数理解析研究所講究録
第596巻 1986年 293-299

M/G/1 集団サービス型待ち行列に埋め込まれたマルコフ連鎖について

阪大工学部 池田重吉 (Zyūkiti Ikeda)
西田俊夫 (Toshio Nishida)

1. はじめに

ここでは待ち行列システムによく現われる，次のような推移行列と状態 $S=\{(0,j);1\le j\le m_0\}\cup\{(i,j);i\ge 1,1\le j\le m\}$ を持つ既約・非周期的なマルコフ連鎖を考える。

$$
(1)\qquad P=\begin{bmatrix}
B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & \cdots \\
B_{-1} & A_0 & A_1 & A_2 & \cdots \\
 & A_{-1} & A_0 & A_1 & \cdots \\
 & & A_{-1} & A_0 & \cdots \\
 & & & A_{-1} & \cdots \\
 & \text{\Large O} & & & \ddots
\end{bmatrix},
$$

ただし $A_i\ (i\ge -1)$, $B_i\ (i\ge 1)$, B_{-1}, B_0 はそれぞれ $(m\times m)$, $(m_0\times m)$, $(m\times m_0)$, $(m_0\times m_0)$ サイズの小行列とする。

P について次のことを仮定する。　i) $A=\sum_{i=-1}^{\infty}A_i$ は既約な

行列とする。 ii) A_{-1}は逆行列を持つとする。 ただし, ii) の条件は不必要で, ii)′ A_{-1}の各列は少なくとも1つ正の要素をもつ, に置き換えることができる, この場合結論はやや複雑になる。

まず結論を示す。次の記号を用意する。

$$ {}^{t}\mathbf{a} = \sum_{0}^{\infty} (i+1) A_i \, {}^{t}\mathbf{e} \quad , \quad {}^{t}\mathbf{b} = \sum_{0}^{\infty} (i+1) B_i \, {}^{t}\mathbf{e} \quad , \quad \mathbf{e} = (1, 1, \cdots, 1) $$

$$ Q_n = \sum_{M} C_{i_1} \cdots C_{i_m} $$

(2) $$ R_n = \sum_{M} D_{i_1} \cdots D_{i_m} \quad , \quad M = \{(m, i_1, \cdots, i_m) ; i_1 + \cdots + i_m = n, \ i_\ell > 0\} $$

$$ \hat{Q}_n = \sum_{\ell=0}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{-\ell+1+n} B_j A_{-1}^{-1} \Big) Q_\ell $$

ただし, $C_n = (I - A_{-1} - A_0 - \cdots - A_{n-1}) A_{-1}^{-1}$, $D_n = A_{-1}^{-1} (I - A_{-1} - \cdots - A_{n-1})$ とする。

また, π を A の定常分布とする。

Theorem 1.

推移行列 P を持つマルコフ連鎖について,

正再帰的 $\Longleftrightarrow$ $\pi\, {}^{t}\mathbf{a} < 1$ & ${}^{t}\mathbf{b}$ の全ての要素が有限

(3) 零 〃 $\Longleftrightarrow$ $\pi\, {}^{t}\mathbf{a} = 1$ または, $\pi\, {}^{t}\mathbf{a} < 1$ & ${}^{t}\mathbf{b}$ のある要素が無限

推移的 $\Longleftrightarrow$ $\pi\, {}^{t}\mathbf{a} > 1$ 。

正再帰的の場合, 定常分布 $x = (x_0, x_1, \cdots)$ は次のように得られる。まず, $m \times m$ 行列 R を行列方程式

(4) $$ R = A_{-1} + A_0 R + A_1 R^2 + \cdots $$

の非負の最小解とする。このとき

$$
(5)\quad
\begin{aligned}
&(x_0, x_1) = (x_0, x_1)\begin{bmatrix} B_0 & B(R) \\ B_{-1} & A(R) \end{bmatrix}, \\
&x_n = x_1 \sum_{\ell=0}^{n-1} Q_\ell - x_0 \hat{Q}_{n-2}, \quad n \ge 2,
\end{aligned}
$$

