数理解析研究所講究録
第 597 巻 1986 年 54-68

種数２のcurveのmoduli上のあるHecke作用素について

東大・理　寺杣 友秀
(Tomohide Terasoma)

簡単のため．ここでは．基礎体を$\mathbb{C}$とする。$\mathcal{M}_2$を種数2のcurveのcoarse moduli space, $\mathcal{A}_2$をprincipally polarized abelian surfaceのcoarse moduli spaceとする。Torelliの定理は、種数が2の時は．下の様になる。

<u>Torelliの定理</u>(種数が2の時)　$\mathcal{M}_2$の点pがcurve Cの同型類に対応する時．pに対してCのJacobian $J(C)$の同型類に対応する$\mathcal{A}_2$の点qを対応させるmap $j: \mathcal{M}_2 \longrightarrow \mathcal{A}_2$はbirational morphismになる．

他方．$\mathcal{A}_2$には．Hecke correspondenceと呼ばれるcorrespondenceがある。それを以下に定義しよう。

まず．symplectic simulitude群のconnected component $GSp^+(2,\mathbb{R})$を．$\{g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(4,\mathbb{R}).\ (a,b,c,d \in M(2,\mathbb{R})) \mid gJ\,{}^tg = \lambda J \text{ for some } \lambda \in \mathbb{R}^+.\}$で定義する。ここで．$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$である。$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$は．

Siegel上半空間 $H_2=\{z\in M(2,\mathbb{C})\mid {}^tz=z,\ \mathrm{Im}\,z>>0\}$ に. $g(z)=(az+b)(cz+d)^{-1}$ $(z\in H_2)$ で作用する。この時. $Sp(2,\mathbb{Z})=GSp^+(2,\mathbb{R})\cap GL(4,\mathbb{Z})$ はH_2に totally discontinuous に作用して. $\mathfrak{a}_2$ は複素多様体として. $H_2/Sp(2,\mathbb{Z})$ と同一視される。gを $GSp^+(2,\mathbb{Q})=GSp^+(2,\mathbb{R})\cap GL(2,\mathbb{Q})$ の元とした時. 次の図式を考える。

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & H_2/Sp(2,\mathbb{Z})\cap g^{-1}Sp(2,\mathbb{Z})g \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "g"] & \\ H_2/Sp(2,\mathbb{Z})=\mathfrak{a}_2 & & H_2/Sp(2,\mathbb{Z})=\mathfrak{a}_2 \end{tikzcd}$$

ここで、pは. $z\in H_2$ に対して g の $H_2/Sp(2,\mathbb{Z})$への natural projection を対応させる mapから induce されるものであり. gは. zの $H_2/Sp(2,\mathbb{Z})$ への natural projection を対応させる map から induce されるものである。Hecke correspondence $T(g)$ とは. g_*p^*なる correspondence のことである。今から Hecke correspondence $T(g)$を.

$$p\times g:\ H_2/Sp(2,\mathbb{Z})\cap g^{-1}Sp(2,\mathbb{Z})\longrightarrow H_2/Sp(2,\mathbb{Z})\times H_2/Sp(2,\mathbb{Z}) = \mathfrak{a}_2\times\mathfrak{a}_2$$

なる map の image と identify することにする。ここでの報告のテーマは.

<u>Theme</u> jなる birational morphism を通して. $T(g)$ を $\mathfrak{M}_2$ 上の correspondence と見なして. それを研究すること。

である。次の場合を考える。

Special case

$T(g)$ で、g が $\begin{pmatrix} d & & & 0 \\ & d & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$ の時。ここで d は、1 以上の整数。この時、$T(g)$ は、以下の様に解釈される。z を $\mathbb{C}$ 上の principally polarized abelian surface A の isomorphism class に対応する点とする。$W_1, \cdots W_\ell$ を A の d-torsion point のなす群 A_d の中の Weil pairing に関する maximal totally isotropic subgroup の全体とする。この時、A/W_i には、

$$(\pi_i^* L_i)^{\otimes d} \cong \bigotimes_{g \in W_i} T_g^* L$$

を満たす principally polarization L_i がはいる。ここで π_i は、natural projection $A \longrightarrow A/W_i$ である。この L_i は、algebraic equivalence を除いて unique に定まる。z_i を $(A/W_i, L_i)$ なる principally polarized abelian surface の同型類に対応する $\mathfrak{A}_2$ の点とする。以上の Notation を持って、correspondence $T(g)$ による z の image は、$\{z_1, \cdots, z_\ell\}$ となる。

