数理解析研究所講究録
第 594 巻 1986 年 30-38

Pauli-JordanのD関数の量子重力への拡張

京大数理研　中西　襄 (Noboru Nakanishi)

Pauli-JordanのD関数は，不変D関数ともいわれ，相対論的場の量子論において質量ゼロの粒子の場の4次元交換関係に現れる基本的な超関数である．不変D関数は次のCauchy問題によって定義することができる：

$$(1)\quad \begin{cases} \eta^{\mu\nu}\partial_\mu^x\partial_\nu^x D(x-y)=0 \\ D(x-y)\big|_0=0 \\ \partial_0^x D(x-y)\big|_0=-\delta^3(x-y) \end{cases}$$

ここに，$\eta_{\mu\nu}=\mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$（Minkowski計量），$|_0$ は $|_{x^0=y^0}$ の略，添字の x は微分が x についてなされることを示す．$\delta^3(x-y)$ は空間3次元 δ 関数である．単位系は自然単位 $\hbar=c=1$ を採る．

さて，(1)の解は50年以上前からよく知られていて，

$$(2)\qquad D(x-y)=\frac{1}{(2\pi)^3 i}\int d^4p\ \epsilon(p_0)\delta(p^2)e^{-ip(x-y)}$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\epsilon(x^0-y^0)\,\delta((x-y)^2)$$

で与えられる．ここに $p^2=\eta^{\mu\nu}p_\mu p_\nu$ など，また $\epsilon(z)\equiv \mathrm{sgn}\, z$；
$\epsilon(p_0)\delta(p^2)$ は

$$(3)\qquad (2|\boldsymbol{p}|)^{-1}(\delta(p_0-|\boldsymbol{p}|)-\delta(p_0+|\boldsymbol{p}|))$$

と同義である．

$D(x-y)$ は Poincaré 群（Lorentz群プラス並進群）のもとに不変であり，かつ

$$(4)\qquad D(y-x) = -D(x-y)$$

である．

次に，この $D(x-y)$ を Minkowski 空間から曲った時空すなわち擬Riemann空間に拡張する．$\eta_{\mu\nu}$ に対応する計量は，与えられた関数 $g_{\mu\nu}(x)$ である．$g=\det g_{\mu\nu}$，$\tilde{g}^{\mu\nu}=\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}$ とおく．d'Alembertian は

$$(5)\qquad \sqrt{-g}^{\,-1}\partial_\mu \tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\nu$$

となる．そこで(1)を拡張した次の Cauchy 問題により曲った時空における D 関数 $\mathcal{D}(x,y)$ を定義する：

$$(6)\qquad \begin{cases} \partial^x_\mu \tilde{g}^{\mu\nu}(x)\partial^x_\nu \mathcal{D}(x,y)=0 \\ \mathcal{D}(x,y)\big|_0 = 0 \\ \partial^x_0 \mathcal{D}(x,y)\big|_0 = -(\tilde{g}^{00}(x))^{-1}\delta^3(x-y) \end{cases}$$

(6)の解は次のようにして構成できる．

(5)の基本解で前方光錐内にのみ台をもつものを $\mathcal{D}_R(x,y)$

(retarded)，後方光錐内にのみ台をもつものを $\mathcal{D}_A(x,y)$ (advanced)とする．これらは geodesically convex domain において次の形で与えられることが知られている：

(7) $$\mathcal{D}_{R/A}(x,y) = (2\pi)^{-1}\left[U(x,y)\,\delta_\pm(\Gamma(x,y)) + V(x,y)\,\theta_\pm(\Gamma(x,y))\right]$$

ここに $\Gamma(x,y)$ は null geodesic の自乗，$\delta_\pm$ は前方［後方］光錐のみに台を制限した δ 関数，$\theta_\pm(\Gamma)$ は前方［後方］光錐内でのみ $+1$ で他では 0 である．$\Gamma(x,y)$, $U(x,y)$, $V(x,y)$ はいずれも x と y の対称関数なので，

(8) $$\mathcal{D}_R(x,y) = \mathcal{D}_A(y,x)$$

が成立する．

(6)を満たす $\mathcal{D}(x,y)$ は

(9) $$\mathcal{D}(x,y) = -\mathcal{D}_R(x,y) + \mathcal{D}_A(x,y)$$

で与えられる．実際 $\mathcal{D}(x,y)$ は明らかに(6)の第1式を満たす．また(6)の2つの初期条件を満足することは，(7)を用いて具体的に確かめることができる．そこで(8)により

(10) $$\mathcal{D}(y,x) = -\mathcal{D}(x,y)$$

であることがわかる．

さて，この D 関数 $\mathcal{D}(x,y)$ を量子重力に拡張するのだが，その前に重力場の共変的正準量子論を簡単に紹介しておく．Einstein の重力定数を $\kappa=1$ とおく．

