

Picard モジュラー函数の $\theta=0$ 値 による表示について

千葉大理 志賀 弘典 (Hitonopiri Shiga)

§.0 動機

André Weil は 1972 年の講演「数論 - その過去と現在」に於て、数論と楕円函数論は一体であり、Gauss, Abel, Jacobi の時代に特にそうであったのではなく Fermat に於て既にそうであったと指摘しています。そして 20 世紀の数論も Fermat を直接引き継いでいることを強調しています。

Hilbert が提起した 12 問題 (虚数乗法論の多変数化) を考え併せると、ここで言われている楕円函数は将来建設されるであろう“多変数楕円函数”をも意味していると思われます。

そこで楕円函数の数論的性格の一つとしてモジュラー函数という側面を考えてみます。モジュラー函数とはモジュライ空間に変数をもち函数値が複素多様体の表示形を決定している函数です。このような意味の 2 変数モジュラー函数として Picard モジュラー函数があり、これは単に一つの特殊な例

であるに留らず多変数モジュラー函数の雛形としての性格を
持っているに違いありません。即ち一変数(二次体の整数論)
から多変数(高次体の整数論)へと普遍化される過程で必ず
経過するであろう要衝としての位置を占めています。

このような観点に立つとき, 古典虚数乗法論と対比して
Picard モジュラー函数による虚数乗法論は如何に展開される
のか。これが筆者のこの主題を扱う動機です。

§.1 Picard モジュラー函数の構成

楕円曲線族の周期積分から楕円モジュラー函数が得
られたように, ある種数3の曲線族の周期積分から2変数モ
ジュラー函数が得られることを Picard [4] は指摘していま
す。これについて既に知られていることを楕円積分の場合と
対比させて述べます。

[1] $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ の領域 $\Lambda = \{[\xi_0, \xi_1] \in \mathbb{P}^1 : \xi_0 \xi_1 (\xi_0 - \xi_1) \neq 0\}$
 $= \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \neq 0, 1\}$ ($\lambda = \xi_1/\xi_0$) を考え(以下[]はいつも
 斉次座標を表します), Λ によってパラメトライズされる楕
 円曲線 $E(\xi) : W^2 = Z(Z - \xi_0)(Z - \xi_1)$ 上の周期積分の比
 $[\eta_0, \eta_1] = \left[\int_{\gamma_1} \frac{dZ}{W}, \int_{\gamma_2} \frac{dZ}{W} \right]$ (ただし $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ は $H_1(E(\xi), \mathbb{Z})$
 の基底で $\gamma_1 \cdot \gamma_2 = 1$ なるもの) をとり, ξ に $[\eta_0, \eta_1]$ を対応
 させる Λ から \mathbb{P}^1 の多価解析写像を重とします。

すると重による \mathcal{L} の像は $D = \{[\eta_0, \eta_1] \in \mathbb{P}^1 : {}^t \eta H \bar{\eta} < 0\}$
 $= \{\tau \in \mathbb{C} : \text{Im} \tau > 0\}$ (ただし $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\eta = {}^t(\eta_0, \eta_1)$,
 $\tau = \eta_1/\eta_0$) となり, 基本群 $\pi_1(\mathcal{L}, *)$ の $H_1(E(*), \mathbb{Z})$ への
 作用がひきおこす D の一次変換群即ちモノドロミー群は $\Gamma =$
 $\{g \in \text{PGL}(2, \mathbb{Z}[i]) : {}^t g H \bar{g} = H\} = \text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ のレベル
 2 の主合同部分群 $\Gamma(2)$ で与えられます。このとき重は \mathcal{L} と
 $D/\Gamma(2)$ との正則同型をひきおこし, さらにそのコンパクト
 化の間の同型に拡張されます。従って重の逆写像は D 上定義
 された $\Gamma(2)$ に関する保型函数を与えますが, これは通常 λ -
 函数として知られているものです。 $\lambda(\tau)$ の Jacobi のテータ函
 数を用いた表示 (Jacobi の公式)

$$\lambda(\tau) = \eta_2^4(0, \tau) / \eta_3^4(0, \tau) \quad (1-1)$$

が知られています。これを以下で用いる Riemann のテータ函
 数

$$\theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (z, \Omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} \exp \{ \pi i {}^t (n+a) \Omega (n+a) + 2\pi i {}^t (n+a)(z+b) \}$$

($z \in \mathbb{C}^g$, $\Omega \in \mathbb{G}_g$, $a, b \in \mathbb{Q}^g$)

によって書き直すと

$$\lambda(\tau) = \eta^4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} (0, \tau) / \eta^4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (0, \tau) \quad (1-2)$$

