数理解析研究所講究録
第592巻 1986年 127-135

ある準楕円型作用素のGevrey指数について

京大・理 大鍛治 隆司 (Takashi Ōkaji)

1. 序

X_j を $\mathbb{R}^n$ の領域 Ω で定義された実ベクトル場とし，L を次の形の作用素とする：

$$L=\sum_{j=1}^{d} X_j^2 + X_0$$

この時，$\{X_j\}_{j=0}^{d}$ が $x\in\Omega$ の各点で条件；ある r が存在して，X_j とその長さ r までの commutator が $T_x(\Omega)$ を生成する；を満たせば L は C^∞-準楕円型になることが知られている。([2])

我々は以下上の条件を仮定して，さらに L の Gevrey 族 γ^s における準楕円性及び出来ればその最小指数（これを作用素の Gevrey 指数と呼ぶ）を求めることが目的である。

2. 結果

$I=(i_1,i_2,\cdots,i_p)$ $1\leq p<+\infty$ に対し (i_j：非負整数, $0\leq i_j\leq d$)

$\langle I\rangle=\sum_{j=1}^{p}\varepsilon_j i_j$ $\quad\varepsilon_j=1$ if $i_j\neq 0$ $\quad\varepsilon_j=2$ if $i_j=0$

$X_I = [X_{i_1},[X_{i_2}, \cdots [X_{i_{p-1}}, X_{i_p}]] \cdots]$ if $p \ge 2$, $X_I = X_{i_1}$ if $p=1$

$\mathcal{M} = \{ X_I$ が $T_x(\Omega)$ を生成する時の multi-index I の集合$\}$

$\sigma_x(\mathcal{M}) = \sup_{I\in\mathcal{M}} \langle I \rangle$, $s_x(L) = \inf_{\mathcal{M}} \sigma(\mathcal{M})$ とおく。

我々は簡単の為、X_j の係数はすべて解析的とする。この時まず最初に次の定理を得る。

<u>定理1</u> $s \ge s_{x_0}(L)$ ならば、L は点 x_0 で γ^s-準楕円型である。即ち、ある x_0 の近傍 ω が存在して、任意の $\omega' \subset \omega$ に対し、$Lu \in \gamma^s(\omega') \Rightarrow u \in \gamma^s(\omega')$、が成立する。

ここで現われた $s_{x_0}(L)$ は、最小であるかという観点から見て optimal ではあるが、best possible ではないことが容易にわかる。しかし、一般の場合は複雑であるので、簡単な場合について考察すると、Gevrey指数について次の3つの結果を得る。

<u>定理2</u> $a_j(x) \in \gamma^2$, $a_j(x) > 0$, $k_j \in \mathbb{N}$ に対し

$$L_1 = \sum_{j=1}^{n-1} D_j^2 + i\left(\sum_{j=1}^{n-1} x_j^{2k_j} a_j(x)\right) D_n, \quad D_j = \frac{1}{i}\partial_{x_j}$$

とする。この時、L_1 の Gevrey指数は2である。即ち、$^\forall s \ge 2$ に対し、L_1 は γ^s-準楕円型(各点で)だが、$1 \le s < 2$ に対し、γ^s-準楕円型でない。

定理3　$K \leq l$ を非負整数

$$L_2 = D_1^2 + x_1^{2K} D_2^2 + x_1^{2l} D_3^2 \quad \text{on } \mathbb{R}^3$$

とする。この時 原点における L_2 の Gevrey 指数は $\frac{l+1}{K+1}$ である。

定理4

$$L_3 = \sum_{j=1}^{n-1} D_j^2 + i x_1 D_n$$

に対して、L_3 の原点における Gevrey 指数は 2 である。

3. 十分性の証明の方針及び考え方.

i) 定理1は 次の補題より従う.

補題1　$P = \sum_{|\mu:\alpha| \leq m} C_\alpha X^\alpha$, $C_\alpha \in \gamma^s$, $|\mu:\alpha| = \frac{\alpha_1}{\mu_1} + \cdots + \frac{\alpha_n}{\mu_n}$

が次のアプリオリ評価式をみたすと仮定する

$$\sum_{|\mu:\alpha| \leq m} \| X^\alpha u \|_{\delta(m-|\mu:\alpha|)} \leq C (\| Pu \|_0 + \| u \|_0) \qquad u \in C_0^\infty(\omega)$$

($\| \cdot \|_p$ は Sobolevノルム)　この時 P は $s \geq \delta^{-1}$ に対し γ^s-準楕円型である。

実際、[4] より，L に対して

$$\sum_{j=1}^{d} \| X_j^2 u \| + \| X_0 u \| + \| \langle D_x \rangle^{2/K} u \| \leq C (\| Pu \| + \| u \|)$$

