数理解析研究所講究録
第596巻1986年119-140

段取り作業者のある並列型システムの最大生産率について

名工大生産　田村隆善（Takayoshi Tamura）

1．　はじめに

機械の段取り作業は高度の熟練を必要とすることが多く、特定の作業者（以下、段取り作業者もしくは単に作業者と呼ぶ）が複数の機械の段取りを専門に受け持つことがある。このようなシステムは、機械の性能が同一であれば、単一待ち行列の問題として解析できよう（Tumura［７］、田村、他［６］）。しかし、機械の性能が異なり、機械毎に処理する仕事のグループ（以下、単にジョブと呼ぶ）が違っている場合には、システムを並列型待ち行列の問題として取り扱う必要がある。

一方、生産システムの重要な特性値の一つに生産能力がある。これは段取り時間と加工時間が決められると、システムからの最大アウトプット・レイトすなわち最大生産率（以下では単に生産率と呼ぶ。これはベクトルで表される）で測る

ことができる（山崎、他［８］）。この生産率は一部もしくは全ての機械でのジョブの待ち行列長さが無限のときのアウトプット・レイトと考えられるが、ここでは特に全ての機械での待ち行列長さが無限のときに限定して解析を行う。この場合の生産率は、機械毎に故障率と修理率の異なる故障・修理モデルにおける単位時間当りの修理台数と同じことになる。

生産率は作業者がどの機械の段取りを優先して行うか、すなわち優先規則によって変わってくる。この点に関して、Kameda［２］，［３］は平均加工時間が全ての機械について等しく、段取り時間と加工時間の分布が指数分布[1]という条件のもとで、以下の結果を導いている。

（１）機械台数をｍとするとき、優先規則の選択によって実現できる生産率は、ｍ次元空間の同一平面上にある。

（２）任意の優先規則を用いたときの生産率は、割り込み優先規則を用いたときの生産率（ｍ！通りある）の線形凸結合で表される。

Kamedaはコンピュータシステムへの適用を想定して解析を行っている。しかし、生産システムへの適用を考えるとき、

（１）割り込み優先規則の適用の困難なことがしばしば見られる。

（２）加工時間は機械によってかなり異なる。

といった条件を考慮する必要があるように思える。

そこで本稿では、これらの条件がKamedaのモデルに加ったときの生産率と優先規則の間の関係について考察する。

2．モデルの定義と平衡方程式

2．1　モデルの定義

本研究で対象とするシステムの構成は、以下の通りとする。

（1）ジョブ　…　サービスを受ける客のことをジョブと呼ぶことにする。ジョブには機械の種類mに対応してm個のジョブがある。

（2）機械　…　性能の異なる（自動）機械がm台ある。各ジョブは加工が終わると次の段取りを受ける。機械の状態は作業者が空くのを待つ段取り待ち、段取り中、ならびに稼働中（加工中）の3状態に分けられる。加工時間は機械毎に異なり、平均がμ_{pi}，$i=1, 2, \cdots, m$，の指数分布とする。

（3）段取り　…　一人の作業者がこれらm台の機械の段取りを担当しており、段取り時間は平均がμ_{si}，$i=1, 2, \cdots, m$，の指数分布とする。段取りの中断は考えない。

（4）生産率…各機械からのジョブのアウトプット・レイトであり、r_i，$i=1, 2, \cdots, m$，で表すことにする。

（５）優先規則…作業者がある機械での段取りを終了したとき、段取り待ちの機械があれば、そのなかの１台について必ず段取りを開始する。割り込み優先は認めない。優先規則には確率的規則を用いることとし、いつも決って特定の機械の段取りを優先的に行う規則を特に確定的規則（fixed priority）と呼ぶことにする。

