数理解析研究所講究録
第 597 巻 1986 年 97-108

Leech lattice の自己同型群とテータ関数

名大　小池　正夫
(Masao Koike)

1　24 次元 Euclid空間内の Leech lattice L は正定値, unimodular な 2 次形式を持ち, 長さ 2 の vector がないことで特徴づけられる。ここでは, その自己同型群 $\cdot O$ の各元によって固定される元のなす部分 lattice

$$L^{\pi} = \{ x \in L \; ; \; \pi \cdot x = x \}$$

を考える。各 π に対して, L^{π} は又, 正定値な 2 次形式をもつ。それに付随するテータ関数

$$\vartheta_{\pi}(z) = \sum_{x \in L^{\pi}} e^{\pi i z \langle x, x \rangle}, \qquad z \in H = \{ z \in \mathbb{C} \; ; \; Im z > 0 \}$$

は保型形式をなす。

L 自身のテータ関数は容易に定められるが, 全ての π に対して $\vartheta_{\pi}(z)$ を定めることは容易なことではない。ここでは Conway-Norton の予想 "Moonshine" との関係で生じた idea を用いて, この問題に取り組む。

2 Moonshine について説明する．

F_1 を Monster と呼ばれる sporadic な単純群の中で位数最大のものとする。F_1 が Moonshine を持つとは．F_1 の各元 g に対して上半平面の関数 $T_g(z)$（Thompson series と呼ばれる）が対応させられて．次の性質をみたす。

(0) $T_g(z)$ は Fourier 展開 $T_g(z) = q^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} H_n(g) q^n$, $q = e^{2\pi i z}$ できて．H 上の正則関数である。

(1) 単位元 e の Thompson series $T_e(z)$ は楕円 modular invariant である． i.e. $T_e(z) = J(z) - 744 = q^{-1} + 196884q + \cdots$

(2) 各 $n \geq 1$ に対して．$H_n(g)$ は g の関数と見た時．F_1 の指標になっている。

(3) 各 g に対して．genus 0 のある Fuchs 群 Γ_g が対応して $T_g(z)$ は Γ_g の保型関数体（有理関数体と同型）の生成元となる．Γ_g については更に性質が付加されるが省く．

Moonshine の研究は遅々として進んでいない。基本的なこと．

(i) (0)〜(3) をみたす $T_g(z)$ は1意的に定まるか？

(ii) どんな群が Moonshine を持つか？

すら．わかっていない。 $G = PSL_2(\mathbb{F}_q)$ については [6] 参照

Conway・Norton [2] は F_1 の各元 g に対して (0)(1)(3) を

みたす $T_g(z)$ を具体的(Γ_g, 小さいFourier係数, η-積表示等)な関数として与えているが, (2)の性質が未だ証明できていない。

3. $\vartheta_\pi(z)$の決定とMoonshineとの関係についてのべる.

そのためにFrame shapeについて説明する. ρを$\cdot O$のLへの作用から得られる24次元表現とする。すると $\det(X\cdot 1_{24}-\rho(\pi))$ は有理整数係数の多項式で, 根は全て1のべキ根である. 故に次のようにかける.(1意的に)

$$\det(X\cdot 1_{24}-\rho(\pi)) = \prod_{1\leq t\in\mathbb{Z}} (X^t-1)^{r_t} \qquad r_t\in\mathbb{Z}$$

一般にsymbol $\prod_{1\leq t\in\mathbb{Z}} t^{r_t} = 1^{r_1}\cdot 2^{r_2}\cdot 3^{r_3}\cdots$ で $\forall t$について$r_t=0$となるものでgeneralized permutationという。πの(ρに関する) Frame shapeとは上の$\rho(\pi)$のcharacteristic polynomialの分解を用いてgeneralized permutation $\prod t^{r_t}$のことです. Frame shapeは置換の輪積表示の拡張である.

$\cdot O$の元のFrame shapeは近藤[8]を参照.

generalized permutation $\pi=\prod t^{r_t}$に付随するη-積を

$$\eta_\pi(z) = \prod \eta(tz)^{r_t}$$

で定義する. ここで$\eta(z)$はDedekindのη関数と呼ばれる"weight $\frac{1}{2}$"の保型形式 $\eta(z) = q^{\frac{1}{24}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)$ です.