ここで，$B(R) = \sum_1^\infty B_i R^{i-1}$，$A(R) = \sum_0^\infty A_i R^i$ とする，

となり，$\sum x_n e = 1$ で正規化される。

次の節ではこれの証明に関連した定理を示す。

2. いくつかの禁止確率

${}_H p_{ij}^{(n)}$ $(i, j \in S)$ を状態 i から出発して，集合 H に含まれる状態を通ることなく，n ステップ後にマルコフ連鎖が j に到達する確率とする。また次の記号を定義する。

$$
{}_H p_{ij}^{*} = \sum_1^\infty {}_H p_{ij}^{(n)},
$$

$$
\underline{i} = \{(i, j);\ 1 \le j \le m\}, \quad \underline{0} = \{(0, j);\ 1 \le j \le m_0\}。
$$

次のことが知られる。有限個の要素からなる H について

$$
\text{再帰的} \iff \forall i \in H,\ \sum_{j \in H} {}_H p_{ij}^{*} = 1,
$$

$$
\text{正再帰的} \iff \forall i \in H,\ \sum_{r \in S} {}_H p_{ir}^{*} < \infty。
$$

よって，再帰的であるための条件を求めるには，${}_H p_{ij}^{*}$ $(j \in H)$ つまり i から出発して，H を通ることなく，いつかは j に到達する確率を求めればよい。

Theorem 2.

${}_{\underline{0}\,\underline{1}} p^{*}_{ai,1j} = (F_a)_{ij}$ とすれば，

(7) $F_a = R^{a-1}$ $(a \geq 2)$, $F_1 = A(R)$, $F_0 = B(R)$

となる。

（略証） ${}_{k\,\underline{0\,1}}P^*_{ai,1j} = (G_a)_{ij}$ とすれば，前回の発表（[2]）と同じ考え方で

$$G_a = \sum_{n=0}^{k-a-1} R_n \left(\sum_{n=0}^{k-2} R_n \right)^{-1} \quad (a \geq 2)$$

となる。さらに $G_a \longrightarrow R^{a-1}$ $(k \to \infty)$ となる。□

この証明において A_{-1}^{-1} の存在は必要でないことが判る。

[3] を援用すれば（"対称的"な方法を使う）

$$\text{再帰的} \Leftrightarrow R\,{}^t e = {}^t e \Leftrightarrow \pi\,{}^t a \leq 1$$

となる。

Corollary. $|R| \neq 0 \Leftrightarrow |A_{-1}| \neq 0$。条件 iii)′ の下で R は既約。

次に，定常分布 x を求めるために $(u_b)_j = {}_{11}P^*_{11,bj}$, $(b,j) \in S$ を求める，つまり状態 $(1,1)$ から出発して $(1,1)$ に戻るまでに (b,j) を訪問する平均回数である。

Theorem 3.

${}_{\underline{0\,1}}P^*_{1i,bj} = (U_b)_{ij}$, ${}_{\underline{0\,1}}P^*_{0i,bj} = (V_b)_{ij}$ とすれば

$$(8) \quad \begin{aligned} &U_0 = B_{-1},\ U_1 = F_1,\ U_n = \sum_0^{n-1} Q_\ell + (U_1 - I) A_{-1}^{-1} \sum_0^{n-2} Q_\ell \quad (n \geq 2), \\ &V_0 = B_0,\ V_1 = F_0,\ V_n = -\hat{Q}_{n-2} + V_1 A_{-1}^{-1} \sum_0^{n-2} Q_\ell \quad (n \geq 2), \end{aligned}$$

となる。

（略証） $(U_b)_{ij} = \sum_{cr \notin \underline{0\,1}} (U_c)_{ir} \cdot p_{cr,bj} + p_{1i,bj}$

$1 \le i \le m$, $(b, j) \in S$, より結論を得る。V_bも同様。□

Theorem 4.