２．２　平衡方程式

全ての機械の（添え字）集合をＵ、加工中の機械の集合をＭ、段取り待ち機械の集合をＷ、Ｗの中から段取りのために機械ｊが選択される確率を$\eta_j(W)$、作業者が機械ｊの段取りを行っているときのシステムの状態を(M, W, S_j)、その定常状態確率を$p(M, W, S_j)$、全ての機械で加工の行われているときの状態を$(M, \Phi, *)$あるいは$(U, \Phi, *)$、その定常状態確率を$p(M, \Phi, *)$で表す。このとき、平衡方程式は次式で与えられる。ただし、Φは空集合を表す。

$$-\{\sum_{k \in M} \mu_{pk} + \mu_{sj}\}\, p(M, W, S_j)$$

$$+ \sum_{k \in M} \mu_{sk}\, \eta_j(W+\{j\})\, p(M-\{k\}, W+\{j\}, S_k)$$

$$+\sum_{k\in W} \mu_{pk}\, p\,(M+\{k\},W-\{k\},S_j) = 0$$

$$\forall(M,W,S_j) \qquad (1)$$

$$-\{\sum_{k\in U} \mu_{pk}\}\; p\,(U,\Phi,*)$$

$$+\sum_{k\in U} \mu_{sk}\, p\,(U-\{k\},\Phi,S_k) = 0 \qquad (2)$$

$$\sum_{\forall(M,W,S_j)} p\,(M,W,S_j) + p\,(U,\Phi,*) = 1 \qquad (3)$$

生産率は次式で与えられる。

$$r_j = \mu_{sj} \sum_{\forall M} p\,(M,W,S_j), \quad j=1,2,\cdots,m \qquad (4)$$

ここで、ηを優先規則ベクトル、Pを定常状態確率ベクトル、A（η）を平衡方程式（１）、（２）の係数行列、eを全ての要素が１のベクトルとするとき、（１）～（４）式はベクトル形式によって,以下のように表すことができる。

$$A(\eta)P = 0 \qquad (5)$$

$$e^T P = 1 \qquad (6)$$

$$r = (r_1, r_2, \cdots, r_m)^T$$

$$= EP \qquad (7)$$

なお、以下では特別な場合を除き、生産率ベクトルならびに定常状態確率ベクトルを単に生産率ならびに定常状態確率

と呼ぶことにする。

3. 解　　析

システムの状態は有限次元マルコフ連鎖となることから、平衡方程式（１）～（３）は優先規則が与えられると容易に解くことができる。この節では優先規則を変化させたとき、システムの生産率がｍ次元ベクトル空間上でどの様な軌跡を描くかを検討する。

ｍ＝２の場合は、優先規則が関係しないことから、(μ_{p1}, μ_{p2}) と (μ_{s1}, μ_{s2}) が与えられると、生産率は一意に決まる。したがって、２機械問題での生産率ｒは２次元ベクトル空間上の１点となる。

機械が３台以上になると、段取りの優先規則が必要になる。ｍ＝３の場合は、機械ｉと機械ｊの中からｉが選ばれる確率を $\eta_i(i,j)$ で表すとき、次の３つの値を設定する必要がある。

１）$\eta_1(1,2) \geq 0$,　あるいは

$$\eta_2(1,2) = 1 - \eta_1(1,2) \geq 0$$

２）$\eta_2(2,3) \geq 0$,　あるいは

$$\eta_3(2,3) = 1 - \eta_2(2,3) \geq 0$$

３）$\eta_1(1,3) \geq 0$,　あるいは

$$\eta_3(1,3) = 1 - \eta_1(1,3) \geqq 0$$

これらの値は各々独立に設定できる。優先規則をベクトル、

$$\eta = (\eta_1(1,2),\ \eta_2(2,3),\ \eta_1(1,3)) \qquad (8)$$

によって表すとき、確定的規則には次の8通りがある。

$$\left.\begin{array}{l}
1)\ \eta_a = (1,\ 1,\ 1) \\
2)\ \eta_b = (1,\ 0,\ 1) \\
3)\ \eta_c = (1,\ 0,\ 0) \\
4)\ \eta_d = (0,\ 0,\ 0) \\
5)\ \eta_e = (0,\ 1,\ 0) \\
6)\ \eta_f = (0,\ 1,\ 1) \\
7)\ \eta_g = (1,\ 1,\ 0) \\
8)\ \eta_h = (0,\ 0,\ 1)
\end{array}\right\} \qquad (9)$$

