数理解析研究所講究録
第599巻 1986年 p.127

二次形式の表現への保型形式の応用

名大理 北岡良之 (Yoshiyuki Kitaoka)

ここでは次の問題を考える。

"$S^{(m)}, T^{(n)}$を整数係数の正値対称行列で$m \geq n$とする時$S[X] = {}^tXSX = T$が解$X \in M_{m,n}(\mathbb{Z})$を持つための十分条件又は解の数についての良い評価を与えよ"というのが問題です。

一般的な結果として

定理 $m \geq 2n+3$ならばSにのみ依る定数$c(S)$が存在し$S[X]=T$がすべての素数pに対し解$X_p \in M_{m,n}(\mathbb{Z}_p)$を持ち$\min_{0 \neq x \in \mathbb{Z}^n} T[x] > c(S)$ならば$S[X]=T$は解$X \in M_{m,n}(\mathbb{Z})$を持つ。

証明は算術的で、解の個数についての評価は一部の場合しか得られていませんが$m \leq 2n+2$の時の様子等を推測するには解析的方法が便利で circle method による idea でどの様に行うかの概略を講演では話しました。くわしくは Tata の Lectures on Siegel modular forms and representation by quadratic forms をご覧下さい。