Conway-Norton [2] に書かれている. Leech lattice と Moonshine との関係についての予想とは

(*) $\begin{cases} \cdot 0 \text{ の各元 } \pi \text{ に対して, } F_1 \text{ の元 } g \text{ が対応して} \\ \vartheta_\pi(z)/\eta_\pi(z) = T_g(z) + \mathrm{const} \\ \text{とかけるだろう.} \end{cases}$

π と g の対応の意味づけから, Kac, Lepowsky 等による L を用いて F_1-module の構成があるが, 予想の証明にはなっていない。

4 我々の $\vartheta_\pi(z)$ を決める idea というのは (*) の中で $\eta_\pi(z)$, $T_g(z)$ はともに具体的に書けているものの中にあるのだから, (*) が成りたつような $\vartheta_\pi(z)$ (2次形式のテータ関数という保型形式の中で特殊なもの) の存在を許すような $T_g(z)$ と $\eta_\pi(z)$ に対して見つけられるか?

5 定理をかく前に π を次のように分類しておくと便利だ.

π に対して $\pi = \prod t^{r_t}$ と Frame shape でかく. この時

$$\mathrm{wt}\,\pi = \frac{1}{2}\sum r_t,$$

$$\deg \pi = \sum t r_t,$$

$$\mathrm{ord}\,\pi = \text{l.c.m. of } t \text{ s.t. } r_t \neq 0.$$

と定義する。

(1) π が C 型 $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall r_t \geq 0$

(2) π が E 型 $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $wt\,\pi > 0$ で $\exists t$ s.t $r_t < 0$

(3) π が F 型 $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $wt\,\pi = 0$

・O の Frame shape は上の 3 種類に完全に分類される．π が F 型の時 $L^{\pi} = \{0\}$ であって，$\vartheta_\pi(z) = 1$ となる．だから，$\vartheta_\pi(z)$ の決定という立場からは F 型の元は無視してよい．この場合は $\eta_\pi(z)$ 自身が保型関数として直接 $T_g(z)$ と関係してくる．それについては近藤[8]を参照．

以下，π は C 型，又は E 型とする．

この時は，$\vartheta_\pi(z)$, $\eta_\pi(z)$ は同じ正の weight を持った保型形式で，その商が保型関数となっている。

6. 重要な Atkin-Lehner involution を定義する．

N を $\mathrm{ord}\,\pi$ の倍数として，Q を N の Hall divisor，i.e. $Q|N$，$(Q, \frac{N}{Q}) = 1$，とする．この時 generalized permutation $\pi = \prod t^{r_t}$ への Atkin-Lehner involution $W_{Q,N}$ の作用を

$$\pi \circ W_{Q,N} \underset{\text{def}}{=} \prod_{\substack{t \\ s=(t,Q)}} \left(\frac{t \cdot Q}{s^2}\right)^{r_t}$$

π を ・O の Frame shape に対して N を適当にえらび（たいていは $\mathrm{ord}\,\pi$）．全ての Hall divisor Q を動かして，$\pi \circ W_{Q,N}$ を考え．

そのうち相異なるもの達の集合を $S(\pi)$ とかく.

<u>命題</u>　π が C 型 $\Rightarrow$ $S(\pi) = \{\pi\}$

π が E 型 $\Rightarrow$ $S(\pi)$ の元 π' は $\deg \pi' = 0$ 又は

$\cdot 0$ の他の元の Frame shape となる.

これは $\cdot 0$ の Frame shape の表を眺めることで証明ができるが intrinsic な説明がほしい. 別ないい方をすれば, このような性質を Frame shape がもつことと, Moonshine の存在とが深く関っていると思われる.

7 Atkin-Lehner involution を使って E 型を細かく分類する.

π が self-conjugate な E 型 $\overset{}{\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}}$ $S(\pi) \ni \pi'$ $\pi \neq \pi'$ ならば

$\deg \pi' = 0$ となる.

そうでない時, non-self-conjugate という.