一般に、任意の優先規則は確定的規則の線形凸結合によって表すことができる（証明略）。確定的規則の数は以下のようになる。

段取りを待っている機械の集合W（ただし、$|W| \geqq 2$）に適当な番号を付けて、これをW_1, W_2, …, W_Tと表す。ただし、Tは集合の数であって、次式によって与えられる。

$$T = \sum_{i=2}^{m-1} C_m{}^i = 2^m - (m+2) \qquad (10)$$

これら全てのW_tに対して優先規則を独立に設定できる。確定的規則はW_tに属する特定の機械の段取りをいつも優先的に行う規則と定義したが、それは各W_tに対して$|W_t|$通り設定できる。このため、確定的規則の数は、$C_m{}^i$をm個の中からi個を選ぶ組合せの数とするとき、

$$L = \prod_{i=2}^{m-1} i^{C_m{}^i} \qquad (11)$$

通りあることになる。例えば、m＝3のときには8通り、m＝4のときには、実に$2^6 \times 3^4 = 5184$通りとなる。このように、4台以上になると選択できる確定的規則の数は膨大になる。以下では確定的規則の集合をVで表すことにしよう。

本稿の主な結果を以下に示す。

補題1．　m≧3の場合、確定的規則を用いたときの定常状態確率の任意の線形凸結合について、これを定常状態確率とする適当な優先規則が存在する。すなわち、確定的規則η_i、i∈V、を用いたときの定常状態確率をP_iとするとき、

$$\left.\begin{aligned} P &= \sum_{i \in V} \xi_i P_i \\ \sum_{i \in V} \xi_i &= 1 \\ \xi_i &\geq 0, \quad \forall i \in V \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

を定常状態確率にもつ適当な優先規則ηが存在する。

（証明）（12）式を平衡方程式（5）に用いると、次のように変形できる。

$$
\begin{aligned}
A(\eta)\sum_{i\in V}\xi_i P_i
&= \sum_{i\in V}\xi_i A(\eta_i)P_i + \sum_{i\in V}\xi_i\,(A(\eta)-A(\eta_i))\,P_i \\
&= \sum_{i\in V}\xi_i\,(A(\eta)-A(\eta_i))\,P_i
\end{aligned}
$$

これより、

$$\sum_{i\ V}\xi_i\,(A(\eta)-A(\eta_i))\,P_i = 0 \qquad (13)$$

を満たすηが求められればよい。上式の左辺の非ゼロ要素は、$\eta_j(W_t)$を係数にもつ項だけであるから、（13）式の要素は次のように表せる。

$$\sum_{i\in V}\xi_i\,\{\eta_j(W_t)-\eta_{ij}(W_t)\}\sum_{k\in M}\mu_{sk}\,p_i(M-\{k\},W_t,S_k) = 0,$$
$$\forall j\in W_t,\ \forall t \qquad (14)$$

ただし、$\eta_{ij}(W_t)$は確定的規則η_iの要素とする。（14）式

を$\eta_j(W_t)$について解くと、次式が得られる。

$$\eta_j(W_t) = \frac{\sum_{i \in V} \xi_i \eta_{ij}(W_t) P_i(W_t)}{\sum_{i \in V} \xi_i P_i(W_t)}, \forall j \in W_t, \ \forall t \qquad (15)$$

