数理解析研究所講究録
第 599 巻 1986 年 119-126

Orlicz の問題について

岡山大 理　秋田 実 (Minoru Akita)
作陽短大　後藤 和雄 (Kazuo Gotô)
岡山大 理　鹿野 健 (Takeshi Kano)

Orlicz は Scottish Book の中で，次の問題を提出した([1],[2])。

Orliczの問題(No. 121)　次の2つの条件を満たす三角級数の例をあげよ。

(1) $$\sum(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

がすべての $x\in\mathbb{R}$ に対して発散する。

(2) $$\sum(|a_n|^{2+\varepsilon} + |b_n|^{2+\varepsilon}) < +\infty \quad (\forall\varepsilon>0).$$

本稿の主要な目的は，Orliczの問題の例をひとつあげることである。この問題はBanachや彼の仲間たちによって，特にOrlicz[3]によって研究された。

ここで，次のことを注意しておく。この問題の真の難解さあるいは真の精神は，Orliczが単なる存在定理を求めたので

はなく，具体的な例を求めたことにある。また，その例が，すべてのxに対して発散する性質を備えていなければならないことにある。

まず第一に，指数級数

(3) $$\sum c_n e^{2\pi i n x} \quad (x \in \mathbb{R})$$

のある部分和の大きさに関する知られた結果を利用して，部分的な解を述べよう。

Proposition 1. $c_n = n^{-\frac{1}{2}} \exp(ian\log n)$ $(a>0)$

とおくと，このとき指数級数(3)はほとんどすべての$x \in \mathbb{R}$に対して発散する。しかも

$$\sum |c_n|^{2+\varepsilon} < +\infty \quad (\forall \varepsilon > 0)$$

が成立する。

これは M. Weiss の結果[4]から従う，彼女は Orlicz の問題について知らなかったらしい。彼女は確率論的手法によって，指数級数

$$\sum n^{-\frac{1}{2}} \exp(i\beta n\log n + in\theta)$$

のふるまいを研究した。

Proposition 2.

$$c_n = \begin{cases} k^{-\frac{1}{2}} (\log k)^{-\frac{1}{4}} & \text{if } n = k^2 > 1, \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

とおくと，このとき，Proposition 1と同様の結果が成立する。

このことは Fiedler－Junkat－Körner の結果[5]から従う。彼らは指数和

$$S_N(x) = \sum_{n\le N} e^{\pi i n^2 x} \quad (x\in\mathbb{R})$$

のほとんどすべての x に対する評価に興味をもって研究した。

<u>Proposition 3.</u>　指数級数(3)がすべての x に対して発散し，しかも，

$$\sum |c_n|^{2+\varepsilon} < \infty \quad (\forall \varepsilon > 0)$$

となるような数列 $c_n \to 0$ が存在する．

このことは T. W. Körner の結果[6]から従う．Körner は，とりわけ，次の結果を証明した：

N が十分大きければ，すべての $t\in\mathbb{R}$ に対して，

$$\sqrt{N} \ll \sum_{1\le n\le N} a_n e^{int} \ll \sqrt{N}$$

となるような複素数 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_N$ が存在する。ただし，$|a_n| = 1$ $(n=1,2,\cdots,N)$ である。

しかし，Körner の証明の方法は effective ではなく，Orlicz の問題の具体例を与えることは出来ない．

他方，Hardy と Littlewood [7] は異なった見地から次の不等式を証明した：

$$S(N)=\sum_{n\leqq N}\exp(2\pi i(\alpha n\log n+\beta n))\ll\sqrt{N}$$

uniformly in $\alpha\neq 0$ and $\beta\in\mathbb{R}$.

我々の知るかぎり，$S(N)\gg\sqrt{N}$ $(\forall\beta\in\mathbb{R})$ であるかどうかについて研究された様子がない。従って，次の定理を証明しよう。

定理. α を正の実数，β を実数とする。このとき，次の不等式が任意の α，β に対して成立する。

(4) $$\left|\sum_{e^{-\frac{1}{\alpha}}N<n\leqq N}\exp(2\pi i(\alpha n\log n+\beta n))\right|\geqq C_\alpha\sqrt{N}.$$

ただし，C_α は α のみに依存する定数である。

このとき，次の系が成立する。

系 1.

$$S_N=\left|\sum_{e^{-1/\alpha}N<n\leqq N}\cos(2\pi\alpha n\log n+nx)\right|$$

$$\geqq\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{\alpha}}e^{-\frac{1}{2\alpha}}\left|\cos\left(2\pi\alpha N\exp\left(-\frac{\{\alpha\log N+\alpha+x\}}{\alpha}\right)-\frac{\pi}{4}\right)\right|+O\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

ただし，$\{y\}$は y の小数部分を表わす。

さて，ここで，Orlicz の問題の例をひとつ与える。三角級数(1)で

(5) $$\begin{cases} a_n=\ n^{-\frac{1}{2}}\cos(2\pi\alpha n\log n), \\ b_n=-n^{-\frac{1}{2}}\sin(2\pi\alpha n\log n)\end{cases}$$