さらに次の場合を考える。

More special case

C を genus 2 の curve, $p_1, \cdots, p_6$ をその Weierstrass point, A を C の Jacobian とする。この時、$W = \{0, (p_1)-(p_2), (p_3)-(p_4), (p_5)-(p_6)\}$ は、A_2 の中の Weil pairing に関する maximal totally isotropic subgroup となる。Special case で述べた

様に、A/W は principally polarized abelian surface になる。これがある genus 2 の curve C' の Jacobian $J(C')$ と同型になる時、C と C' の関係が、Hecke correspondence と関係しているのではないかと考えるのは自然である。

この報告で扱う問題は次の2つである。

1. C' の hyper elliptic curve としての方程式から、C の方程式は、どの様に与えられるか。
2. C に対して、C' を対応させる対応は genus 2 の curve の moduli variety 上の対応と見て、どの様な対応なのか。$\mathfrak{a}_2$ の Hecke correspondence とどの様な関係があるのか。

以下の section において扱う内容を述べる。§2 では、$\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{a}_2$ において2つの correspondence H, $T(D)$ を定義する。H は、上の言葉でいえば、C と C' の対応に関連するものであり、$T(D)$ は $\mathfrak{a}_2$ の上のある Hecke correspondence である。この H と $T(D)$ が j_2 なる birational map (j_2 については、§2 を見よ。) によって対応するのである。

§3 では、C と C' が上の対応で対応している時、それぞれの方程式の間に成り立つ関係を幾何的方法で導き出す。

§4 では、§2、§3 の結果から導き出される結論を述べる。そして、最後の section である Hilbert modular surface の

rationalityを応用として示す。

§2. Correspondence H と T(D)

ここでは、対応（Cの同型類）$\longmapsto$（C'の同型類）のmoduli理論的なアプローチをする。まず、

Hの定義

$\mathfrak{M}_{2,2}$ を、$\{(C, p_1, \cdots, p_6) \mid C$は種数2のnon singular curve、$p_1, \cdots, p_6$をその上のWeierstrass points$\}$/同型類を表現するcoarse moduli spaceとする。これはirreducibleなrational 3-foldであることが知られている。

$\mathfrak{M}_{2,2}^{\circ}$ を、$\{(C, p_1, \cdots, p_6) \in \mathfrak{M}_{2,2} \mid J(C)/\langle (p_i)-(p_j), (p_k)-(p_l) \rangle$ は、(i, j, k, l)が、$(1,2,3,4)$, $(1,2,3,5)$, $(1,2,3,6)$, $(1,3,5,6)$, $(1,4,5,6)$, $(1,5,3,6)$, $(1,6,3,4)$なる時は、principally polarized abelian surfaceとして、2つのelliptic curveの直積ではない。$\}$によって定義される$\mathfrak{M}_{2,2}$のopen subspaceとする。この時、$\mathfrak{M}_{2,2}^{\circ} \times \mathfrak{M}_{2,2}^{\circ}$のsubset Hを、

$$H = \{ (C_1, p_1, \cdots, p_6), (C', p_1', \cdots, p_6') \in \mathfrak{M}_{2,2}^{\circ} \times \mathfrak{M}_{2,2}^{\circ} \mid$$

$$W = \langle (p_1)-(p_2), (p_3)-(p_4) \rangle \subset J(C)_2, \ W' = \langle (p_1')-(p_2'), (p_3')-(p_4') \rangle \subset J(C')_2$$

とした時、あるprincipally polarized

abelian surface としての同型

$\varphi: J(C)/W \longrightarrow J(C')$

$\varphi': J(C')/W' \longrightarrow J(C)$

があって. 次の条件を満たす

1). $J(C) \xrightarrow{\text{natural projection}} J(C)/W \xrightarrow{\varphi} J(C')$

$\xrightarrow{\text{natural projection}} J(C')/W' \xrightarrow{\varphi'} J(C)$

は. $J(C)$ の 2倍 map になる

2) $\varphi((p_3)-(p_5)) = (p_2')-(p_1')$, $\varphi'((p_1')-(p_3')) = (p_3)-(p_4)$ $\}$

によって定義する。この時.