ゲージ理論や一般相対論のように，局所対称性（任意関数を含む変換に対する不変性）をもつ理論は，そのままでは量子化できないことが知られている．それゆえLagrangian密度にゲージ固定項というものを導入する．さらに，このままでは確率解釈可能な理論にはならないので，BRS（Becchi-Rouet-Stora）対称性と呼ばれる反交換的対称性が成立するようにFP（Faddeev-Popov）ghost項というものを導入しなければならない．重力場の場合，次のようなLagrangian密度から出発すれば最も美しい理論が得られる：

(11) $$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}R - \tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\mu b_\nu - i\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\mu \bar{c}_\rho \partial_\nu c^\rho + \mathcal{L}_M$$

ここに右辺第1項はEinstein-Hilbertの一般相対論のLagrangian密度，第2項はゲージ固定項でB場と呼ばれる$b_\rho(x)$という新しい場を含む．第3項はFermi統計に従うFP ghost $c^\sigma(x)$と$\bar{c}_\tau(x)$のLagrangian密度，$\mathcal{L}_M$は重力場以外の場のLagrangian密度である．B場を導入したおかげで$\int d^4x\,\mathcal{L}$はGL(4)不変になっている．

正準量子化を行なうと，$g_{\mu\nu}(x)$, $b_\rho(x)$, $c^\sigma(x)$, $\bar{c}_\tau(x)$などはすべて量子場すなわち作用素値超関数となる．この理論の極めて著しい特徴は，時空座標x^μと，新しく導入された3つの量子場$b_\rho(x)$, $c^\sigma(x)$, $\bar{c}_\tau(x)$がすべてd'Alembert方程式

(12) $$\partial_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\nu X = 0 \qquad (X = x^\mu,\ b_\rho,\ c^\sigma,\ \bar{c}_\tau)$$

を満たすということである．（Xはある意味で時空座標の拡張になっているので16次元超座標と呼ぶ．）それゆえ，$\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\nu X$が保存流（4次元divergenceがゼロ）であるばかりでなく，XとYという2つの16次元超座標をもってきたとき，$\tilde{g}^{\mu\nu}(\partial_\nu X \cdot Y - X \partial_\nu Y)$を作るとこれもまた保存流となる．このことから16個の生成子$P(X)$と128個の生成子$M(X, Y)$とが存在することがわかる．ここに，これらはそれぞれの保存流の第0成分を3次元空間積分したもので，XとかYとかはここではたんにμやνなどと同じくindexのいみで書いている．$P(X)$と$M(X, Y)$の全体は1つの超代数（graded Lie algebra）をつくる．その構造が極めてPoincaré代数とよく似ているので，それを16次元Poincaré的超代数と呼ぶ．$P(b_\mu)$は並進生成子P_μと同じであり，$gl(4)$の生成子やBRS対称性の生成子などは$M(X, Y)$から構成できる．

量子重力のD関数$\mathcal{D}(x, y)$を定義するにあたって，次の基本仮定を明示しておく：

［1］ 同時空点の量子場の積は（統計符号因子を除き）作用素の順序にはよらない．

［2］ Cauchy問題は係数が作用素値超関数のときでも一意的に解ける．

仮定[1]は Lagrangianを出発点とする場の量子論では不可避的である。この仮定は，積が(反)可換であるという意味ではなくて，同時空点での超関数の積という本来定義されていない量を，何らかの方法で正則化して定義したものはただ1通りに定まるということである。仮定[2]は，量子重力のようにあらわに解くことができない場合へ拡張するときにはどうしても必要である。

重力場の共変的正準量子論におけるD関数 $\mathcal{D}(x,y)$ は，(6)で定義する。ただし今度は $g^{\mu\nu}(x)$ は与えられた関数ではなくて，理論的にきちんと定まっているはずの作用素値超関数であり，$\mathcal{D}(x,y)$ との順序は勝手に入れかえることはできない。定義から次の諸性質が導かれる：

i) $$(\partial_0^x+\partial_0^y)^n\mathcal{D}(x,y)|_0=0 \qquad (n=0,1,2,\cdots)$$
$$(\partial_0^x+\partial_0^y)^n\partial_0^x\mathcal{D}(x,y)|_0=-(\partial_0)^n(g^{00}(x))^{-1}\delta^3(x-y)$$
$$(n=0,1,2,\cdots)$$

これは(6)の初期条件が x^0-y^0 という1つの時間変数に対するものなので，もう1つの時間変数 x^0+y^0 については自由に微分できることから従う。

ii) $(\partial_0^x)^m(\partial_0^y)^n\mathcal{D}(x,y)|_0 \quad (m,n=0,1,2,\cdots)$ はすべて逐次計算できる。

これは i)を用いればすぐにわかる。

iii) $\mathscr{D}(x,y)\overleftarrow{\partial}^{y}_{\mu}\,\tilde{g}^{\mu\nu}(y)\overleftarrow{\partial}^{y}_{\nu}=0$