とおく。この例が問題の条件をある α に対して満たしている

ことを示そう。まず

$$\sum(|a_n|^{2+\varepsilon}+|b_n|^{2+\varepsilon})<+\infty \quad (\forall\varepsilon>0)$$

が成立するのはあきらかである。次に，三角級数(1)がすべての$x\in\mathbb{R}$に対して発散することを示す。そのために，次の補題を必要とする。

補題（HardyのDivergent Series 定理26参照） 無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n$$

が収束するならば，任意の正数列 $k_n\uparrow\infty$ に対して，

$$\sum_{AN<n\leq N} k_n d_n = o(k_N)$$

が成立する。ただし，Aは定数で，$0\leqq A<1$ である。

今，三角級数(1)がある α に対していたるところ発散することを背理法によって証明する。三角級数

$$\sum(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\sum n^{-\frac{1}{2}}\cos(2\pi\alpha n\log n+nx)$$

がある x に対して収束すると仮定すると，上の補題において $k_n=\sqrt{n}$ とおくと

$$\sum_{e^{-\frac{1}{\alpha}}N<n\leq N}\cos(2\pi\alpha n\log n+nx)=o(\sqrt{N})$$

がある $x\in\mathbb{R}$ に対して成り立つ。しかし，系1から

$$\limsup_{N\to\infty}\frac{S_N}{\sqrt{N}}>0$$

がある x とある α（たとえば $\alpha=1,\ 1/\log 2$）に対して成立する。たとえば，$\alpha=1$ に対して同時近似の定理を利用して，

$$\limsup_{N\to\infty}\left|\cos\left(2\pi\alpha\exp\left(-\frac{\{\alpha\log x+\alpha+x\}}{\alpha}\right)-\frac{\pi}{4}\right)\right| > 0$$

を示すことが出来る。これは矛盾である。従って三角級数(1)はそのようなαに対して，いたるところ発散する。

最後に，定理の略証を記す。

$$f(x)=\alpha x\log x+\beta x \quad (\alpha>0,\ 0\leqq\beta<1)$$

とおくと，$f'(x)$は単調増加関数だから

$$f'(\gamma_k)=k-\frac{1}{2},\quad \gamma_k<\gamma_{k+1}$$

となるような実数$\gamma_k\ (k\in N)$が存在する。

$$M=[\alpha\log N+\alpha+\beta]$$

と定義する。ただし，$[y]$はyの整数部分を表わす。このとき

$$\gamma_M=e^{-\frac{1}{\alpha}}\gamma_{M+1}.$$

$$S_M=\sum_{\gamma_M<n\leqq\gamma_{M+1}}e^{2\pi i f(n)}$$

とおくと，van der Corput の補題[8]によって，

$$S_M=\int_0^\infty e^{2\pi i(f(x)-Mx)}dx\quad+O(1)$$

が成立する。ここで上の積分に対して stationary phase の方法[9]を使うと，

$$S_M=\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{\alpha}}\exp\left(-\frac{\{\alpha\log N+\alpha+\beta\}}{2\alpha}\right)\exp\left(\frac{\pi}{4}i-2\pi i\alpha N\exp\left(-\frac{\{\alpha\log N+\alpha+\beta\}}{\alpha}\right)\right)$$
$$+O(1)+O(1/\alpha)$$

を得る。よって，定理が成立する。

もし，αの値を制限すれば，次の系が成り立つ。

系2. もし $0<\alpha<1/2\log 2$ ならば，すべての $\beta\in\mathbb{R}$ に対して，

$$\sum_{1\leqq n\leqq N}\exp(2\pi i(\alpha n\log n+\beta n)) \gg \sqrt{N}$$

が成立する。ただし，不等式の定数はαのみに依存する定数である。

文献

[1] R.D.Mauldin (ed.): The Scottish Book. Birkhäuser, 1981.

[2] T. Kano: On the size of some trigonometric polynomials, In Polynômes Orthogonaux et Applications. Proceedings, Bar-le-Duc, Lecture Notes in Mathematics, Springer, No. 1171, 1984.

[3] N.K. Bary: A Treatise on Trigonometric Series. vol. I, Pergamon, 1964.

[4] M. Weiss: On Hardy-Littlewood series. Trans. Amer. Math. Soc., 91 (1954), 470-479.

[5] H. Fiedler, W. Junkat and O. Körner: Asymptotic expansions of finite theta series. Acta Arith., 32 (1977), 129-146.

[6] T.W. Körner: On a polynomial of Byrnes. Bull. London Math. Soc., 12 (1980), 219 - 224.

[7] G.H. Hardy and J.E. Littlewood: Some problems of Diophantine approximation: A remarkable trigonometrical series. Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A., vol. 2 (1916), 583 - 586.

[8] E.C. Titchmarsh: The Theory of the Riemann Zeta-Function Oxford, 1951.

[9] F.W.J. Olver: Error bounds for stationary phase approximations. SIAM. J. Math. Anal., vol. 5, No. 1 (1974), 19-29.