<u>定理</u>]は. $\mathfrak{M}_{2,2}^0 \times \mathfrak{M}_{2,2}^0$ の closed subspace になる。

<u>証明の概略</u>. $\mathfrak{M}_{2,2}$は. $\mathbb{A}_3$のある open subset と同型で.

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ をその座標とした時.

$$C: \quad y^2 = x(x-1)(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)$$

はその上の genus 2 の nonsingular curve の family となる。

A を $J(C)$ とすれば. これは. $\mathfrak{M}_{2,2}$ の上の abelian scheme

で. これには. C への $\mathfrak{M}_{2,2}$ 上の section $p_1 = \{x=0\}$

$p_2 = \{x=1\}$. $p_3 = \{x=\infty\}$ $p_4 = \{x=\lambda_1\}$ から得られる section

$(p_1)-(p_2)$, $(p_3)-(p_4)$ がある。しかもこの section は.

$J(C)_2$ の subgroup W を生成する。 B を $J(C)/W$ とする。

この時. 松坂-Mumford の定理により . $\mathrm{Isom}_{\mathfrak{M}_{2,2}^0 \times \mathfrak{M}_{2,2}^0}(pr_1^* A,$

$pr_2^* B)$ は. $\mathfrak{M}_{2,2}^0 \times \mathfrak{M}_{2,2}^0$ proper であることがわかる。

さらに、Hは $\mathrm{Isom}_{\mathcal{M}_{2,2}^{\circ}}(pr_1^*A, pr_2^*B)/\pm 1$ と同型になることがわかり、定理が示される。　　　　　　証明の概略終り.

Hは $\mathcal{M}_{2,2}^{\circ}$ 上の correspondence を定める。次に abelian surface の moduli 上の correspondence $T(D)$ を定義しよう。H_2 は前の通り、$\Gamma(2) = \{g \in Sp(2,\mathbb{Z}) \mid g \equiv 1 \pmod 2\}$ とした時、$\mathfrak{a}_{2,2} = H_2/\Gamma(2)$ は次の Level 2 structure をもつ principally polarized abelian surface の同型類と1対1に対応がつく。

$\{(A,\varphi) \mid A$: principally polarized abelian surface,
$\varphi : A_2 \cong (\mathbb{Z}/2)^4$: Level 2-structure すなわち、skew symetric form もこめた同型$\}$

ただし、$(\mathbb{Z}/2)^4 = e_1(\mathbb{Z}/2) \oplus \cdots \oplus e_4(\mathbb{Z}/2)$ 上に、skew symmetric form が、$\langle e_1, e_2\rangle = \langle e_3, e_4\rangle = \langle e_1, e_4\rangle = \langle e_2, e_3\rangle = 0$
$\langle e_1, e_3\rangle = \langle e_2, e_4\rangle = 1$ で定義される。

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$ とした時、

$$T(D) = \mathrm{Im}\left(\begin{array}{ccc} H_2 & \longrightarrow & \mathfrak{a}_{2,2} \times \mathfrak{a}_{2,2} \\ \Psi & & \\ z & \longmapsto & (Dz \bmod \Gamma(2),\ z \bmod \Gamma(2)) \end{array}\right)$$ によって $T(D)$ を定義する。

さて、H と $T(D)$ は、Torelli map で結びついている。
$j_2 : \mathcal{M}_{2,2} \longrightarrow \mathfrak{a}_{2,2}$ なる map を次の仕方で定義する。

$z \in \mathcal{M}_{2,2}$ を $(C, p_1, \cdots, p_6)$ の同型類に対応する点とする。ここで C は genus 2 の curve, $p_1, \cdots, p_6$ を C の Weierstrass points である。この時 $J(C)$ には $(p_i)-(p_j)$ $(i \neq j)$ なる 2分点があるが、$\varphi : J(C)_2 \xrightarrow{\cong} (\mathbb{Z}/2)^4$ なる map を

