数理解析研究所講究録
第 596 巻 1986 年 244-248

ＰＨ/ＰＨ/ｃ 待ち行列の rate matrix について

東北大・経　髙橋幸雄 (Yukio Takahashi)

１．はじめに

窓口ごとにサービス時間分布が異なる ＰＨ/ＰＨ/ｃ 待ち行列モデルでは、定常確率ベクトル π の rate matrix Ｒ はモデルの構造を分析する上で重要な情報を含んでいる。ここでは Ｒ の固有値が満たすべき方程式を調べ、その解から定常確率ベクトル π および待ち時間分布 Ｗ(ｘ) の形を求める方法を示す。この結果は、Ｒ の最大固有値に対する［３］および［４］の結果の精密化であり、［３］の手法を用いれば容易に ＧＩ/ＰＨ/ｃ モデルへと一般化することができる。また、ある意味で、石川明彦氏が［１］および［２］で $GI/E_K/c$ に対して導いた結果の一般化とみなすこともできる。

２．定常状態確率ベクトルと rate matrix Ｒ

窓口ごとにサービス時間分布が異なる ＰＨ/ＰＨ/ｃ 待ち行列モデルを考え、その到着時間分布を $T(x)=1-a_0\exp(Q_0x)e_0$、第ｊ窓口におけるサービス時間分布を $S_j(x)=1-a_j\exp(Q_jx)e_j$ とする。それらの期待値をそれぞれ $\lambda=-a_0Q_0^{-1}e_0$、$\mu_j=-a_jQ_j^{-1}e_j$ とすると、利用率 $\rho=\lambda/\sum_j\mu_j<1$ ならば、充分に長い時間の後にシステムは平衡状態に到達する。

システムの状態を、系内人数と到着過程の相番号および各窓口におけるサービス過程の相番号の組としてとると、システムの推移は時間パラメータ連続なマルコフ連鎖によって記述できる。このマルコフ連鎖の無限小生成作用素はブロック３重対角行列となり、系内人数 ｎ が ｃ より大きい場合に対応する対角線上のブロック A_1、対角線より上方のブロック A_0、対角線より下方のブロック A_2 は、それぞれつぎのような形をしている。

$$
\begin{aligned}
A_0 &= q_0 a_0 \otimes I_1 \otimes \cdots \otimes I_c \\
A_1 &= Q_0 \oplus Q_1 \oplus \cdots \oplus Q_c \qquad (1)\\
A_2 &= I_0 \otimes (q_1 a_1 \oplus \cdots \oplus q_c a_c)
\end{aligned}
$$

ここで、$q_j = -Q_j e_j$ であり、また、⊗と⊕はそれぞれ行列のクロネッカー積および和の演算を表わしている。到着間隔分布および各窓口におけるサービス時間分布の相の数を $s_0, s_1, ..., s_c$ とすれば、これらの小行列の次数は $s_0 s_1 \cdots s_c$ である。

定常状態確率ベクトル π は（1）のような係数行列をもった連立一次方程式の解として求められるが、無限小生成作用素の特殊な構造から、π を系内人数で分割した小ベクトル π_n は、$n \geqq c$ において等行列比ベクトルになる、つまりある公比行列 (rate matrix) R が存在して

(2) $$\pi_n = \pi_c R^{n-c} \qquad (n \geqq c)$$

となる、ことが知られている。

このときの rate matrix R は行列方程式

(3) $$A_0 + R A_1 + R^2 A_2 = 0$$

を満たす非負の最小解である。R は、$R_0 = 0$ から出発して、反復

(4) $$R_{k+1} = -A_0 A_1^{-1} - R_k^2 A_2 A_1^{-1}$$

によって定まる行列列 $\{R_k\}$ の極限として与えられる。

3．R の最大固有値

分布 $T(x)$ および $S_j(x)$ の Laplace-Stieltjes 変換をそれぞれ $T^*(z) = a_0(zI_0 - Q_0)^{-1} q_0$、$S_j^*(z) = a_j(zI_j - Q_j)^{-1} q_j$ とし、これらを複素数全体 C（ただし特異点は除く）の上の関数と考える。すると、方程式

(5) $$T^*(\textstyle\sum_i \theta_i) S_j^*(-\theta_j) = 1 \qquad j=1,2,...,c$$

はただ一組の正数解 θ_j, j=1,2,...,c, をもつ。［3］および［4］では、これらについてつぎの結果が得られている。

Lemma 1. 非負行列 R の最大固有値 (Perron-Frobenius 根) は

(6) $$\eta_0 = T^*(\textstyle\sum_i \theta_i)$$

で与えられる。さらに、平衡状態において系内に n 人の客がいる確率を P_n、待ち時間分布を $W(x)$ とすると、

(7) $$\begin{aligned} &P_n \sim K \eta_0^n && n \to \infty \text{ のとき} \\ &1 - W(x) \sim K' \exp(-\textstyle\sum_i \theta_i x) && x \to \infty \text{ のとき} \end{aligned}$$