更に self-conjugate な E 型の元 π において

π が E_1 型 $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $S(\pi) = \{\pi\}$

π が E_2 型 $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $S(\pi) \neq \{\pi\}$

と分ける。

E_1 型と C 型は同じ形の定理をみたす.

<u>定理 1</u>　π が C型 又は E_1 型とする．この時，次の性質をみたす保型形式 $\theta_\pi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\pi) q^n$ が存在する．

(1.1)　$\theta_\pi(z)$ は 2次形式のテータ関数である．

(1.2)　$a_1(\pi) = 0$

(1.3)　F_1 のある元 g が存在して，

$$\theta_\pi(z)/\eta_\pi(z) = T_g(z) + \mathrm{const}$$

が成りたつ。

かなりの π については $\theta_\pi(z)$ は1意的に定まるが，そうでないものもある

このような $\theta_\pi(z)$ の存在とその具体的表示は近藤・田中[9]による $\pi \in M_{24}$ の際の $\vartheta_\pi(z)$ の決定の参考になった．

8　残った場合は定理1のように(1.1)〜(1.3)の条件で $\theta_\pi(z)$ がはっきりときまるのとは少し違った様相を呈する．ここと，9 とでそれを示す．8では簡単のため，次の

〈仮定〉　π は E_2 型で $S(\pi) = \{\pi, \pi'\}$, $\deg \pi' = 0$ とする．

を設ける．

$t_{g,c}(z) = T_g(z) + c$, c const とかく．更に c が文脈から求まる時は単に $t_g(z)$ とかく．

__定理 2__　π を上のようにした時、次の性質をみたす保型形式 $\theta_\pi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\pi) q^n$ が 1 意的に存在する。

(2.1)　$\theta_\pi(z)$ は 2 次形式のテータ関数である。

(2.2)　$a_1(\pi) = 0$

(2.3)　F_1 のある元 g が存在して

$$\theta_\pi(z)/\eta_\pi(z) = t_g(z)$$

(2.4)　F_1 のある元 g' が存在して

$$\theta_\pi(z)/\eta_{\pi'}(z) = 1 + \beta_\pi t_{g'}^{-1} \qquad \beta_\pi : \text{const.}$$

(2.5)　g の位数を m とし、$m+$ で [2] の中での F_1 の元の表示とする。この時ある定数 α_π で

$$\theta_\pi(z)/\eta_\pi(z) + \alpha_\pi \theta_\pi(z)/\eta_{\pi'}(z) = t_{m+}(z).$$

ここでは (＊) 以外にも、Thompson series とのつながりの仕方があることに注意したい。

9.　π が non-self-conjugate E 型の場合を説明する。

今まで見たように π が C 型又は self-conjugate な E 型の場合は Conway-Norton の予想 (＊) が正しいことが想像できるのだが、上の場合 (＊) の成りたつような $\theta_\pi(z)$ は存在しないことがわかる。しかし、この場合でも定理 2 の (2.4), (2.5) といった別なつながりが Thompson series とあることが期待され

るが、仲々容易に見つからなかった。近藤[10]による $\vartheta_\pi(z)$ の計算例を詳しく調べることで、最終的に次の定理を得ることができた。

π が non-self-conjugate な E 型の元とする。これらは 15 個の共役類からなり、3つずつが同じ $S(\pi)$ に属している。すなわち $S(\pi)=\{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4\}$ で $\deg \pi_4 = 0$, π_1, π_2, π_3 は $\cdot 0$ の元の Frame shape となっている。

<u>**定理 3**</u> 各 π_i に対して保型形式 $\theta_{\pi_i}(z)$ $(i=1,2,3)$ $= \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi_i}(n) q^n$ が存在して次の性質をみたす。

(3.1) $\theta_{\pi_i}(z)$ は 2次形式のテータ関数である

(3.2) $a_1(\pi_i) = 0$

(3.3) F_1 の元 g, g' が存在して

$$\theta_{\pi_i}(z)/\eta_{\pi_i}(z) = t_g(z) + c_{\pi_i} \cdot t_{g', b_{\pi_i}}^{-1}(z)$$

