像になる。$\mathcal{O}'(\tilde{S}(r))$, $\mathrm{Exp}_\lambda(\mathbb{C}^{d+1}:[|\lambda|r:L^*])$ は DFS空間だから 閉グラフ定理より $\mathcal{P}_\lambda^{-1}$ も連続になる。よって (3.1)が示せた。(3.3) と (2.6) を使えば (3.2)も同様に示せる。//

次に $Holo(M)$ と その部分空間の位相を定義する。

$$\mathcal{J}(M) = \{ f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^{d+1}) : f = 0 \text{ on } M \}$$

とおくと $Holo(M) = \mathcal{O}(\mathbb{C}^{d+1})|_M$ であるから $Holo(M)$に商位相 $\mathcal{O}(\mathbb{C}^{d+1})/\mathcal{J}(M)$ を導入できる。また 定理2.1 より

$\mathrm{Exp}(M) = \mathrm{Exp}(\mathbb{C}^{d+1})|_M$, $\mathrm{Exp}(M, r/\sqrt{2}) = \mathrm{Exp}(\mathbb{C}^{d+1} : (r : L^*))|_M$ $(1 \leq r < \infty)$, $\mathrm{Exp}[M, r/\sqrt{2}] = \mathrm{Exp}(\mathbb{C}^{d+1} : [r : L^*])|_M$ $(1 < r \leq \infty)$ となるから，これらの空間の位相も同様に定義できる。

定理1.2，定理2.1，定理3.1と閉グラフ定理より次の系が得られる。

系3.3　次の写像は線型位相同型である。

$$F : \mathrm{Exp}'(\tilde{S}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Holo}(M), \tag{3.8}$$

$$F : \mathcal{O}'(\tilde{S}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Exp}(M), \tag{3.9}$$

$$F : \mathcal{O}'(\tilde{S}[r]) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Exp}(M, r/\sqrt{2}) \quad (1 \leq r < \infty), \tag{3.10}$$

$$F : \mathcal{O}'(\tilde{S}(r)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Exp}[M, r/\sqrt{2}] \quad (1 < r \leq \infty). \tag{3.11}$$

系3.4　(i) 任意の $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^{d+1})$ に対して M 上で $f = g$ となる $g \in \mathcal{O}_\lambda(\mathbb{C}^{d+1})$ が一意的に存在する。

(ii) $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^{d+1})$ かつ ある $A > 0$ について $\sup_{z \in M} |f(z)| e^{-A\|z\|} < \infty$ であるならば，M 上で $f = g$ となる $g \in \mathrm{Exp}_\lambda(\mathbb{C}^{d+1})$ が一意的に存在する。

(iii) $1 \leq r < \infty$ とする。$f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^{d+1})$ で $\forall r' > r$ について $\sup_{z \in M} |f(z)| e^{-|\lambda| \frac{r'\|z\|}{\sqrt{2}}} < \infty$ のとき M 上で $f = g$ となるような

$g \in Exp_\lambda(\mathbb{C}^{d+1} : (|\lambda| r : L^*))$が一意的に存在する。

(iv) $1 < r \leq \infty$とする。$r' < r$なるあるr'について$f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^{d+1})$が$\sup_{z \in M} |f(z)| e^{-|\lambda| r' \|z\| / 2} < \infty$をみたすならば，M上で$f = g$となるような$g \in Exp_\lambda(\mathbb{C}^{d+1} : [|\lambda| r : L^*])$が一意的に存在する。

(略証)　$g = \mathcal{P}_\lambda(F^{-1} f_{-i/\lambda})$とおけばよい。//

注意　系3.4で$d=1$の場合は知られている（Morimoto [5] 参照）

参考文献

[1] L. Drużkowski, Effective formula for the crossnorm in the complexified unitary spaces, Zeszyty Nauk. Uniw. Jagiellon., Prace Mat. 16 (1974), 47-53.

[2] M. Hashizume, A. Kowata, K. Minemura and K. Okamoto, An integral representation of an eigenfunction of the Laplacian on the Euclidean space, Hiroshima Math. J. 2 (1972), 535-545.

[3] K. Ii, On a Bargmann-type transform and a Hilbert space of holomorphic functions, Tôhoku Math. J., 38 (1986) 57-69.

[4] A. Martineau, Équations différentielles d'ordre infini,

Bull. Soc. Math. France 95 (1967), 109-154.

[5] M. Morimoto, A generalization of the Fourier-Borel transformation for the analytic functionals with non convex carrier, Tokyo J. Math. 2 (1979), 301-322.

[6] 森本光生, 球面上の超函数, 上智大学数学講究録 No. 12, 上智大学数学教室 1982.

[7] M. Morimoto, Analytic functionals on the sphere and their Fourier-Borel transformations, Complex Analysis, Banach Center Publications, 11, PWN-Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1983, 223-250.

[8] C. Müller, Spherical Harmonics, Lecture Notes in Math. 17, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New york, 1966.

[9] R. Wada, The Fourier-Borel transformations of analytic functionals on the complex sphere, Proc. Japan Acad., 61A, 298-301 (1985).

[10] R. Wada, On the Fourier-Borel transformations of analytic functionals on the complex sphere, to appear in Tôhoku Math. J.