$u \in C_0^\infty(\omega)$ が成り立つから。ここで $K = \Delta_{x_0}(L)$, ω は x_0 の十分小さな近傍である。($\| \cdot \| = \| \cdot \|_0$)

一方補題1はMorrey-Nirenbergの方法[c.f [1]]で示される.

ii) L_1についてもMorrey-Nirenbergの方法で示されるが，出発点となる不等式は次のものである；Ωを原点の十分小さな近傍とした時，任意の$v \in C_0^\infty(\Omega)$に対し，

(1) $\sum_{j=1}^{d}\{\|D_j^2 v\| + \|x_j^{2k_j} D_n v\|\} + \|v\| \le C\|L_1 v\|$

超局所的に考えれば，一番問題となるのは，$(0,\xi_0)$の近くである。[$\xi_0=(0,0,\dots,0,1)$] そこで，Γ_j $(j=1,2)$ をξ_0の錐近傍$\Gamma_1 \Subset \Gamma_2$ ω_jを$\mathbb{R}^n$の原点の近傍$\omega_1\Subset\omega_2$とした時，次の性質を持つ函数$\Phi_N(\xi)$ $\varphi_N(x)$を考える.

$$|D_\xi^{\alpha+\beta}\Phi_N(\xi)| \le K_\beta\, d^{-|\beta|}(KN/d)^{s|\alpha|}(1+|\xi|)^{-|\alpha|-|\beta|} \qquad |\alpha|\le N$$

$$\Phi_N(\xi)=1 \text{ on } \Gamma_1\cap\{|\xi|\ge N\}, \quad \text{supp}\,\Phi_N \subset \Gamma_2$$

(2) $$|D_x^{\alpha+\beta}\varphi_N(x)| \le C_\beta\, d^{-|\beta|}(CN/d)^{s|\alpha|} \qquad |\alpha|\le N$$

$$\varphi_N(x)=1 \text{ on } \omega_1 \qquad \text{supp}\,\varphi_N\subset\omega_2$$

ここで $d>0$ は $\Gamma_1\cap\{|\xi|=1\}$ と$\{\Gamma_2\cap\{|\xi|=1\}\}^c$ 及び ω_1とω_2^cの距離である

この時 γ^2のwave front setについて，

$$(0,\xi_0)\notin WF_2(L_1u) \Rightarrow (0,\xi_0)\notin WF_2(u)$$

が成り立つ. 即ち. ある原点の近傍Uが存在して，

$$\sup_U |D_x^\alpha \Phi_N(D)u(x)| \le C_0(CN)^{2|\alpha|} \qquad \text{if } |\alpha|\le N$$

が成立する。

実際、$U_0\supset\cdots\supset U_{\frac{k}{N}}\supset U_{\frac{k+1}{N}}\supset\cdots\supset U_1=U$ を $\overline{U}_\varepsilon=\{x\in U_0: d(x,U)$

$\leqq \delta(1-\varepsilon)\}$ となる開集合，$\varphi_{N,K}$ として，(2)で $\omega_1 = U_{\frac{K+1}{N}}$, $\omega_2 = U_{\frac{K}{N}}$ としたものを取る時，(1)の v として，

$$v(x) = \varphi_{N,K} D_N^K \Phi_N(D) u \qquad K = N, N-1, \cdots$$

をとれば，

$$\| \varphi_{N,N} D_n^N \Phi_N(D) u \| \leqq C_0 \| L_1 \varphi_{N,N} D_n^N \Phi_N(D) u \|$$
$$\leqq C_0 \{ \| [L_1, \varphi_{NN}] D_n^N \Phi_N(D) u \| + \| \varphi_{N,N} [L_1, \Phi_N] D_n^N u \|$$
$$+ \| \varphi_{NN} \Phi_N [L_1, D_n^N] u \| + \| \varphi_{N,N} D_n^N \Phi_N L_1 u \| \}$$
$$\leqq C_0 (CN)^2 \| L_1 \varphi_{NN-1} D_n^{N-1} \Phi_N(D) u \| + C_0 (CN)^{2N}$$
$$\vdots$$
$$\leqq C_0' (C'N)^{2N}$$

が得られる．ここで，L の形より，$x \notin \{x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = 0\}$ 又は $\xi \notin \{\xi_1 = \cdots = \xi_{n-1} = 0\}$ では $(x, \xi) \notin WF_2(u)$ となることを用いた。

iii) L_2 については

$$\|u\| + \sum_{j=1}^{3} \| D_j^2 u \| + \| \langle D_3 \rangle^{\frac{2}{\ell+1}} u \| + \| \langle D_2 \rangle^{\frac{2}{K+1}} u \| \leqq C \| L_2 u \|$$

を出発点とする．ii) と同様にすれば，結局，$\| x_1^{2K} D_2 D_3 v \|$ の項の処理が一番問題となる．そこで，

$$\| ABC v \|^2 = (A^2 v, (BC)^2 v), \quad \| BC v \|^2 = (B^2 v, C^2 v)$$

だから，$\hat{A}\hat{B}\hat{C} \leqq \frac{\hat{A}^p}{p} + \frac{\hat{B}^q}{q} + \frac{\hat{C}^r}{r} \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$.