となり, 分母及び分子はそれぞれ $\Gamma(2)$ に関する重み 1 の保型
 形式と存, ています。

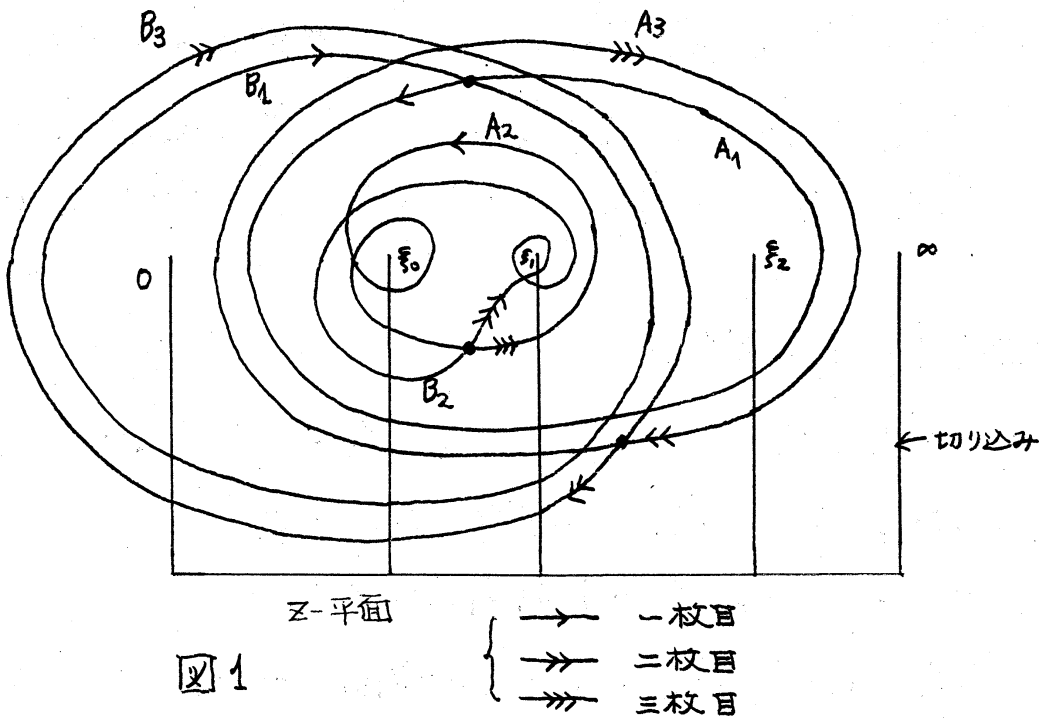
[2] 以上のことを $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ の領域

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \{ [\xi_0, \xi_1, \xi_2] \in \mathbb{P}^2 : \xi_0 \xi_1 \xi_2 (\xi_0 - \xi_1)(\xi_1 - \xi_2)(\xi_2 - \xi_0) \neq 0 \} \\ &= \{ (x, y) \in \mathbb{C}^2 : xy(x-1)(y-1)(x-y) \neq 0 \} \end{aligned}$$

($x = \xi_1/\xi_0$, $y = \xi_2/\xi_0$) にパラメータを持つ代数曲線

$$C(\xi): w^3 = z(z - \xi_0)(z - \xi_1)(z - \xi_2)$$

に対して拡張してゆきます。 $C(\xi)$ は種数 3 で $\varphi_1 = \frac{dz}{w}$, $\varphi_2 = \frac{dz}{w^2}$, $\varphi_3 = \frac{zdz}{w^2}$ が $H^0(C(\xi), \mathcal{O}(K))$ の基底を与えます。 $C(\xi)$ を z -平面上 $z = 0, \xi_0, \xi_1, \xi_2, \infty$ で三重分岐する三葉被覆とみてそのホモロジー基底 $\{A_i, B_i\}$ を図 1 のように与えます。



このとき $A_i \cdot B_j = \delta_{ij}$, $A_i \cdot A_j = B_i \cdot B_j = 0$ ($1 \leq i, j \leq 3$) が成り立ちます。

今 $\int_{A_j} \omega_i = \delta_{ij}$ とする $C(\xi)$ 上の正則微分形式 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ をとり $\eta_0 = \int_{A_1} \frac{dz}{w}, \eta_1 = \int_{B_3} \frac{dz}{w}, \eta_2 = \int_{A_2} \frac{dz}{w}$,
 $u = \eta_2/\eta_0, v = \eta_1/\eta_0$

とおくと周期行列

$$\left(\left(\int_{A_j} \omega_i \right), \left(\int_{B_j} \omega_i \right) \right) = (E, \Omega(\xi)) \quad \text{は}$$

$$\Omega(u, v) = \Omega(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{u^2 + 2\omega^2 v}{1-\omega} & \omega^2 u & \frac{\omega u^2 - \omega^2 v}{1-\omega} \\ \omega^2 u & -\omega^2 & u \\ \frac{\omega u^2 - \omega^2 v}{1-\omega} & u & \frac{\omega^2 u^2 + 2\omega^2 v}{1-\omega} \end{pmatrix} \quad (1-3)$$

と取り替る (ただし $\omega = \exp \frac{2}{3}\pi i$). 実際には次のように
 します。 $a_{2i} = \int_{B_i} \varphi_2, b_{2i} = \int_{B_i} \varphi_3, c_{2i} = \int_{B_i} \varphi_1, a_{2i-1} = \int_{A_i} \varphi_2,$
 $b_{2i-1} = \int_{A_i} \varphi_3, c_{2i-1} = \int_{A_i} \varphi_1$ としとき、自己同型 $\rho: \begin{cases} w' = \omega w \\ z' = z \end{cases}$

の周期積分への作用から

$$a_5 = -\omega^2 a_1, a_4 = \omega^2 a_3, a_6 = \omega a_2, b_5 = -\omega^2 b_1, b_4 = \omega^2 b_3,$$

$$b_6 = \omega b_2, c_5 = -\omega c_1, c_4 = \omega c_3, c_6 = \omega^2 c_2$$

が得られ、一方 Riemann の周期関係式から

$$-c_1 a_2 + c_2 a_1 - c_3 a_4 + c_4 a_3 - c_5 a_6 + c_6 a_5 = 0,$$

$$-b_1 a_2 + b_2 a_1 - b_3 a_4 + b_4 a_3 - b_5 a_6 + b_6 a_5 = 0$$

が成り立ちます。はじめに周期行列 $\left(\left(\int_{A_j} \varphi_i \right), \left(\int_{B_j} \varphi_i \right) \right)$ を τ 上の関係式を用いて

$$\left(\int_{A_j} \varphi_i \right)^{-1} \left(\int_{B_j} \varphi_i \right) = \Omega(u, v)$$