ただし、

$$P_i(W_t) = \sum_{k \in M} \mu_{sk} p_i(M-\{k\}, W_t, S_k) \qquad (16)$$

ここで、

$$\sum_{j \in W_t} \eta_{ij}(W_t) = 1$$

であるから、(15) 式の$\eta_j(W_t)$をjについて総計すると1になる。すなわち、

$$\sum_{j \in W_t} \eta_j(W_t) = \sum_{j \in W_t} \frac{\sum_{i \in V} \xi_i \eta_{ij}(W_t) P_i(W_t)}{\sum_{i \in V} \xi_i P_i(W_t)}$$

$$= \frac{\sum_{i \in V} \xi_i \left\{\sum_{j \in W_t} \eta_{ij}(W_t)\right\} P_i(W_t)}{\sum_{i \in V} \xi_i P_i(W_t)} = 1$$

□

(15) 式より、実行可能な任意の定常状態確率に対して優先規則は唯一つ定まる。補題1の逆を次に述べよう。

<u>補題2.</u>　$m \geqq 3$ の場合、任意の優先規則を用いたときの定常状態確率は、確定的規則によるときの定常状態確率の線形凸結合によって表すことができる。

(証明) 補題を証明するには任意の優先規則 η に対して、(13) 式を満たす非負の $\{\xi_i\}$ の存在することが示せればよい。

全ての W_t に対して、優先規則を独立に設定できるため、$s_t = |W_t|$ とおくとき、W_t に対する優先規則だけが異なり、他の W_τ, $\tau \neq t$, に対する優先規則が全て等しい確定的規則は s_t 個存在する。いま、全ての W_τ, $\tau > t$, に対する優先規則が等しい確定的規則の集合を V^*_{tk} で、その添え字 k の集合を U_t で表す。集合 U_t の要素は $L / s_1 s_2 \cdots s_t$ 個ある。さらに次の集合を定義する。

$$\left.\begin{array}{ll} V_{1k} = V^*_{1k}, & \forall k \in U_1 \\ V_{tk} = \{a \mid V^*_{t-1,a} \subset V^*_{tk},\ a \in U_{t-1}\}, & \forall k \in U_t \end{array}\right\} \tag{17}$$

このとき、$V^*_{t-1,a}$ に属する確定的規則 η_i の要素を $\eta_{aj}(W_t)$ とすると、任意の正の実数 $\{q_{ta}\}$ について次式を満た

す非負の実数 $\{f_{ta}\}$ が存在する。

$$\left.\begin{aligned}\sum_{a\in V_{tk}} f_{ta}\{\eta_j(W_t)-\eta_{aj}(W_t)\}\,q_{ta} &= 0, \forall j\in W_t\\ \sum_{a\in V_{tk}} f_{ta} &= 1\end{aligned}\right\}\forall V_{tk} \qquad (18)$$

なぜなら、任意の V_{tk} について、

$$\{\eta_{t1},\ \eta_{t2},\ \cdots,\ \eta_{ts}\} = \{\eta_j(W_t)\}$$

とおくとき、一般性を失うことなく、(18) 式は行列形式によって次のように表せる。

$$\begin{pmatrix} (\eta_{t1}-1)q_{t1} & \eta_{t1}q_{t2} & \cdots & \eta_{t1}q_{ts}\\ \eta_{t2}q_{t1} & (\eta_{t2}-1)q_{t2} & \cdots & \eta_{t2}q_{ts}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \eta_{ts}q_{t1} & \eta_{ts}q_{t2} & \cdots & (\eta_{ts}-1)q_{ts}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_t\\ f_t\\ \vdots\\ f_t\end{pmatrix} = 0 \qquad (19)$$

これより、明らかであろう。

ここで、(14) 式より、

$$\left.\begin{aligned} q_{1i}(t) &= \sum_{j\in M}\mu_{sj}\,p_i(M-\{j\},W_t,S_j),\ \forall i\in V, \forall t\\ q_{tk}(\tau) &= \sum_{a\in V_{t-1,k}} f_{t-1,a}\,q_{t-1,a}(\tau), \forall k\in U_{t-1}, \forall \tau\geqq t,\ t\geqq 2\end{aligned}\right\}$$

$$(20)$$

$$q_{tk} = q_{tk}(t), \qquad \forall k\in U_{t-1}, \forall t \qquad (21)$$

$$f_{ti} = f_{tk}, \forall i\in V^{*}_{t-1,k}, \forall k\in U_{t-1},\ t\geqq 2 \qquad (22)$$