$\varphi((p_2)-(p_1)) = (1,0,0,0)$, $\varphi((p_3)-(p_5)+(p_2)-(p_1)) = (0,1,0,0)$

$\varphi((p_5)-(p_1)) = (0,0,1,0)$, $\varphi((p_4)-(p_2)+(p_5)-(p_1)) = (0,0,0,1)$

によって定義する。そうすると $(J(C), \varphi)$ は $\mathcal{A}_{2,2}$ の点 を定めるが、$j_2(z) = w$ によって j_2 を定める。この時 j_2 は birational になる。j_2 を $\mathcal{M}_{2,2}^{\circ}$ に制限したものを同じ記号 j_2 で書く。

<u>Theorem</u> $j_2 \times j_2 : \mathcal{M}_{2,2}^{\circ} \times \mathcal{M}_{2,2}^{\circ} \longrightarrow \mathcal{A}_{2,2} \times \mathcal{A}_{2,2}$ なる birational morphism を考えると、$H = (j_2 \times j_2)^{-1}(T(D))$ が成り立つ。

<u>証明の概略</u> $H^1(C, \mathbb{Z})$ の base e_i $(i = 1, \cdots, 4)$ を

$$(\langle e_i, e_j \rangle)_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

となる様にとれば、$H^1(C', \mathbb{Z})$ の $\mathbb{Z}$ 上の生成元が $2(e_1+e_2)$, $-e_2+e_3$, $e_1-e_2-e_3+2e_4$, $-e_2-e_3$ ととれる事がわかる。この事を使って $(j_2 \times j_2)^{-1}(T(D)) = H$ となる様な D の行列表示を求める。

§3. $(C, C') \in H$ の幾何学.

この section では. $((C, p_1, \cdots, p_6), (C', p_1', \cdots, p_6')) \in H$ を fix する。C'を次の様な hyperelliptic curve の形に書き表わしておく。

$$C' : y^2 = (x+1)(x-1)(x+u)(x-u)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$p_1' = \{x = x_1\} \quad p_2' = \{x = x_2\} \quad p_3' = \{x = 1\} \quad p_4' = \{x = -1\}$$

$$p_5' = \{x = u\} \quad p_6' = \{x = -u\} \qquad x_1, x_2 \neq 0.$$

この section の目標は. C'の表示を用いて. Cの方程式を定めることである。

Cは hyper elliptic curve なので. C上にある involution σがあって. $C/\langle\sigma\rangle \cong \mathbb{P}^1$となる。$\sigma$は. Cの2次のSymmetric product $S^2(C)$ の involution τ をひきおこす。自然な射. $C \longrightarrow C/\langle\sigma\rangle \cong \mathbb{P}^1$は、$S^2(C)$から. $S^2(\mathbb{P}^1) \cong \mathbb{P}^2$への morphism をひきおこすが. これは. $S^2(C)/\langle\tau\rangle$ を factor する. πを. $J(C) \xrightarrow{\text{natural}} J(C)/W \xrightarrow{\varphi} J(C')$ なる合成として. C'を. $J(C')$の中に Abel-Jacobi map : $C' \ni p \longmapsto (p) - (p_1') \in J(C')$ の image として埋め込む。この時C'が $J(C)$の± 1倍mapで. stable であることから. $\pi^{-1}(C')$も $J(C)$の(± 1)倍mapで. stable となる。$S^2(C) \longrightarrow J(C)$は. 一点 blow up になる事がわかっている。そしてこれは. $S^2(C)/\langle\tau\rangle \longrightarrow J(C)/\pm 1$