マルコフ連鎖が再帰的のとき，$\{u_b\}$は次のように得られる。まず(u_0, u_1)は

$$(9) \qquad (u_0, u_1) = (u_0, u_1) \begin{bmatrix} B_0 & B(R) \\ B_{-1} & A(R) \end{bmatrix},$$

なる不変測度，ただし$(u_1)_1 = 1$，とする。さらに

$$(10) \qquad u_a = u_1 \sum_{0}^{a-1} Q_\ell - u_0 \hat{Q}_{a-2} \qquad (a \ge 2)$$

となる。

（略証）再帰的だから$(u_1)_1 = 1$，よって次の関係が知られる（cf. Chung [1]）

$$u_b = u_0 V_b + u_1 U_b \qquad (b \ge 0).$$

これから結論を得る。(9)式の行列は推移行列である。□

最後に，正再帰的であるための条件を示せば，Th. 1 の証明は完成する。その前にA_1^{-1}の存在を仮定しない場合にTh. 1, Th. 4 はどうなるか示す。

${}_{k0\perp}P^{*}_{0i,bj}$，${}_{k0\perp}P^{*}_{1i,bj}$を求め，$k \to \infty$とすることによって

$$(11) \qquad V_n = \hat{S}_{n-1}, \quad U_n = S_{n-1} \qquad (n \ge 2),$$

ただし，$S_n = \sum_{M} E_{i_1} \cdots E_{i_m}$，$M = \{(m, i_1, \cdots, i_m);\ i_1 + \cdots + i_m = n,\ i_\ell > 0\}$，

$$E_n = W_n (1 - W_0)^{-1}, \quad W_i = \sum_{\ell = i}^{\infty} A_\ell R^{\ell - i}$$

$$\hat{S}_n = \sum_{\ell=1}^{n} \hat{E}_\ell S_{n-\ell}, \quad \hat{E}_n = \sum_{\ell=n+1}^{\infty} B_\ell R^{\ell-n-1} (I-W_0)^{-1},$$

となる。 つまり $x_n = x_0 \hat{S}_{n-1} + x_1 S_{n-1} \quad (n \geq 2)$ である。

このとき正規化の条件 $\sum x_i {}^t e = 1$ は次のようになる。

(12) $\quad x_0 {}^t e + x_0 \sum_1^\infty \hat{E}_n (I - \sum_1^\infty E_n)^{-1} {}^t e + x_1 (I - \sum_1^\infty E_n)^{-1} {}^t e = 1$。

Theorem 5.

正再帰的 $\Leftrightarrow \sum S_n {}^t e < \infty$ & $\sum \hat{S}_n {}^t e < \infty \Leftrightarrow \pi {}^t a < 1$ &

${}^t b$の全ての成分が有限

(略証)

$\sum S_n = \sum_n \left(\sum_i W_i (I-W_0)^{-1} \right)^n$ である。 また

$$\pi (I - \sum_0^\infty W_i) = \pi [I - \sum_0^\infty W_i] R$$

であることと(6)を利用する。 $\sum \hat{S}_n$ についても同様 □

<u>*Example*</u> "*Quasi-Birth-and-Death process*"

$A_i = B_i = 0 \quad (i \geq 2)$ のとき Th. 1 は "Q. B. D. process" に一致するはずである。 これは次の事実による。

$A_1 R^2 + A_0 R + A_{-1} = R$ と $Q^2 A_{-1} + Q A_0 + A_1 = Q$ の非負の最小解の間には $Q A_{-1} = A_1 R$ の関係がある。

これから, $\hat{S}_n = 0$, $S_n = E_1^n = Q^n$ となる。

References

[1] Chung, K.L. (1967) Markov chains, 2nd., Springer.

[2] 池田, 西田 "ボーキングのあるM/G/1待ち行列"

（前回の講究録）．

[3] Neuts, M.F. (1978) ' Markov chains with applications in queueing theory, which have a matrix-geometric invariant probability vector" Adv. Appl. Prob. 10, 185-212

[4] Neuts, M.F. (1979) " Queues Solvable without Rouché's Theorem " Ops. Res. 27, 767-781.