ただし$\overleftarrow{\partial}_{\mu}$は左にかかる微分である．左辺の量はもちろん$\partial^{x}_{\mu}\tilde{g}^{\mu\nu}(x)\partial^{x}_{\nu}$を左から作用させるとゼロになる．従ってこの量とその∂^{x}_{0}をとったものがともに初期値ゼロであれば仮定[2]によりiii)がいえる．この初期値の計算は，仮定[1]のおかげでii)の結果を使ってやれる．

iv) $\mathscr{D}(y,x)=-\mathscr{D}^{\dagger}(x,y)$

ただしダガー($\dagger$)はHermite共役を示す．これはiii)とi)により$-\mathscr{D}^{\dagger}(y,x)$が$\mathscr{D}(x,y)$と同じCauchy問題の解であることから従う．

v) 積分表示：

$$X(y)=\int d^3z\,\{\partial_{\nu}X(z)\cdot\tilde{g}^{0\nu}(z)\mathscr{D}(z,y)-X(z)\tilde{g}^{0\nu}(z)\partial^{z}_{\nu}\mathscr{D}(z,y)\}$$

$$\mathscr{D}(x,y)=\int d^3z\,\{\partial^{z}_{\nu}\mathscr{D}(x,z)\cdot\tilde{g}^{0\nu}(z)\mathscr{D}(z,y)-\mathscr{D}(x,z)\tilde{g}^{0\nu}(z)\partial^{z}_{\nu}\mathscr{D}(z,y)\}$$

右辺がz^0に依存しないことが重要である．$M(X,Y)$のX,Yの一方または両方を$\mathscr{D}$に置きかえたものが右辺の積分であって，$\mathscr{D}$が左からも右からもd'Alembert方程式を満たすことにより，それは時間によらない．そこでとくに$z^0=y^0$とおくと，(6)の初期値により左辺が得られる．

vi) 16次元Poincaré的超代数に対する共変性：

$$i[P(X),\ \mathcal{D}(x,y)] = \eta(X,x^\lambda)(\partial_\lambda^x + \partial_\lambda^y)\mathcal{D}(x,y)$$

$$i[M(X,Y),\ \mathcal{D}(x,y)] = \eta(Y,x^\lambda)[X(x)\partial_\lambda^x\mathcal{D}(x,y) + \partial_\lambda^y\mathcal{D}(x,y)\cdot X(y)] - (X \leftrightarrow Y)$$

ただし $\eta(b_\rho,x^\lambda)=\delta_\rho^\lambda$, $\eta(X,x^\lambda)=0$ for $X \neq b_\rho$.

証明は両辺の差がd'Alembert方程式を満たし，その初期値と ∂_0^x をとったものの初期値がともにゼロであることを量子場の交換関係を用いて示す．上の式は特別の場合として $\mathcal{D}(x,y)$ のaffine共変性を含んでいる．

以上のように，量子重力の $\mathcal{D}(x,y)$ はPauli-JordanのD関数の極めて自然な拡張になっていることがわかる．

最後にこの $\mathcal{D}(x,y)$ がどのように応用されるのかについて簡単に述べておく．

一般相対論は一般座標変換に対して不変な理論であるが，この不変性は上に述べたように量子化にさいして必然的に失われる．しかし量子論の方が古典論よりも基礎理論であるはずだから，このことは局所対称性の基本的重要性と矛盾しているように思われる．この疑問は，重力場の共変的正準量子論では一般座標変換に対応する局所対称性を示す式が存在し，ある意味で解消されるのである．

$\Phi(x)$ を $b_\rho(x)$, $c^\sigma(x)$, $\bar{c}_\tau(x)$ 以外の場から，一次結合，

積，∂_μなどを有限回組み合わせて作れる任意の局所作用素とする．$\Phi(x)$は古典論では一般座標変換のもとでの変換性は一意的にきまる．すなわち無限小一般座標変換のもとで

(13) $$\Phi'(x)-\Phi(x)=\mathcal{L}_\lambda(\Phi)\,\varepsilon^\lambda(x)$$

と書ける．ここに$\varepsilon^\lambda(x)$は無限小任意関数，$\mathcal{L}_\lambda(\Phi)$はLie微分である．そこで量子論にいくと

(14) $$[\Phi(x),\ b_\rho(y)]=-i\mathcal{L}_\lambda(\Phi)^x\mathcal{D}(x,y)+N.G.$$

という4次元交換関係（これを幾何学的交換関係と呼ぶ）が成立するのである．ここに現れる$\mathcal{D}(x,y)$が上で定義した量子重力のD関数である．N.G.はnon-geometricであって，この部分はb_ρに比例する．

(14)の証明は，まず作用素の順序の問題を回避するために，仮定[1]を利用して，(14)の同時刻および∂_0^yをとってからの同時刻交換関係を数学的帰納法により証明する．次に$b_\rho(y)$に対して積分表示を用いて，交換関係を同時刻のものに帰着させて(14)の左辺を計算するのである．

なお詳しくは

H. Kanno and N. Nakanishi, Indefinite-Metric Quantum Field theory of General Relativity. XIX — Gravitational Pauli-Jordan D Function —, Prog. Theor. Phys. 73 (1983) 496-503

を参照されたい．文献もそこに引用されている．