が得られます。

こうして $C(\xi)$ の周期は $[\eta_0, \eta_1, \eta_2]$ 又は (u, v) で定まるので ξ に $[\eta_0, \eta_1, \eta_2]$ を対応させる \mathcal{L} から \mathbb{P}^2 への多価解析写像を重としこれを周期写像と呼びます。このとき重 (\mathcal{L}) は

$$D = \{ [\eta_0, \eta_1, \eta_2] \in \mathbb{P}^2 : t_{\eta} H \bar{\eta} < 0 \} \quad \left(\text{ただし } H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \{ (u, v) \in \mathbb{C}^2 : 2\operatorname{Re} v + |u|^2 < 0 \}$$

の稠密開集合となり、 $\pi_1(\mathcal{L}, *)$ が $H_1(C(\xi), \mathbb{Z})$ に作用してひきおこす D の一次変換群 (モノドロミー群) は

$$\Gamma = \{ g \in \operatorname{PGL}(3, \mathbb{Z}[\omega]) : t_g H \bar{g} = H \}$$

の合同部分群

$$\Gamma_1 = \{ g \in \Gamma : g \equiv \operatorname{id} \pmod{(\sqrt{-3})} \}$$

で与えられます (ここで $g \equiv \operatorname{id}$ は g の係数を $\mathbb{Z}[\omega]/(\sqrt{-3})$ におとして単位行列になるという意味です)。[1] と同じように重は \mathcal{L} のコンパクト化 \mathbb{P}^2 から D/Γ_1 のコンパクト化への正則写像に拡張され、さらに正則同型であることが分ります。このとき拡張された重は ξ -空間の4点 $P_0 = [1, 0, 0]$, $P_1 = [0, 1, 0]$, $P_2 = [0, 0, 1]$, $P_3 = [1, 1, 1]$ を除く各点を D の内点に写像し、 P_i たらが D/Γ_1 に添加される境界点にそれぞれ対応します。

この領域 D は $\Omega(\xi)$ についての Riemann の周期不変式から得

られます。また重の拡張は実際に η_i たちの \mathbb{P}^2 での境界挙動を調べて示します。すると重はコンパクト多様体の間の写像になるので全射となることは容易に分ります。単射であることはトレリ型定理によつて示すことができます。モノドロミー群は生成元を決定し、それによつて群の特徴づけをします (Γ_1 の部分群であることが最初に分り、指数を調べて一致することを示します)。

以上のことから重の逆写像は D 上で定義されていて Γ_1 に関して不変な \mathbb{P}^2 への正則写像であることが分ります。これを $[\xi_0(u, v), \xi_1(u, v), \xi_2(u, v)]$ とおき ξ_k およびその比で与えられる有理型函数を Picard モジュラー函数と呼びます。ただし、今の段階では $\xi_k(u, v)$ 自身の意味は確定していません。これについて次節で論じます。

§.2 展開表示

次の二つの命題は Picard モジュラー函数を調べるための出発点になると思われます。

命題 1. $\Gamma \xi_k(u, v) = \theta^3 \begin{bmatrix} 0 & 1/6 & 0 \\ 1/3 & 1/6 & k/3 \end{bmatrix} (0, \Omega(u, v)) \quad (k=0, 1, 2)$

が成り立つ、ただし等号は両辺の連比の相等を示す。さらに

$$\theta_k(u, v) = \theta \begin{bmatrix} 0 & 1/6 & 0 \\ k/3 & 1/6 & k/3 \end{bmatrix} (0, \Omega(u, v))$$

とおくと

$$\theta_k(u, v) = \sum_{\mu \in \mathbb{Z}[\omega]} H_{\mu, k}(u) q^{N(\mu)}$$

(ただし $q = \exp \frac{2\pi v}{\sqrt{3}}$, $\text{tr } \mu = \mu + \bar{\mu}$, $N(\mu) = \mu \bar{\mu}$ として

$$\left\{ H_{\mu, k}(u) = \exp \frac{\pi i \mu^2 u^2}{\sqrt{3}} \left[\omega^{k \text{tr } \mu} \theta \begin{bmatrix} 1/6 \\ 1/6 \end{bmatrix} (\mu u, -\omega^2) + \omega^{-k \text{tr } \mu} \theta \begin{bmatrix} -1/6 \\ -1/6 \end{bmatrix} (\mu u, -\omega^2) \right] \right\}$$

が成り立つ。

さらに $\theta_k(u, v)$ は $\{\xi_k = 0\}$ の重による像の上でのみ 0 をとり、特に $\theta_k(u, v)$ たちはどのペアも D 上で共通零点をもたないことが分ります。また $H_{\mu, k}(u)$ は $\mathbb{C}/(1-\omega)\mathbb{Z} + (1-\omega^2)\mathbb{Z}$ で与えられる楕円曲線上の因子 $3N(\mu) \cdot 0$ の定める直線束の正則切断でその幾何学的意味は後に述べます。

命題 1 は Jacobi の公式の拡張であり §1 [1] と同様に上のテータ 0 値もある保型形式であることが予想されますが、実際次のことが示されます。

命題 2. $\xi_k(u, v) = \theta_k^3(u, v)$ は $\Gamma' = \Gamma_1 \cap \text{PSL}(3, \mathbb{Z}[\omega])$ に関する重み 1 の保型形式であり、 Γ' -保型形式の可変次数環は $\mathbb{C}[\xi_0, \xi_1, \xi_2, \zeta] / (\zeta^3 - \xi_0 \xi_1 \xi_2 (\xi_0 - \xi_1)(\xi_1 - \xi_2)(\xi_2 - \xi_0))$ で与えられる。

ここで $\sigma: \begin{cases} u' = \omega u \\ v' = \end{cases}$ とすると, $\Gamma_1 = \langle \sigma \rangle \times \Gamma'$ であり
 (1) $\xi_k(\sigma(u, v)) = \xi_k(u, v)$ となることが分ります (保型
 形式であるためには $\xi_k(\sigma(u, v)) = (\partial(u, v')/\partial(u, v))^{-1} \xi_k(u, v)$
 $= \omega^2 \xi_k(u, v)$ でなくてはならない).