$p = 2$, $q = \frac{2\ell}{K}$, $r = \frac{2\ell}{\ell - K}$, $\hat{A} = x_1^K D_2 v$, $\hat{B} = (x_1^\ell D_3)^{\frac{K}{\ell}} v$, $\hat{C} = (D_3^{\frac{1}{\ell+1}})^{\frac{\ell-K}{\ell}} v$

を用いれば，

$$\| D_3^N \Phi_N(D) u \|_{L^2(U)} \leqq C_0 (CN) \| L \varphi_{NN-1} D_3^{N - \frac{K+1}{\ell+1}} \Phi_N(D) u \| + (\text{negligeable terms})$$

となる。従ってこれより，$N \sim D_3^{\frac{k+1}{\ell+1}}$ だから，$N^{\frac{\ell+1}{k+1}} \sim D_3$

故に，$\| D_3^N \Phi_N(D) u \|_{L^2(U)} \leq C_0 (CN)^{\frac{\ell+1}{k+1} N}$ を得る．

iv) L_3 の場合は Parametrix を構成することによって示される．$x_0 = 0$, $\xi_0 = (0, \cdots, 0, 1)$ の所が一番問題である．そこで，phase $\phi(x, y, \xi) = (x_n - y_n, \xi) + x_1 y_1 \xi_n$ を持つ Fourier integral operator

$$Fu = \int e^{i\phi(x,y,\xi)} u(y)\, dy\, d\xi$$

を考えることにより，L_3 の代わりに，$P = F^{-1} L F$;

$$P = D_1 + i\left(x_1^2 D_n^2 + \sum_{j=2}^{n-1} D_j^2\right)$$

について考察することにする。すると次の関係式

$$PK \sim Id \quad \text{at } (x_0, \xi_0)$$

より直ちに

$$Ku = \int_{-T}^{t} \int e^{ix\cdot\xi} K(x, t, s, \xi)\, \hat{u}(s, \xi)\, ds\, d\xi$$

$$K(x, t, s, \xi) = \exp\left[-\int_s^t \left(\tau^2 \xi_n^2 + \sum_{j=2}^{n-1} \xi_j^2\right) d\tau\right]$$

とおけばよいことがわかる．この時，

(3) $$\left|\partial_\xi^\beta K(x, t, s, \xi)\right| \leq C_0 C^{|\beta|} \left(|\beta|^2/|\xi|\right)^{|\beta|/3} \exp\left[-|t-s|^3 |\xi_n|^2/6\right]$$

が得られる．ここで

$$\gamma^\sigma\text{-}S_{\rho,\delta}^{\mu} \ni a(x, \xi) \iff a(x, \xi) \in C^\infty,\quad R(|\beta| + 1) \leqslant |\xi|,\ (R > 0)$$

に対し，$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi)| \leqslant C_0 C^{|\alpha+\beta|} \left(|\alpha|^\sigma + |\alpha|^{\sigma(1-\delta)} |\xi|^\delta\right)^{|\alpha|} \left(|\beta|^\sigma/|\xi|\right)^{\rho|\beta|} (1+|\xi|)^\mu$

と定義すれば，(3) は，$K(x, t, s, \xi)$ が (x, ξ) に関して $\gamma^2\text{-}S_{\frac{1}{3},0}^{0}$ に属すということを意味している。よって P^* を考えることにより

$$WF_2(u) \subset WF_2(Pu)$$

を得る。

一方(3)については，ξ_j $(2 \leq j \leq n-1)$ をcomplexにまで拡げた時，

$$\left|\int_s^t \xi_j^2 \, d\tau\right| \leq \frac{1}{3}|t-s|^3 \xi_n^2 + \left|(\mathrm{Im}\,\xi_j)\xi_n^{-\frac{1}{3}}\right|^3$$

より，$-\int_s^t \left(\tau^2 \xi_n^2 + \sum_{j=2}^{n-1} \xi_j^2\right) d\tau \leq -\frac{2}{3}|t-s|^3 \xi_n^2 + \left|(\mathrm{Im}\,\xi_j)\xi_n^{-\frac{1}{3}}\right|^3$