なる morphism をひきおこす。これもある一点を center とする blow up である。E をこの blow up に関する $\pi^{-1}(C')/\pm 1$ の strict transform とする。以上の構成から、下の図式ができる。

$$
\begin{tikzcd}
 & J(C) \arrow[rr] \arrow[rr, bend left, "\pi"] \arrow[dd] & & J(C)/W) \cong J(C') \arrow[dd] & \\
S^2(C) \arrow[ur] \arrow[dd] & & \pi^{-1}(C') \arrow[ul, hook] \arrow[rr] \arrow[dd] & & C' \arrow[ul, hook] \arrow[dd] \\
 & J(C)/\pm 1 \arrow[rr] & & J(C')/\pm 1 & \\
S^2(C)/\langle\tau\rangle \arrow[ur] \arrow[dd] & & \pi^{-1}(C')/\pm 1 \arrow[ul, hook] \arrow[rr] & & \mathbb{P}^1 \arrow[ul, hook] \\
 & E \arrow[ul, hook] \arrow[ur] \arrow[urrr, "\tilde{\pi}"'] \arrow[dl, "r"] & & & \\
S^2(\mathbb{P}^1) \cong \mathbb{P}^2 & & & &
\end{tikzcd}
$$

ここで、$\tilde{\pi}$ は、$E \longrightarrow \pi^{-1}(C')/\pm 1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ の合成、r は、$E \hookrightarrow S^2(C)/\langle\tau\rangle \longrightarrow S^2(\mathbb{P}^1) \cong \mathbb{P}^2$ の合成とする。

<u>Lemma 1</u>　E の genus は 1 であり、E 及び $\tilde{\pi}$ は、次の様に表わされる。

$$
(3.1) \qquad E : \left\{ \begin{array}{l} y^2 = (x+1)(x-1) \\ z^2 = (x+u)(x-u) \end{array} \right. \xrightarrow{\ \tilde{\pi}\ } \mathbb{P}^1
$$

$$
(x, y, z) \longmapsto x
$$

<u>証明</u>　略。

<u>Lemma 2.</u> $S^2(C)/\langle\tau\rangle \longrightarrow S^2(\mathbb{P}^1)\cong\mathbb{P}^2$ は6本の line l_i $(i=1,\cdots,6)$ で．branch する double cover である。そして．もし．C が．$y^2=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_6)$ と表わされたとすると．$\mathbb{P}^2$ の斉次座標を X_0, X_1, X_2 とした時．l_i の方程式は．$X_2-a_iX_1+a_i^2X_0=0$ $(i=1,\cdots,6)$ となる。

<u>証明</u> 略．

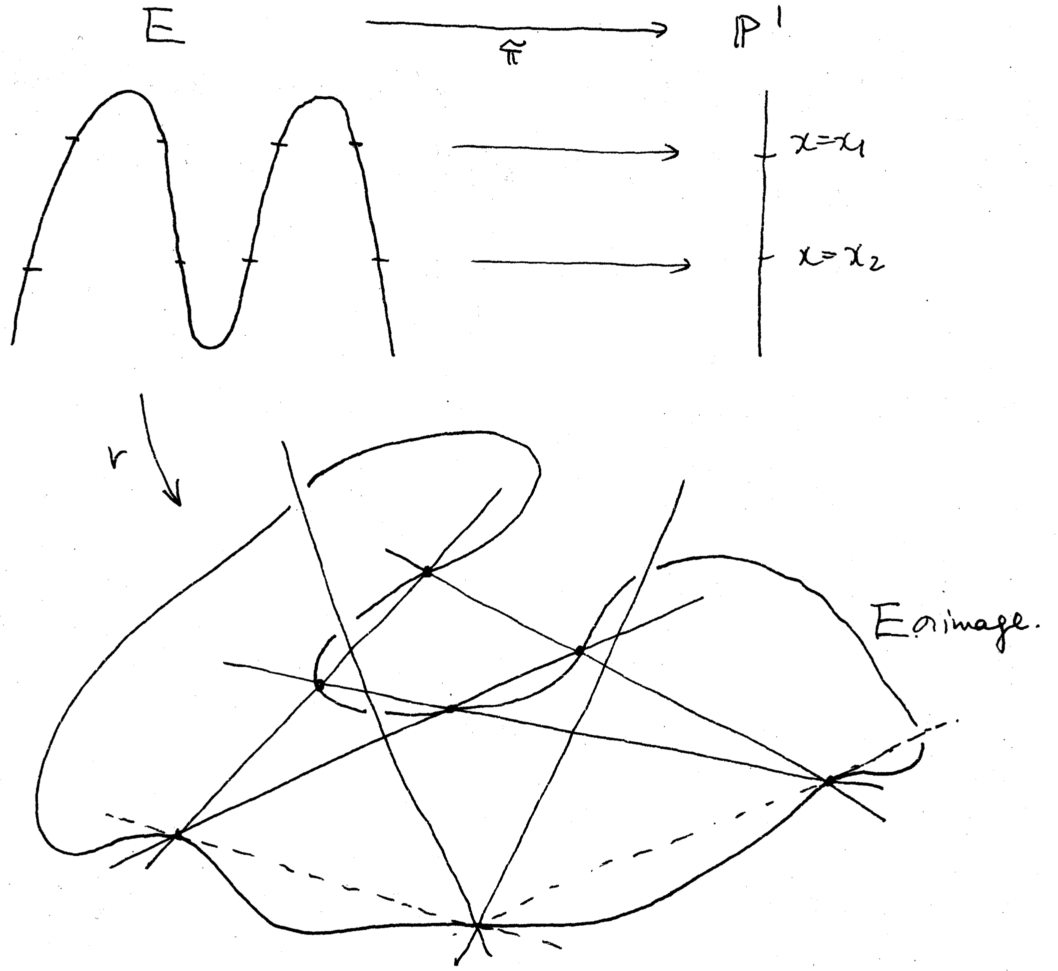
さて．(C, C') が H の点であることから．$\pi^{-1}(C')\ni(p_1)-(p_2)$ である事がわかるが．$(p_1)-(p_2)$ の $\pi^{-1}(C')/\pm1$ での像の．$E\longrightarrow\pi^{-1}(C')/\pm1$ なる birational morphism での逆像が点になるので．それを $\tilde{q}_{1,2}$ とおく。