§.3 命題の証明の概要

以下 §2 の二つの命題の証明の方針を述べます.

[1] 準備として証明の鍵になるコンパクト Riemann 面上の
 テータ函数の性質を挙げておきます.

X は種数 g のコンパクト Riemann 面, $\{A_i, B_i\}$ を $H_1(X, \mathbb{Z})$
 の基底 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_g)$ をそれに双対的な $H^0(X, \mathcal{O}(K))$
 の基底にとり固定します. このとき X の周期行列 Ω が定まり
 ます. X 上の基点 P_0 を固定しておきます. f を X 上の有理型
 函数, $(f) = \sum_{i=1}^m (a_i - b_i)$ を f の定める因子とし P_0 から各 a_i
 b_i へ至る道を

$$\sum_{i=1}^m \left(\int_{P_0}^{a_i} \omega - \int_{P_0}^{b_i} \omega \right) = 0$$

なるようにとります.

定理 A. 「次数 g の正因子 $P_1 + \dots + P_g$ に対し

$$f(P_1) \cdots f(P_g) = \frac{1}{E} \prod_{k=1}^m \left\{ \frac{\theta \left(\sum_i \int_{P_0}^{P_i} \omega - \int_{P_0}^{a_k} \omega - \Delta, \Omega \right)}{\theta \left(\sum_i \int_{P_0}^{P_i} \omega - \int_{P_0}^{b_k} \omega - \Delta, \Omega \right)} \right\} \quad (3-1)$$

が成り立つ, ここで Δ は以下に述べる Riemann 定数, E は因子 $\sum P_i$ による定数, さらに P_0 から P_{g-1} の道は分母, 分子で同一のものとする。」

(3-1) の分母, 分子は次の条件が同時に満たされるとき, ともに 0 でないことが保証されます。

- (i) $D = P_2 + \dots + P_g$ は一般因子, 即ち $D \leq (\lambda)$ とする Abel 微分が定数倍を除いて一意に定まる。
- (ii) P_1, \dots, P_g は $a_k, b_k (1 \leq k \leq m)$ と異なる。
- (iii) P_1 は $(\lambda) - D$ に含まれない。

また Δ は

$$\Delta = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Omega_{11} \\ \vdots \\ \Omega_{gg} \end{pmatrix} - \sum_{k=1}^g \int_{A_k} \left(\int_{P_0}^P \omega \right) \omega_k \quad (\Omega = (\Omega_{ij})_{1 \leq i, j \leq g})$$

で定義される X の Jacobi 多様体 $\text{Jac}(X)$ 上の定点, この Δ の特徴づけを以下与えてゆきます。

$\Sigma = \{ X \text{ の因子 } D : 2D \equiv K \}$ (\equiv は線型同値の意味) とおき Σ の 2 元 D_1, D_2 をとりまう。 $D_1 - D_2 = \sum_{i=1}^m (a_i - b_i)$

とおくと

$$I(D_1 - D_2) = \sum_{i=1}^m \int_{a_i}^{b_i} \omega$$

は Abel の定理から $\text{Jac}(X)$ の半周期点 $\Omega \eta' + \eta''$ ($\eta', \eta'' \in \frac{1}{2} \mathbb{Z}^g$) を定めます。上の Δ はある Σ の元 D_0 によって

$$\Delta = I(D_0 - (g-1)P_0)$$

(Iの意味は前と同様)で与えられ, とくに $(2g-2)P_0 \equiv K$ のときそのときのみ Δ は $\text{Jac}(X)$ 上の半周期点になります. P_0 がこの条件を満たすとき Δ は次で特徴づけられます.

定理 B. 「 $I(D - (g-1)P_0) = \Omega\eta' + \eta''$, $d(D) = \dim H^0(X, \mathcal{O}(D))$ とするとき, Σ の各元 D に対して

$$d(D) \equiv 4^t (\eta' - \eta'_0)(\eta'' - \eta''_0) \pmod{2}$$

と存する $(\eta'_0, \eta''_0) \in (\frac{1}{2}\mathbb{Z})^{2g} / \mathbb{Z}^{2g}$ がただ一組定まり

$$\Delta = \Omega\eta'_0 + \eta''_0. \quad \square$$

[2] $C(\xi)$ を $w^3 = z(z-1)(z-x)(z-y)$ ($x = \xi_1/\xi_0$, $y = \xi_2/\xi_0$) と表し, $Q_1 = (z, w) = (0, 0)$, $Q_2 = (z, w) = (1, 0)$, $Q_3 = (z, w) = (x, 0)$, $Q_4 = (z, w) = (y, 0)$, $Q_5 = (z, w) = (\infty, \infty)$ と定めます. [1] に於ける X として $C(\xi)$ をとり $H_1(C(\xi), \mathbb{Z})$, $H^0(C(\xi), \mathcal{O}(K))$ の基底は §1 のものとし, また基点 P_0 として Q_5 をとります. このとき $(2g-2)P_0 = 4Q_5 \equiv K$ は容易に確かめられます. f として $C(\xi)$ 上の函数 z をとると $(f) = 3Q_1 - 3Q_5$ となります. X 上の因子 $D_1 = 2Q_1 + Q_3$, $D_2 = Q_2 + 2Q_3$ に対して定理 A を適用して比をとると定数 E は消去されて, $f^2(Q_1) f(Q_3) = x$ および $f(Q_2) f^2(Q_3) = x^2$ から x の表示を得ます. また因子 $D_3 = 2Q_2 + Q_4$, $D_4 = Q_2 + 2Q_4$ を用いると同様にして y の表示を得ます. それらを書き下して (3-2), (3-3) となります.