とおくとき、(13)式を満たす $\{\xi_i\}$ を次式によって求めることができる。

$$\xi_i = \prod_{t=1}^{T} f_{ti} \qquad (23)$$

その総和が1であることは、以下の手順から分かる。

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in V} \xi_i &= \sum_{i\in V} f_{1i} f_{2i} \cdots f_{Ti} \\
&= \sum_{k\in U_1} f_{2k} \cdots f_{Tk} \{\sum_{i\in V_{1k}} f_{1i}\} \\
&= \sum_{k\in U_1} f_{2k} \cdots f_{Tk} \\
&\cdots\cdots\cdots \\
&= \sum_{k\in U_T} f_{Tk} = 1
\end{aligned}$$

□

補題1と補題2をまとめたものを定理として与えておく。

<u>定理．</u>　優先規則を操作して実現できる定常状態確率の領域は、状態確率ベクトル空間上で、確定的規則を用いたときの定常状態確率の凸被覆(convex hull)となる。　□

このため、優先規則を操作して実現できる生産率の領域も、生産率ベクトル空間上の凸多面体となり、それらの頂点は確

定的規則を用いたときの生産率からなる。以下では、これら状態確率ベクトル空間上の凸多面体ならびに生産率ベクトル空間上の凸多面体を各々O_PとO_Rで表す。

この定理によって、優先規則の最適化問題は、生産率に関する下に凸の関数の最小化が目的ならば、局所的最適解が全域的最適解となる。特に、目的関数が線形のときには、確定的規則の１つが最適となる。しかし、mが増えると確定的規則の数は膨大になるので、最適解の探索は優先規則を変数とした非線形計画問題として扱った方が効率的であろう。

確定的規則を用いたときの定常状態確率に関して、さらに次の性質が導ける。

<u>系１.</u>　任意の確定的規則について、それを用いたときの定常状態確率は、他の確定的規則によるときの定常状態確率の線形凸結合によって表すことができない。

（証明）（15）式から、定常状態確率が与えられると、それを実現する優先規則は一意に定まる。そこで、任意の確定的規則η_iについて、この値を（15）式の左辺に代入したとき、$\xi_i = 1$以外の値が存在するかどうかを検討すればよい。一般性を失うことなく、η_iの要素を次のようにおくことができる。

$$\eta_{i,k(t)}(W_t) = 1$$

$$\eta_{ij}(W_t) = 0, \quad \forall j \neq k(t)$$

これらの値を（15）式の左辺に代入すると、任意の確定的規則η_g, $g \neq i$，について、$\eta_{g,k(t)}(W_t)=0$のとき$\xi_g=0$でなければばならない。このため、$\xi_g>0$なる確定的規則η_gについて、

$$\eta_{ij}(W_t) = \eta_{gj}(W_t), \quad \forall j \in W_t$$

となる。これは全てのtに対して成り立つ。 □

いま、2つの確定的規則η_fとη_gの距離を、

$$D(f,g) = \sum_{\forall t} \sum_{j \in W_t} | \eta_{fj}(W_t) - \eta_{gj}(W_t) | / 2 \qquad (24)$$

によって定義し、この距離が1ならば、これらの確定的規則は隣接していると呼ぶことにする。このとき、補題2の証明で用いた手順によって、次の性質を導くことができる。

<u>系2.</u>　O_Rの稜線（edge）は隣接した2つの確定的規則を用いて実現できる生産率を結ぶ線分のみからなる。 □

証明は脚注2に示す。もちろん、O_Pの全ての稜線がO_Rの稜線になる（写像される）とは限らない。

系2より、3機械問題においてO_Rが平面とならないならば、O_Rの各頂点に集まる稜線の数が高々3本であること、ならびに距離が3の頂点を結ぶ線分上の点がO_Rの内点となることか