となり，又整函数 $f(z)$ が $|f(z)| \leq C\exp(|\mathrm{Im}\,z|^3)$ を満たせば，

$x \in \mathbb{R}$ に対し，$|\partial_x^\alpha f(x)| \leq C_0 C^\alpha \alpha!^{\frac{2}{3}}$

となることより従う。

4. 必要性

i) 定理1.2.4に関しては 問題の作用素が $x \neq 0$ では準楕円型作用素であるので，[3]の結果より，$x \neq 0$ では $1 \leq s < 2$ に対し γ^s-準楕円型でなく，その集積点である原点でも同じ事である事より従う。

ii) L_2 に関しては まず1つ補題を用意する。

$$P = \sum_{\langle\sigma,\gamma\rangle = \langle p,\alpha\rangle - m} C_{\alpha,\gamma}\, x^\gamma D_x^\alpha, \quad C_{\alpha\gamma} \in \mathbb{C}, \ \langle\sigma,\gamma\rangle = \sum_{j=1}^n \sigma_j \gamma_j, \ \langle p,\alpha\rangle = \sum_{j=1}^n p_j \alpha_j$$

$1 \leq p_1 \leq \cdots \leq p_n$，$1 \leq j \leq d$ の時 $\sigma_j = p_j = 1$，σ_j, p_j は非負有理数

$$P_{\xi''} = \sum_{\langle\sigma,\gamma\rangle = \langle p,\alpha\rangle - m} C_{\alpha,\gamma}\, x^\gamma \xi''^{\alpha''} D_{x'}^{\alpha'}, \quad x' = (x_1, \cdots, x_d), \ x = (x', x'')$$

この時

<u>補題2</u>　ある K, $(d \le K \le n)$ とある $\xi'' \in \mathbb{C}^{K-d} \times \mathbb{R}^{n-d-K} \setminus \{0\}$ が存在して、$K \le j \le n$ に対し $\sigma_j = 0$, $x' \in \mathbb{R}^d$ に対し、

$$|u(x')| \le C \exp\{C' \sum_{j=1}^{K-1} |x_j|^{\rho_n/\rho_j}\} \quad (C, C' > 0)$$

となる $P_{\xi''} u = 0$ の恒等的に零でない解 $u(x, \xi'')$ が存在すれば、$1 \le s < \rho_n/\rho_K$ に対し、L は原点で γ^s-準楕円型でない。

実際、$Pv = 0$ の解として

$$v(x) = \int_0^\infty \exp[i \sum_{j=K}^{n} \xi_j \lambda^{\rho_j} x_j]\, u(\lambda x', \lambda^{\rho_{d+1}} x_{d+1}, \dots, \lambda^{\rho_{K-1}} x_{K-1}) e^{-R\lambda^{\rho_K}} d\lambda$$

が取れ、$R > 0$ を十分大にすれば、$v \notin \gamma^{\rho_n/\rho_K - \varepsilon}$ $({}^\forall \varepsilon > 0)$ となることが、$\partial_n^N v(x)$ を考えることより容易にわかる。

L_3 の場合には、

$$P_{\xi''} = -\left(\frac{d}{dx_1}\right)^2 + x_1^{2K} \xi_2^2 + x_1^{2\ell} \xi_3^2 \qquad K \le \ell$$

$$\rho_1 = \sigma_1 = 1, \quad \rho_2 = K+1, \quad \sigma_2 = 0, \quad \rho_3 = \ell + 1, \quad \sigma_3 = 0,$$

となるから、$\xi_2 = 1$, ξ_3 は Schrödinger 作用素 $P_{\xi''}$ が零固有値を持つように選ぶ。(これは、固有値のパラメーターに関する連続性と、第1固有値が、$\xi_3^2 \to -\infty$ の時 負の無限大に近づくことより可能) と補題が適用されて、L_3 は $1 \le s < \frac{\ell+1}{K+1}$ に対し、原点で γ^s-準楕円型でないことが従う。

参考文献

[1] M. Durand Regularite Gevrey d'une classe d'operateurs hypoelliptiques
J. Math. pure et appl. 51 (1978) 323-366

[2] L. Hörmander Hypoelliptic second order differential equations
Acta Math. 119. (1967) 147-171

[3] T. Ōkaji On the lowest index for the semi-elliptic operator to be Gevrey hypoelliptic.
J. Math. Kyoto. Univ. 25 (1985) 693-701

[4] L. P. Rothschild - E. M. Stein. Hypoelliptic differential Operators and nilpotent groups
Acta Math. 137 (1977) 247-320.