$$x = \prod_{k=1}^3 \left[\frac{\theta \left[\int_{Q_5}^{Q_2} \omega + 2 \int_{Q_5}^{Q_3} \omega - \int_{\alpha^{(k)}(5,1)} \omega - \Delta, \Omega(\xi) \right]}{\theta \left[\int_{Q_5}^{Q_2} \omega + 2 \int_{Q_5}^{Q_3} \omega - \Delta, \Omega(\xi) \right]} \right] \quad (3-2)$$

$$\times \prod_{k=1}^3 \left[\frac{\theta \left[2 \int_{Q_5}^{Q_2} \omega + \int_{Q_5}^{Q_3} \omega - \Delta, \Omega(\xi) \right]}{\theta \left[2 \int_{Q_5}^{Q_2} \omega + \int_{Q_5}^{Q_3} \omega - \int_{\alpha^{(k)}(5,1)} \omega - \Delta, \Omega(\xi) \right]} \right]$$

$$y = \prod_{k=1}^3 \left[\frac{\theta \left[\int_{Q_5}^{Q_2} \omega + 2 \int_{Q_5}^{Q_4} \omega - \int_{\alpha^{(k)}(5,1)} \omega - \Delta, \Omega(\xi) \right]}{\theta \left[\int_{Q_5}^{Q_2} \omega + 2 \int_{Q_5}^{Q_4} \omega - \Delta, \Omega(\xi) \right]} \right] \quad (3-3)$$

$$\times \prod_{k=1}^3 \left[\frac{\theta \left[2 \int_{Q_5}^{Q_2} \omega + \int_{Q_5}^{Q_4} \omega - \Delta, \Omega(\xi) \right]}{\theta \left[2 \int_{Q_5}^{Q_2} \omega + \int_{Q_5}^{Q_4} \omega - \int_{\alpha^{(k)}(5,1)} \omega - \Delta, \Omega(\xi) \right]} \right]$$

ここで D_1, \dots, D_4 が [1] の諸条件 C を満すことが確かめられ, また $\alpha^{(k)}(i, j)$ は $C(\xi)$ の k 番目の枝をとって Q_i から Q_j に至る道を表します.

この式の変数を全て周期 $\Omega(\xi)$ を用いて $\Omega(\xi)a + b$ ($a, b \in \mathbb{Q}^3$) の形に表せば, $\Omega(\xi)$ は既に (1-3) で与えられていますから x および y は (u, v) の函数として確定します. また Δ を除く各積分たちは $C(\xi)$ の分岐点を結ぶ道に沿うもので, これらはある周期積分の $1/2$ になります. 実際次の計算結果が得られ

ます。

$$\left. \begin{aligned}
 \int_{\alpha^{(1)}(5,2)} \omega &= \frac{1}{3} \left\{ \Omega \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \\
 \int_{\alpha^{(1)}(5,3)} \omega &= \frac{1}{3} \left\{ \Omega \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \\
 \int_{\alpha^{(1)}(5,4)} \omega &= \frac{1}{3} \Omega \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \int_{\alpha^{(1)}(5,1)} \omega = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \\
 \int_{\alpha^{(2)}(5,1)} \omega &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \int_{\alpha^{(3)}(5,1)} \omega = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \right\} (3-4)$$

従、てあとは Δ を決定することが問題となります。そこで以下のことに注意します。我々は Riemann 面 $C(\xi)$ の族を考えているのですが、その中の一つの元 $C_0 = C(3)$ を固定し、 S^1 のホモロジー基底に関する $\Delta = \Omega(3)\eta' + \eta''$ が定まれば、パラメータ空間 \mathcal{L} 上で 3 から ξ に至る道に沿って $C(3)$ を変形して、 $C(\xi)$ の Riemann 定数 $\Delta = \Omega(\xi)\eta' + \eta''$ が同一の $\eta', \eta'' \in (\frac{1}{2}\mathbb{Z})^3 / \mathbb{Z}^3$ によって与えられます。よって、ある一つの曲線 C_0 上で Δ を求めれば十分であり、そのためには更に $C_0 \in H^1(C_0, \mathbb{Z})$ ごと他の曲線に変形して求めてもよいこととなります。

$$X_1: W^3 = z^4 - 1$$

に於て、 $Q_1: (z, w) = (1, 0)$, $Q_2: (z, w) = (i, 0)$, $Q_3: (z, w) = (-1, 0)$, $Q_4: (z, w) = (-i, 0)$, $Q_5: (z, w) = (\infty, \infty)$ と定める

と座標を適当に一次変換して $\{C(\xi)\}$ の元と見なすことができます。変形

$$X(t): z^4 = \{w + wt + (t-1)i\} \{w + wt + (t-1)i\} \{(1-t)w + 1\} (w-1)$$

($0 \leq t \leq 1$) によって X_1 と Fermat 曲線.

$$X_0: z^4 = w^4 - 1$$

を結ぶことができます。このとき X_1 の基点 Q_5 は X_0 の基点

$$Q_5: (z, w) = (0, 1) \text{ に移動し } K \text{ は不変です。そこで } X_0$$

上の Δ を求めます。そのためには X_0 上で $I(D - 2Q_5)$ が $\text{Jac}(X_0)$ の半周期点を与えるような因子 D (一般に正因子ではない) たち計 $2^{2g} = 64$ 個を求めて各々について $d(D)$ を