(c, b はある定数) とかける。

(3.4) F_1 のある元 g_i が存在し

$$\theta_{\pi_i}(z)/\eta_{\pi_i}(z) = t_g(z) + t_{g'}(z) - t_{g_i}(z)$$

とかける。

10 これまでの話で **4** で説明した方針に従って、$\vartheta_\pi(z)$ となるべき保型形式として $\theta_\pi(z)$ をある場合は1意的に、そうでない場合も他の事実と組み合わせて、唯1つの $\theta_\pi(z)$ を見つけることができる。そして、Conway-Norton の予想(*)は次のようにかきかえられる。

予想 $$\vartheta_\pi(z) = \theta_\pi(z).$$

定理1, 2, 3が $\vartheta_\pi(z)$ がみたしていると期待される。

11 Conway-Norton の予想(*)を足がかりに求めた $\theta_\pi(z)$ を全体として改めて眺めて見ると又新しい性質がうかびあがってくる。

Atkin-Lehner involution $W_{\Theta,N}$ は次の3つの対象に作用している

(1) generalized permutation

(2) 保型形式（保型関数）

(3) 2次形式のテータ関数.

(1)については **6** で説明した。(2)は Atkin-Lehner involution が最初に定義されたところで Atkin-Lehner [1] を参照. 実は(1)の定義は次の命題からきている。

<u>命題</u> $\eta_\pi(z) \mid W_{Q,N} = (\mathrm{const}) \times \eta_{\pi\circ W_{Q,N}}(z)$

(3)については 2次形式のテータ関数は保型形式だから、$W_{Q,N}$ が作用できる。この時 北岡[3]によって

$$\theta(z; M) \mid W_{Q,N} = (\mathrm{const}) \times \theta(z; M')$$

ここで M, M' は2次形式の lattice で $\theta(z, M)$ はそれに付随するテータ関数である。この時 M' は M と $W_{Q,N}$ で定まるから

$$\theta(z; M') \underset{\mathrm{def}}{=} \Theta(z; M, Q, N) \quad \text{とかく}$$

<u>定理 4</u> π と π' を $\cdot O$ の Frame shape とする ($\pi = \pi'$ でもよい)
Atkin-Lehner involution $W_{Q,N}$ で $\pi \circ W_{Q,N} = \pi'$ とするならば

$$\Theta(z; L^\pi, Q, N) = \theta(z; L^{\pi'}) \left(= \theta_\pi(z) \text{ とする}\right)$$

が成りたつ。

定理4は **10** の予想で $\vartheta_\pi(z) = \theta(z; L^\pi)$ が定まったとしてのことであるが、Atkin-Lehner involution が compatible に作用していると期待される。これも intrinsic な証明がぜひほしい。

12. $\cdot O$ の Frame shape 達と $S(\pi)$ の元達は他にも、いろいろと

興味深い性質を持っているのですが、詳しくは[7]を参照。

又 $\theta_\pi(z)$ が具体的にどうなるかも、ここではひとつもかきませんが[5],[6],[7],[9],[10]を参照してください。

References

[1]A.O.L.Atkin and J.Lehner, Hecke operators on $\Gamma_0(m)$,Math.Ann.,185(1970)

[2]J.H.Conway and S.P.Norton, Monstrous moonshine, Bull.London Math.,11(1979)

[3]Y.Kitaoka, A remark on the transformation formula of theta functions associated with positive definite quadratic forms, J.of Number Th.,12(1980)

[4]M.Koike, On Mckay's conjecture, Nagoya J. Math., 95(1984)

[5]M.Koike, Mathieu group M_{24} and modular forms, Nagoya J. Math.,99(1985)

[6]M.Koike, Moonshines of $PSL_2(F_q)$ and the automorphism group of Leech lattice, to appear in Japanese J.

[7]M.Koike, Modular forms and the automorphism group of Leech lattice

[8]T.Kondo, The automorphism group of Leech lattice and elliptic modular functions, J.Math.Soc.Japan, 37(1985)

[9]T.Kondo and T.Tasaka, The theta functions of sublattices of Leech lattice, Nagoya J. Math., 101(1986)

[10]T.Kondo, a private communications dated at Nov.8, 1984.