<u>Proposition 3</u> $\nu: E\longrightarrow\mathbb{P}^2$ は．E を (3.1) の方程式により $\mathbb{P}^3$ の (2, 2) complete intersection と見た時．$\tilde{q}_{1,2}$ に関する stereographic projection と一致する。

<u>証明</u> 略．

さて．ν や $\tilde{\pi}$ の図形的な位置関係を次に考察する。一般に $(p_i)-(p_j)\in\pi^{-1}(C')$ の時．$\pi^{-1}(C')/\pm1$ での像の E における逆像が1点になる時．その点を $\tilde{q}_{i,j}$ と書く。$\tilde{q}_{i,j}$ の $\nu: E\longrightarrow\mathbb{P}^2$ による像を $q_{i,j}$ と書く。

<u>Proposition 4</u> r と $\tilde{\pi}$ の図形的位置関係は、下の図の様になる。



$q_{i,j}$ 及び l_i の位置関係を見る事によって、Cの方程式を得る。

<u>Theorem</u> $\tilde{q}_{1,2}$ の座標を (x_1, y_1, z_1)、$\tilde{q}_{3,5}$ の座標を (x_2, y_2, z_2) とおくと、Cの方程式は

$$C: y^2=(x-1)\left(x-\frac{x_2}{x_1}\right)\left(x^2-\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2\right)\left(x^2-\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2\right)$$

となる。

§4 結論

<u>Theorem</u> H と $T(D)$ は、birationally equivalent で irreducible である。さらに H 上の rational function m, n, x_1, x_2, u で、

$$m^2 = \frac{x_2^2-1}{x_1^2-1} \qquad n^2 = \frac{x_2^2-u^2}{x_1^2-u^2}$$

を満たすものが存在する。そして、H 及び $T(D)$ の function field は、それらによって生成される。すなわち、

$$\mathbb{C}(m, n, x_1, x_2, u) = \mathbb{C}(H).$$

<u>証明の概略</u> $A^5 = \{(x_1, x_2, m, n, u)\}$ の closed subvariety Σ を、$\Sigma = \{x_1 = 0\} \cup \{x_1^2 - 1 = 0\} \cup \{x_1^2 - u^2 = 0\} \cup \{u = 0\} \cup$