計算します。さらに $I(D - 2Q_5) = \Omega\eta' + \eta''$ となる η', η'' を全て決定し定理 B が成立するような半整数ベクトル η'_0, η''_0 を見つければよいわけです。

$$X_0 \text{ に於て } R_1: (z, w) = (0, 1), R_2: (z, w) = (0, i), R_3:$$

$$(z, w) = (0, -1), R_4: (z, w) = (0, -i), Q_1: (z, w) = (1, 0),$$

$$Q_2: (z, w) = (i, 0), Q_3: (z, w) = (-1, 0), Q_4: (z, w) = (-i, 0)$$

$$\text{とおき, } R'_1: (z, w) = (a, b) \text{ を}$$

$$\int_{Q_1}^{R'_1} \frac{dw}{z^3} = \frac{1}{2} \int_{Q_1}^{R_1} \frac{dw}{z^3}$$

$$\text{と定める点, } R'_2: (ia, ib), R'_3: (-a, -b), R'_4: (-ia, -ib) \text{ とし}$$

ます。 Δ の決定に最小限必要な $E_i = D_i - 2Q_5$ だけ列挙すると

$$E_0 = 0, E_1 = 2Q_4 - 2Q_1, E_2 = Q_1 + Q_3 - R_1 - R_3, E_3 = 2R_4 - 2R_1$$

$$E_4 = Q_3 + R_3 - Q_1 - R_1, E_5 = R_1' + R_3' + R_1 + R_2 - (Q_1 + Q_2 + 2Q_3)$$

となり, $d_i = d(D_i)$ は

$$d_0 = d_3 = d_5 = 1, d_1 = d_2 = d_4 = 0$$

が計算によつて分り, η', η'' たゞは以下で与えられます.

$$\int_{E_0} \varphi = \frac{1}{2} \Omega \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \int_{E_1} \varphi = \frac{1}{2} \Omega \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\int_{E_2} \varphi = \frac{1}{2} \Omega \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \int_{E_3} \varphi = \frac{1}{2} \Omega \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\int_{E_4} \varphi = \frac{1}{2} \Omega \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \int_{E_5} \varphi = \frac{1}{2} \Omega \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

結局これから

$$\Delta = \Omega \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3-5)$$

を得ます. (3-4) および (3-5) を (3-1), (3-2) に代入して計算すると命題 1 の式が得られます.

[3] D_{F_1} のコンパクト化 \hat{D}_{F_1} は $\hat{D}_{F_1} \cong \mathbb{P}^2$ 上の分岐 3 重被覆 $((\pi: \hat{D}_{F_1}) = 3)$ であり \mathbb{P}^2 上 $\mathbb{P}^2 - \mathbb{P}^1$ で与えられる 6 本の直線上で 3 重分岐しています. このことから \hat{D}_{F_1} は 3-空間 \mathbb{P}^3 の 4 点 P_0, P_1, P_2, P_3 (これは 3 直線の交わり) の上にある点 $\hat{P}_i (i=0, \dots, 3)$ で $x^3 + y^3 + z^3 = 0$ の形, 即ち単純楕円特異点 \hat{E}_i を生じています. $\hat{D}_{F_1} = V$, V の最小非特異モデルを \tilde{V} とすると \tilde{V} は $\mathbb{P}^1 \times E$ (ただし E は 3-

不変量 0 の楕円曲線) となることが分ります。また V の \mathcal{P}_0 での特異点除去で得た楕円曲線を E_0 とすると, E_0 の近傍は E_0 を 0-切断とする negative な直線束の構造をもちます。命題 1 の表示はこの直線束上で正則な函数 $\theta_k(u, v)$ をファイバーの座標 $q = \exp \frac{2\pi i v}{\sqrt{3}}$ に関して巾級数展開したもので, $E_0 \cdot E_0 = -3$ や q^2 の係数は E_0 上の因子 3 点の定める直線束の正則切断になります。

[4] 次に命題 2 の証明について述べます。D に於ける変換群 $*$ に関する重み k の正則な保型形式のなる \mathbb{C} -ベクトル空間を $A(*)_k$, それらの直和 $\bigoplus_k A(*)_k$ を $A(*)$ と書くことにします。 $A(*)_k$ の元は $D_*/*$ のコンパクト化 (又はその非特異モデル) の上での有理型 k 次微分形式になることから, これらの定める因子の特徴づけをすることにより

$$\dim A(\Gamma_1)_1 = 0, \dim A(\Gamma_1)_2 = 1, \dim A(\Gamma')_1 = 3$$

となることが分ります。そこで, 主張 (*):

「 $\xi_k(u, v)$ ($k=0, 1, 2$) が $A(\Gamma')_1$ の基底であり,

$\zeta = \sqrt[3]{\xi_0 \xi_1 \xi_2 (\xi_0 - \xi_1)(\xi_1 - \xi_2)(\xi_2 - \xi_0)}$ が $A(\Gamma_1)_2$ の基底である。」

を設けます。(*) の後半は前半が示されれば容易です。また (*) が分れば, V の構造環が既知なので $A(\Gamma')$ の次数環としての構造が決定されます。従って $\xi_k(u, v)$ の保型性を示すわけ

ですが、そのときの鍵となるのは次の変換公式です。

定理 C. 「 $\Omega \in$ Siegel 上半空間 \mathbb{H}_g の点, $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ を $Sp(g, \mathbb{Z})$ の元とし,

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon' \\ \varepsilon'' \end{bmatrix}, \quad \varepsilon', \varepsilon'' \in \mathbb{Q}^g$$

に対し

$$M \cdot \Omega = (A\Omega + B)(C\Omega + D)^{-1},$$

$$M \cdot [\varepsilon] = \begin{bmatrix} D\varepsilon' - C\varepsilon'' + \frac{1}{2} \operatorname{tr}(C^t D) \\ -B\varepsilon' + A\varepsilon'' + \frac{1}{2} \operatorname{tr}(A^t B) \end{bmatrix}$$