である。

ここでの目的は、この Lemma 1 を R のすべての固有値に対して拡張することである。

4．主要な結果

R の一般の固有値に対して、つぎの結果が証明される。ここでは結果をみやすくするため、上の θ の替りに $-\theta$ に相当する ω を用いて表現する。

Main Theorem （i） $\eta, \omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_C$ を、つぎの方程式を満足する(実数とはかぎらない) c+2個の数の組とする。

$$\eta = T^*(\omega_0)$$

(8) $$\eta^{-1} = S_j^*(\omega_j) \qquad j=1,2,\ldots,c$$

$$\sum^{c}_{j=0} \omega_j = 0$$

もし $|\eta|<1$ ならば、η は R の固有値であり、対応する R の左固有ベクトルは

(9) $$\chi = x_0 \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_C \qquad \text{ここで} \quad x_j = a_j(\omega_j I - Q_j)^{-1}$$

である。

（ii） $s_0 \neq 1$のとき、R は 0 という固有値をもち、その多重度は少なくとも $(s_0-1)s_1 \cdots s_C$ である。ごく弛い条件の下で、残りの（多重度分を重複して数えた） $s_1 \cdots s_C$ 個の固有値は非零であり、それらはすべて上のような形で与えられる。

（iii） R の非零固有値が（8）のように与えられると、（7）式はつぎのように精密化される。

(10) $$P_n = \sum_k K_k \eta_k^n \qquad n \geqq c$$
$$1 - W(x) = \sum_k K_k' \exp(-\omega_{k0} x)$$

ここで η_k や ω_{k0} は、k番目の固有値に対する η や ω_0 を表わしており、K_k や K_k' は未知定数である。$\sum$ は $s_1 \cdots s_C$ 個の非零固有値に対してとる。(10) の第一式は、より詳細な

(11) $$\pi_n = \sum_k K_k'' \eta_k^n \chi_k$$

から導かれる。ここで χ_k はk番目の固有値に対する（9）式のベクトル χ であり、K_k'' は別な未知定数である。未知定数 K_k、K_k' および K_k'' の間には簡単な関係式が成り立つ。

5．証明のアウトライン

つぎのような一連の Lemmas を通して Main Theorem を証明する。

Lemma 2. $s_0 \geqq 2$ のとき、R は固有値 0 を持ち、その多重度は少なくとも $(s_0-1)s_1 \cdots s_C$ である。

証明は次のようにして行う。(4) から、R は、ある $s_1 \cdots s_C \times s_0 s_1 \cdots s_C$ 行列 R_0 を用いて

(12) $$R=(q_0 \otimes I_1 \otimes \cdots \otimes I_C)R_0$$

と書くことができる。したがって行列 $q_0 \otimes I_1 \otimes \cdots \otimes I_C$ に左からかけると0ベクトルとなるような $(s_0-1)s_1 \cdots s_C$ 本の互いに一次独立な行ベクトルは R の固有値 0 に対応する左固有ベクトルとなる。

Lemma 3. つぎの2つの条件の下で R の任意の固有値 η は (8) のように書ける。

(i) Q_J の固有値および固有ベクトルで、$x_J Q_J = \omega_J x_J$ かつ $x_J e_J = 0$ となるものはない。

(ii) R は $s_0 s_1 \cdots s_C$ 個の互いに一次独立な固有ベクトルをもつ。

証明には、いくつかの行列のクロネッカー和の固有値は、もとの行列の固有値の和であることを利用する。

Lemma 4. Lemma 2 の証明で導入した行ベクトルと、(9) で与えられる行ベクトルの中から適当に $s_0 s_1 \cdots s_C$ 本のベクトルを選び、それらを対応する固有値の固有ベクトルとするような $s_0 s_1 \cdots s_C$ 次の正方行列を R' とすると、R' は方程式 (3) の（正とは限らない）ひとつの解である。逆に、(3) の解はすべてこのような形で表わされる。

Lemma 5. (3) の解の中で、すべての固有値の絶対値が1より小さいものは、ただひとつしかない。

2つあったとすると、(3) を用いて、それらが一致しなければならないことを示ことができる。

References

[1] Ishikawa, A. (1984) Stationary waiting time distribution in a $GI/E_k/m$ queue. JORSJ, 27, 130-150.

[2] Ishikawa, A. (1985) Eigenvalues of the transition rate matrices in a $GI/E_k/m$ queueing system. JORSJ, 28, 285-301.

[3] Neuts, M. F. and Y. Takahashi (1981) Asymptotic behavior of the stationary distributions in the GI/PH/c queue with heterogeneous servers. Zeit. Wahr. Ver. Geb., 57, 441-452.

[4] Takahashi, Y. (1981) Asymptotic exponentiality of the tail of the waiting-time distribution in a PH/PH/c queue. Adv. Appl. Prob., 13, 619-630.