ら、O_Rは六面体になる。

4. 数値例

(1) 例1

最初に、

$$\mu_{p1}=\mu_{p2}=\mu_{p3}=1, \quad \mu_{s1}=\mu_{s2}=\mu_{s3}=1$$

の場合について検討しよう。確定的規則を用いたときの生産率は以下のようになる。

$$r_a=(51/144, 125/384, 33/128)^T$$

$$r_b=(51/144, 33/128, 125/384)^T$$

$$r_c=(125/384, 33/128, 51/144)^T$$

$$r_d=(33/128, 125/384, 51/144)^T$$

$$r_e=(33/128, 51/144, 125/384)^T$$

$$r_f=(125/384, 51/144, 33/128)^T$$

$$r_g=r_h=(5/16, 5/16, 5/16)^T$$

この例ではμ_{pi}を全ての機械について等しくとったが、この場合、これらの値は全て同一平面上に存在し（Kameda［3］）、その平面は次式で与えられる。

$$(16/15)r_1+(16/15)r_2+(16/15)r_3 = 1 \qquad (25)$$

しかし、どの問題についても生産率が全て同一平面上にあ

るとは限らない。次の例を見てみよう。

（２）例２

$\mu_{p1}=10$, $\mu_{p2}=20$, $\mu_{p3}=30$,

$\mu_{s1}=30$, $\mu_{s2}=20$, $\mu_{s3}=10$

とするとき、確定的規則によるときの生産率ベクトルは、各々以下のようになる。

$$r_a=(4.882351597,\ 5.484963974,\ 5.152074417)^T$$

$$r_b=(4.791009566,\ 4.304675821,\ 5.789082551)^T$$

$$r_c=(4.296157784,\ 4.214930576,\ 6.014620897)^T$$

$$r_d=(2.878482255,\ 5.402605899,\ 5.924603391)^T$$

$$r_e=(2.894102171,\ 5.805744354,\ 5.712563034)^T$$

$$r_f=(4.312305752,\ 6.040493671,\ 5.076798342)^T$$

$$r_g=(4.207003589,\ 5.210495683,\ 5.537637016)^T$$

$$r_h=(4.168013316,\ 5.296370512,\ 5.510164507)^T$$

ここで次の行列式を計算してみる。

$$|B|=\begin{vmatrix} r_a & r_b & r_c & r_d \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=0.00173939$$

これは行列Ｂが正則であり、r_a, r_b, r_c, r_dが同一平面上にないことを意味する。

5．　おわりに

本研究ではm台の異なった機械の段取りを1人の作業者が担当しているシステムの生産率が、段取りの優先規則によってどのように変化するかを、割り込み優先は認めない、各機械においてジョブ（仕事）の待ちが常に存在する、という仮定のもとで考察した。結果を要約すると以下のようになる。

（1）優先規則を変化させたとき、生産率が生産率ベクトル空間上で描く軌跡の集合はこの空間上の凸多面体となり、その頂点は確定的規則によるときの生産率のみからなる。また、その稜線は隣接した確定的規則を結ぶ線分によって構成される。

（2）特に3機械問題でのそれは、平面もしくは六面体となる。

（3）平均加工時間が機械毎で異なる場合、確定的規則によるときの全ての生産率が必ずしも同一平面上にないことを数値例によって示した。

（1）より、生産率に関する線形関数の最適化問題では、確定的規則の一つが最適となり、下に凸の関数を最小化する問題は、部分的最適解が全域的最適解となる。

脚　注

1）Kamedaは指数分布より若干広いクラスの分布について論じており、この記述は少し正確でない。

2）いま、(24) 式で定義されるη_fとη_gの距離をdとする。η_fとη_gはd個のW_tに対して優先規則が異なり、他のW_tに対する優先規則は等しい。そこで、任意の優先規則η_iについて、W_tに対するその小ベクトルを$\eta_i(W_t)$で表すとき、