$$\{u^2 - 1 = 0\} \cup \{x_1 - x_2 = 0\}$$

によって定義する。さらに、$A^5 - \Sigma$ の closed subvariety H' を $H' = \left\{(x_1, \cdots, u) \in A^5 - \Sigma \mid m^2 = \frac{x_2^2-1}{x_1^2-1},\ n^2 = \frac{x_2^2-u^2}{x_1^2-u^2}\right\}$ によって定義する。H' の上の curve の family は、H から $\mathfrak{M}_{2,2} \times \mathfrak{M}_{2,2}$ への map φ をひきおこす。H'' を $\varphi^{-1}(\mathfrak{M}_{2,2}^0 \times \mathfrak{M}_{2,2}^0)$ とした時、これは、H' の open dense subset であり φ は、$H'' \longrightarrow \mathfrak{M}_{2,2}^0 \times \mathfrak{M}_{2,2}^0$ なる morphism をひきおこすが、§3 の定理より、$H \subset \mathfrak{M}_{2,2}^0 \times \mathfrak{M}_{2,2}^0$ を factor する。ここで示すべき主張は、$H'' \longrightarrow H$ が birational となる事である。そのために、H 上の rational function x_1, x_2, m, n, u を構成する。

$(C, C') \in H$ なる時,

$C': y^2 = (x-x_1)(x-x_2)(x-1)(x+1)$
$(x-u)(x+u)$

$p'_1 = \{x = x_1\}, \cdots\ p'_6 = \{x = -u\}$

$$\begin{tikzcd}
H' \arrow[rr] & & \mathcal{M}_{2,2} \times \mathcal{M}_{2,2} \\
H'' = \varphi^{-1}(\mathcal{M}^{\circ}_{2,2} \times \mathcal{M}^{\circ}_{2,2}) \arrow[u] \arrow[rr] \arrow[dr, dashed] & & \mathcal{M}^{\circ}_{2,2} \times \mathcal{M}^{\circ}_{2,2} \arrow[u] \\
& H \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

と書いておく。この様に表わす表わり方は, generic には, 2通りあるので, u は, H 上の2価関数になる様に思われるがこの2通りのとり方のうち, 一方を specify することができて, その u の値が H 上の rational function になる。

m, n は u が定まれば §3 の Notation を使って,

$m = \dfrac{y_2}{y_1}$, $n = \dfrac{z_2}{z_1}$ とおくと, これらも H 上の rational function となる。そして, m, n, x_1, x_2, u の満たす方程式を考えれば, $H \dashrightarrow H''$ なる rational map を得る。ゆえに H'' と H は birational. H_1 の既約性も同様にして出る。

証明終り.

§5 Hilbert modular surface との関連.

$\mathcal{O}$ を $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ する。$\mathcal{O}$ の元 $a = u + v\sqrt{2}$ $(u, v \in \mathbb{Z})$ に対して, a' をその共役 $u - v\sqrt{2}$ で定義する。$\Gamma_0(2)$ を $\{g \in SL(2, \mathcal{O}) \mid g \equiv 1 \pmod{2}\}$ で定義すると, これは $H \times H$ (H は上半空間 $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z > 0\}$) に次の様に作用する。

$g=\begin{pmatrix} a, & b \\ c & d\end{pmatrix}$ とした時．その作用は．

$$(z,z')\longmapsto g(z,z') = \left(\frac{az+b}{cz+d},\ \frac{a'z-b'}{-c'z+d'}\right)$$

で定義する．この時．$\Gamma_{\mathcal{O}}(2)$ の作用は．totally discontinuous であり．S を $S = H\times H/\Gamma(2)$ で定義すると．これは．algebraic surface になる。S には．$(z,z')\longmapsto(z',z)$ なる involution から induce される involution ι があるが．
$S' = S/\langle\iota\rangle$ で定義する。

次に．$\Delta = \{(C,p_1,\cdots,p_6)(C,p_1,p_2,p_5,p_6,p_3,p_4)\in M^{\circ}_{2,2}\times M^{\circ}_{2,2}\}$ によって定義すると次の定理が成り立つ．

<u>Theorem</u> S'は．$\Delta\cap H$ と birational であり．これは．rational surface である。

文献

1. Barth, B., Abelian surfaces with (1,2)-polarization to appear
2. Hirzebruch, F.P., Hilbert modular surfaces, Monographie no 21 de L'Enseignement Mathématique.
3. Tate, J., Endomorphisms of Abelian varieties over finite fields, Invent. Math 2. 134-144 (1966)