(ただし $\operatorname{tr}(\ast)$ は \ast の対角ベクトルを表す) とするとき,

$$\theta[M \cdot [\varepsilon]](0, M \cdot \Omega) = K(M, \varepsilon) \sqrt{\det(C\Omega + D)} \theta[\varepsilon](0, \Omega)$$

が成り立つ。ここで $K(M, \varepsilon)$ は絶対値 1 の複素数で平方根の分枝を指定したとき M と ε とから計算できる。」

$\xi_k(u, v)$ の保型性は Γ_1 の生成元について調べてゆきます。

Γ_1 は次の g_1, \dots, g_5 から生成され、各 g_i は対応する $H_1(\mathbb{C}^g, \mathbb{Z})$ に左から作用するシンプレクティック変換 (モノドロミー変換) N_i からひきおこされています:

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \omega - \omega^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$g_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \omega - 1 & 1 & \omega - 1 \\ 1 - \omega^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_4 = \begin{pmatrix} 1 & \omega - \omega^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_5 = \begin{pmatrix} 1 & \omega - 1 & \omega - 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 - \omega^2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

このとき, N_i および g_i の定義により

$$\theta_k(g_i(u, v)) = \theta \begin{bmatrix} 0 & 1/6 & 0 \\ k/3 & 1/6 & k/3 \end{bmatrix} (0, N_i \circ \Omega(u, v))$$

であり,

$$\theta \begin{bmatrix} 0 & 1/6 & 0 \\ k/3 & 1/6 & k/3 \end{bmatrix} (0, N_j \circ \Omega) = \rho_j \theta \left[N_j \circ \begin{bmatrix} 0 & 1/6 & 0 \\ k/3 & 1/6 & k/3 \end{bmatrix} \right] (0, N_j \circ \Omega) \quad (3-6)$$

(ただし $\rho_1 = \exp \frac{1}{3} \pi i$, $\rho_2 = \dots = \rho_5 = 1$) となることが計算で

確かめられます。従って (3-6) の右辺を変換公式で調べてゆき

ます。

$Sp(g, \mathbb{Z})$ の生成系として

$$S: \begin{cases} \pm B_i = I \pm E_{i, g+i}, \quad \pm C_i = {}^t(\pm B_i) \quad (1 \leq i \leq g), \\ \pm A_{ij} = I + (\pm E_{i, j} \mp E_{g+i, g+j}) \quad (1 \leq i, j \leq g, i \neq j), \\ D_i = I - 2(E_{ii} + E_{g+i, g+i}) \quad (1 \leq i \leq g) \end{cases}$$

をとることができます (E_{ij} は (i, j) 成分のみ 1 となる行列単位)。この生成系の要素に対しては乗法因子は容易に定まり、一般の元は生成元に分解し乗法因子の積み重ねをします

$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(g, \mathbb{Z})$ と $\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon' \\ \varepsilon'' \end{bmatrix}$ ($\varepsilon', \varepsilon'' \in \mathbb{Q}^g$) に対して

$$\varphi(M, \varepsilon) = -{}^t \varepsilon' D B \varepsilon' + 2 {}^t \varepsilon'' {}^t C B \varepsilon' - {}^t \varepsilon'' {}^t C A \varepsilon'' + {}^t (D \varepsilon' - C \varepsilon'') \det(A {}^t B),$$

$M_1, M_2 \in Sp(g, \mathbb{Z})$ に対して

$$\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = (M_2 M_1) \circ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - M_2 \circ M_1 \circ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = 2(M_2 M_1) \circ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ [M_2, M_1] = (-1)^{\langle \lambda_1, m_2 \rangle} \quad (\langle \cdot, \cdot \rangle \text{ はユークリッド内積})$$

と記号を定めます。S の元 M に対して

$$\chi(M) = \begin{cases} 1 & M \text{ が } A, B, C \text{ 型 のとき} \\ -i & M \text{ が } D \text{ 型 のとき} \end{cases},$$

$$\sqrt{\det C(M) \Omega + D(M)} = \begin{cases} 1 & M \text{ が } A, B \text{ 型 のとき} \\ i & M \text{ が } D \text{ 型 のとき} \\ \text{右半平面の枝} & M \text{ が } C \text{ 型 のとき} \end{cases}$$

(ただし $M = \begin{pmatrix} A(M) & B(M) \\ C(M) & D(M) \end{pmatrix}$ とおいている)

と定め、

S の 2 元 M', M'' に対しては

$$\chi(M' M'') = [M', M''] \chi(M') \chi(M'') \exp\left\{ \pi i \varphi\left(M', M'' \circ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \right\}$$

と定めます。

一般に $M = M_\pi \cdots M_1$ ($M_i \in S$) に対し帰納的に

$$\gamma(M) = [M_\pi, M_{\pi-1}, \dots, M_1] \gamma(M_\pi) \gamma(M_{\pi-1} \cdots M_1) \\ \times \exp \pi i \varphi(M_\pi, M_{\pi-1}, \dots, M_1 \circ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$$

と定めさらに $S_k = M_k \cdots M_1$ とおいて

$$\sqrt{\det(C(M)\Omega + D(M))} = \prod_{k=1}^{\pi} \sqrt{\det(C(M_k)(S_{k-1} \circ \Omega) + D(M_k))}$$