$$\eta_f(W_t) \neq \eta_g(W_t), \qquad t = 1, \cdots, d$$

$$\eta_f(W_t) = \eta_g(W_t), \qquad t \geq d + 1$$

とおける。このとき、

$$P = \xi P_f + (1 - \xi) P_g, \quad 1 > \xi > 0 \qquad (25)$$

を定常状態確率にもつ優先規則は、(15) 式より次のように表すことができる。

$$\left.\begin{aligned} \eta_{a(t)}(W_t) &= \frac{\xi P_f(W_t)}{\xi P_f(W_t) + (1-\xi) P_g(W_t)} < 1 \\ \eta_{b(t)}(W_t) &= \frac{(1-\xi) P_g(W_t)}{\xi P_f(W_t) + (1-\xi) P_g(W_t)} < 1 \\ \eta_j(W_t) &= 0, \qquad \forall j \neq a(t), b(t) \end{aligned}\right\}$$

$$t = 1, \cdots, d \qquad (26)$$

19

ここで、次の確定的規則を考えよう。

$$\left.\begin{array}{ll}\eta_i(W_t) = \eta_f(W_t),\ \text{もしくは}\ \eta_g(W_t), & t \leqq d \\ \eta_i(W_t) = \eta_f(W_t) = \eta_g(W_t), & t \geqq d+1\end{array}\right\} \quad (27)$$

これらの優先規則は2^d個あり、その添え字集合をV_{fg}で表す。(19)式にこれらの確定的規則を適用すると、

$$q_{ta} = 0, \quad a \geqq 3, \quad \forall t$$

$$\eta_{ta} = 0, \quad a \geqq 3 \quad \forall t$$

とおける。このため、(27)式で与えられる優先規則に対して(それら以外のものに対しては、(13)式におけるξ_iをゼロとおく)、補題2の証明の手順から非負の実数$\{\xi_i\}$を求めることができる。しかも、(27)式で与えられる優先規則に対するξ_iは全てゼロでない。したがって、(25)式で与えられるPは2^d個の定常状態確率によって表せることになる。このため、η_fとη_gの距離が2以上で、生産率r_fとr_gを除く$r_i = EP_i$、$\forall i \in V_{fg}$、の1つでもr_fとr_gを結ぶ線分上になければ、r_fとr_gを結ぶ線分はO_Rの稜線とはなりえない。一方、全てのr_i、$\forall i \in V_{fg}$、がr_fとr_gを結ぶ線分上にあれば、明らかに、この線分はV_{fg}に属する隣接したいくつかの優先規則を結んで表すことができる。

文　　献

[1] Coffman,E.G.Jr., and Mitrani,I.: A Characterization of Waiting Time Performance Realizable by Single-Server Queues, Opns. Res., Vol.28-3(1980),810-821.

[2] Kameda,H.: A Finite-Source Queue with Different Customers, J. Assoc. Comput. Mach., Vol.29-2(1982), 478-491.

[3] Kameda,H.: Realizable Performance Vectors of a Finite-Source Queue, Opns. Res., Vol.32-6(1984), 1358-1367.

[4] Kleinrock,L.: A Conservation Law for a Wide Class of Queueing Disciplines, Naval Res. Log. Quart., Vol.12(1965), 181-192.

[5] Kleinrock,L.: QUEUEING SYSTEMS, John Wily & Sons (1976), 106-155.

[6] 田村，川口：m台の機械、s人の段取り作業者からなる生産システムの特性解析，J. Opns. Res. Soc. Japan, Vol.28-3 (1985), 195-212.

[7] Tumura,Y.,: On the Steady Probabilities Concerned with Tandem Queue, T. R. U. Math., Vol.2 (1966), 1

-11.

[8] 山崎，逆瀬川，川島：フローショップの可逆性を用いた生産率の推定，日本機械学会論文集、43-369 (1976), 1985-1994.