数理解析研究所講究録
第592巻 1986年 145-148


# 無限階微分方程式の局所可解性

近畿大理工　青木貴史（AOKI Takashi）

正則函数を係数とする無限階微分方程式 $Pu=f$ が任意に与えた正則函数 $f$ に対して正則な局所解 $u$ を持つ為の十分条件を与える．$P$ が定数係数ならばこの方程式は常に解を持つ（Martineau [M]）．石村[I]は Martineau の論法を拡張して変数係数の作用素を含むあるクラスの作用素に対し局所解の存在を示している．以下に与える結果は[M],[I]の結果を含みはしないし，含まれもしないが，座標変換に対する不変性を持つ．

## 1.　特性集合．

$\mathbb{C}^n=\{x=(x_1,\dots,x_n)\mid x_i\in\mathbb{C}\}$ 内の開集合 $U$ で定義された正則函数を係数とする無限階（又は有限階）微分作用素

$$(1)\qquad P=\sum_\alpha a_\alpha(x)D^\alpha$$

を考える. ただし $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ は多重指数, $D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\cdots D_n^{\alpha_n}=(\frac{\partial}{\partial x_1})^{\alpha_1}\cdots(\frac{\partial}{\partial x_n})^{\alpha_n}$. すなわち $a_\alpha$ は $U$ で正則で $U$ 内広義一様に $\lim_{|\alpha|\to\infty}|\alpha|(|a_\alpha(x)|)^{\frac{1}{|\alpha|}}=0$ とする. (1) において $D=(D_1,\cdots,D_n)$ を $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in\mathbb{C}^n_\xi$ におきかえたもの

$$P(x,\xi)=\sum_\alpha a_\alpha(x)\xi^\alpha$$

を考えるとこれは $U\times\mathbb{C}^n_\xi$ で正則従って $\xi$ について整函数となるが, $a_\alpha$ の評価により $\xi$ について劣指数型であることに注意する. $P(x,\xi)$ を $P$ の表象(あるいは全表象)という.

<u>定義 1.</u> $x^*=(\mathring{x},\mathring{\xi})\in U\times(\dot{\mathbb{C}}^n_\xi)\simeq\dot{T}^*U$ が $P$ に関して非特性的であるとは $x^*$ の適当な開近傍 $\Omega$ と $r>0$ をとれば $\Omega\cap\{(x,\xi)\in U\times\mathbb{C}^n_\xi \mid |\xi|>r\}$ 上 $P(x,\xi)\neq0$ が成り立つことをいう. (cf. Def. 4.1.7 [Ka]). ここに $\dot{T}^*U=T^*U-\{0\}$, 等. 非特性的な $x^*$ 全体の集合の $\dot{T}^*U$ における補集合を $Ch(P)$ とかき $P$ の特性集合と呼ぶ.

$P$ の表象は座標系の取り方に依存する. しかも $P$ が有限階でなければ主表象の様な不変な部分をとり出すことが出来ない. にもかかわらず

<u>定理 2.</u>　$Ch(P)$ は $T^*U$ の閉錐的部分集合として well-defined である.

もちろん $P$ が有限階の場合は $Ch(P)=\{(x,\xi)\mid\sigma(P)(x,\xi)=0\}$ ($\sigma(P)$ は $P$ の主表象). この場合 $Ch(P)$ は $\mathbb{C}^*$ の作用に対して不変であるが, 一般には $Ch(P)$ は $\mathbb{R}_+$ の作用に対してのみ不変である.

$Ch(P)\not\ni x^*$ なら $P$ は擬微分作用素として可逆である ([A.K.K], Theorem 1). 従って

<u>定理 3.</u>　$Ch(P)\supset \mathrm{Supp}(\mathcal{E}^{\mathbb{R}}/\mathcal{E}^{\mathbb{R}}P)$. ここに $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}$ は擬微分作用素の層, Supp は層の台を表わす.

## 2. 可解性条件

$\mathbb{C}^n$ 上の正則函数の層を $\mathcal{O}$ で表わす. $P:\mathcal{O}_{\mathring{x}}\to\mathcal{O}_{\mathring{x}}$ が全射である為の条件を $Ch(P)$ を用いて与える.

<u>定理 4.</u>　$\mathbb{C}^n$ 内の点 $\mathring{x}$ の近傍で定義された無限階(又は有限階)微分作用素 $P$ を考える. $\mathring{x}$ における余接ベクトル $x^*=(\mathring{x},\mathring{\xi})\in\dot{T}^*X$ が存在して集合 $\{\lambda\in\mathbb{C}^*\mid(\mathring{x},\lambda\mathring{\xi})\in Ch(P)\}$

が右半平面 $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ に含まれるとする．このとき $\mathring{x}$ の任意の開近傍 $U_2$ に対しある開近傍 $U_1 \subset U_2$ をとれば

$$P : \mathcal{O}(U_1) \to \mathcal{O}(U_2)|_{U_1}$$

は全射である．

証明の方針：$P$ の擬微分作用素としての逆 $P^{-1}$ を用いて $Pu = f$ の解 $u$ を構成する．詳細は [$A_2$] 参照．（特に $n=1$ のときには [$A_1$] で証明が与えられている）．

## 文献

[$A_1$] Aoki T.：無限階作用素の可逆性と可解性，RIMS 講究録 578 pp. 152-162 (1985).

[$A_2$] —— : Existence and continuation of holomorphic solutions of differential equations of infinite order, to appear

[A.K.K.] Aoki T., Kashiwara M., Kawai T. : On a class of linear differential operators of infinite order with finite index, RIMS-499

[I] Ishimura R.: Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 35-3 (1985) 49-57

[Ka] Kawai T.: J. Fac. Sci., Univ. Tokyo IA 17 (1970) 467-517

[M] Martineau A.: Bull. Soc. math. France, 95 (1967), 109-154.