で左辺を定めます。

このとき定理 C の乗法因子 $K(M, \varepsilon)$ は

$$K(M, \varepsilon) = \gamma(M) \exp\{\pi i \varphi(M, \varepsilon)\}$$

で与えられます。 N_1, N_2, N_3 に対する乗法因子は容易ですが N_4, N_5 に関しては分解

$$N_4 = -C_1^{-1} C_3^{-1} A_{13}^{-1} C_1^{-1} A_{13}$$

$$N_5 = -A_{13}^{-1} A_{23}^{-1} C_2^{-1} A_{21}^{-1} C_1^{-1} (C_2)^2 A_{13}^{-1} A_{23}^{-1} C_2$$

を用いて実際に上の計算を実行します。以上の結果主張(*)が示され、命題 2 が得られます。

§.4 展望

古典虚数乗法論に於て、 $\gamma H \bar{\gamma} = mH$ ($m \in \mathbb{Z}$) とする $M(2, \mathbb{Z})$ の元 γ を m 次相似変換とよび、2つの相似変換 g_1, g_2 は $g_2 = \gamma g_1$ とする $PSL(2, \mathbb{Z})$ の元 γ が定まるとき同値とします。すると $D = \{ \text{Im } \tau > 0 \}$ の点 α がある相似変換の不動点となるのは α が虚二次体の元するときのみで

あり，一方変換方程式

$$\Phi_m(\tau) = \prod_i \{j(\tau) - j(q_i(\tau))\}$$

を考えると (j はモジュラー函数， q_i は m 次相似変換の全ての代表を渡る)， $\Phi_m(\tau)$ 自身保型函数であり， $j(\tau)$ の Fourier 展開から見てこれが $j(\tau)$ の \mathbb{Q} 係数多項式であることが分ります。従って $j(\alpha)$ は $\Phi_m(\tau)$ の零点ゆえ，代数的数であることが導かれます。

このような論法が Picard モジュラー函数についてどこまで通用するのでしょうか？

1° 例えは， $M(3, \mathbb{Z}[\omega])$ の元 g で $gH\bar{g} = mH$ となるものを上と同様に m 次相似変換と定めたとして， $D = \{2\operatorname{Re} \tau + |\tau|^2 < 0\}$ 内の点 α がある m 次相似変換の孤立不動点となるのは α がどのようなときでしょうか？

2° またそのとき

$$\prod_i \{ \xi_j(u, v) \xi_{\bar{j}}(q_i(u, v)) - \xi_j(q_i(u, v)) \xi_{\bar{j}}(u, v) \} \quad (l+j)$$

を変換方程式と考えると，保型形式が得られそれは $\xi_0(u, v)$ ， $\xi_1(u, v)$ ， $\xi_2(u, v)$ の斉次多項式になると思われませんか，その係数はいかなる体に属するのでしょうか？

この問題を 1 変数の類比で考えるとすると， $\theta_k(u, v)$ の Fourier 係数 $H_{\mu, k}(u)$ たちを直線束の正則切断の標準基底で表示して，正則切断のつくる少くとも $\bar{\mathbb{Q}}$ (\mathbb{Q} の代数閉包) -

係数の次数環の中で考えなくてはなりません。

$H_{\mu, k}(u)$ は

$$(*) \begin{cases} f(u + (1-\omega^2)) = \exp\{2\pi i \nu \omega^2 (u+1)\} f(u) \\ f(u + (\omega-1)) = \exp\{2\pi i \nu \omega (u+\omega)\} f(u) \end{cases} \quad (\nu = N(\mu))$$

という周期性をもち, (*) をみたす f 全体のなす \mathbb{C} -ベクトル空間 R_ν は 3ν 次元で, その基底は例えば

$$f_{\nu, a}(u) = \exp \pi i \frac{\nu u^2}{\sqrt{-3}} \theta \left[\begin{array}{c} \frac{a}{3\nu} - \frac{1}{2} \\ \frac{\nu}{2} \end{array} \right] (\nu u, \nu(1-\omega^2))$$

($a=0, \dots, 3\nu-1$)

で与えることができます。また $\{f_{\nu, a}\}$ が $R = \bigoplus R_\nu$ の生成元になります。このとき $H_{\mu, k}(u)$ が $f_{\nu, a}(u)$ たちの $\bar{\mathbb{Q}}$ 係数一次結合に書けることは変換公式定理 C を用いて示すことができます。

3°. それでは $\bar{\mathbb{Q}}[f_{1,0}, f_{1,1}, f_{1,2}]$ は次数環の構造をもつのでしょうか?

この問題は, 次の予想と関連します。

4°. τ が虚 2 次体の数 のとき, 任意の $m \in \mathbb{N}$, 任意の $a, b, a', b' \in \mathbb{Q}$ に対して

$$\theta \left[\begin{array}{c} a \\ b \end{array} \right] (0, \tau) / \theta \left[\begin{array}{c} a' \\ b' \end{array} \right] (0, m\tau)$$

は代数的数になるのか?

以上がこの Picard モジュラー関数を考えるときに残されている懸案です。

References

- [1] Deligne, P.-G.D. Mostow: Monodromy of hypergeometric functions and non-lattice integral monodromy, preprint.
- [2] Holzappel, R.P.: Euler-Vorlesung 1982; Zweidimensionale periodische Funktionentheorie der Kugel, Akad. Wissenschaften der DDR, Berlin(1983).
- [3] Mumford, D.: Tata lectures on theta I, Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart(1983).
- [4] Picard, E.: Sur les fonctions de deux variables indépendentes analogues aux fonctions modulaires, Acta Math., 2(1883), 114-135.
- [5] Shiga, H.: One attempt to the K3 modular function I-II, Ann. Scuola Norm. Pisa, Ser. IV-Vol. VI(1979), 609-635, Ser. IV-Vol. VII-I(1981), 157-182.
- [6] Siegel, C.L.: Topics in complex function theory II, Wiley, Newyork(1971).
- [7] Terada, T.: Fonctions hypergéométriques F_1 et fonctions automorphes I-II, J. Math. Soc. Japan, 35(1983), 451-475, 37(1985), 173-185.
- [8] Wakabayashi, I.: Note on Picard's modular function of two variables, private note.