数理解析研究所講究録
第600巻 1986年 204-211

3次元リーマン多様体の$\mathbb{R}^6$への局所等長埋入問題

慶応大 理工　前田 吉昭
城西大 理　中村 玄

0. 序.

n次元リーマン多様体(M^n, ds^2)を$n(n+1)/2$（以下$N = n(n+1)/2$とかく）次元ユークリッド空間に局所的に等長埋入する問題について、考察する。以下記号を簡単にするために、点$p_0 \in M$の近傍で(M^n, ds^2)の局所等長埋入が存在する時、それを、$i : (M^n, ds^2) \hookrightarrow \mathbb{R}^N$と書く。この問題は古くから考察された有名な問題である。特に、(M^n, ds^2)が解析的多様体であるとき、局所等長埋入を持つことが知られている（参 Jacobowitz [2]）。ここでは、C^∞リーマン多様体に対してC^∞局所等長埋入が存在するかという問題を考察したい。特に次の結果を述べる：

<u>定理</u>：(M^n, ds^2)をC^∞リーマン多様体とする。次の場合、局所等長埋入$i : (M^n, ds^2) \hookrightarrow \mathbb{R}^N$が点$p_0 \in M^n$の近傍U上で存在する。

(i) $n=2$の時、点p_0のガウス曲率$K(p_0) \neq 0$

(ii) $n=3$の時、点p_0の曲率テンソル$R(p_0) \neq 0$

上に述べた定理のうち、$n=2$の場合はよく知られた結果である。又、$n=3$のうちで曲率テンソル$R(p_0)$が、

(*) signature of $R(p_0)$が$(0,1)$か$(0,0)$以外

の場合 Bryant-Griffiths-Yang [1] によって解かれている。[ ] では，線形化偏微分方程式が対称双曲型か強双曲型となる非線形偏微分方程式に対する Nash-Moser 型定理を証明し，その応用として，$n=3$ の場合の等長埋入の存在を示した。一方 (*) の条件なしでは，等長埋入方程式は，単に，(実)主要部型でしかないことが分る。ここでは，$n=2, n=3$ の場合を統一的にとり扱うために線形化方程式が実主要部型になる非線形方程式の局所可解問題をとり扱い，その結果から局所等長埋入定理を証明する。

1. 等長埋入方程式とその線型化方程式.

以下 $n=2$ あるいは $n=3$ とする。今，(M^n, ds^2) の点 p_0 の近傍での等長埋入 $x:(M^n, ds^2)\hookrightarrow \mathbb{R}^N$ の存在は，M^n の局所座標系 $(u^1,\cdots,u^n)$ を用いて，次を満す $x^A = x^A(u)$，$A=1,\cdots,N$ の存在を示す事にある。

(1) $$\sum_{A=1}^{N} \frac{\partial x^A}{\partial u^i}\cdot\frac{\partial x^A}{\partial u^j} = g_{ij}(u) \qquad , i,j=1,\cdots,n.$$

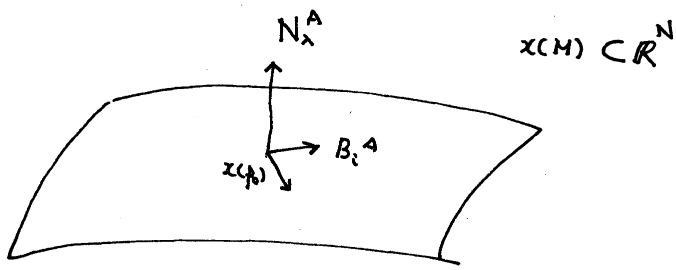
ここで，$\sum_{i,j=1}^{N} g_{ij}(u)\,du^i du^j = ds^2$.

(1) を考察するために，その線型化方程式を調べる。ここで，$x^A(u)$ を M^n の $\mathbb{R}^N$ への1つの C^∞ 埋入とする。この時，未知関数 $y^A = y^A(u)$，$A=1,\cdots,N$ について次の線形微分方程式を考える:

(2) $$\sum_{A=1}^{N} \frac{\partial x^A}{\partial u^i}\cdot\frac{\partial y^A}{\partial u^j} + \frac{\partial y^A}{\partial u^i}\cdot\frac{\partial x^A}{\partial u^j} = k_{ij}(u)$$

ここで、$(k_{ij}(u)),\ i,j=1,\cdots,n$ は u について C^∞ な $n\times n$ 対称行列である。

今、我々は微分幾何の用語を用いる。今、埋入 $(x^A(u)) : (M^n, ds^2) \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ に対して、$B_i^A(u) = \frac{\partial x^A}{\partial u^i}$ $(i=1,\cdots,n)$ は曲面の接ベクトル場であり、これは各点 $x(p_0)$ の接空間を張っている。これに対して単位法ベクトル場をとり固定される。これを $\{N_\lambda^A(u)\}_{\lambda=n+1}^{N}$ とする。



従って、$y^A(u)$ は、

$$y^A(u) = \sum_{i=1}^{n} y^i(u)\, B_i^A(u) + \sum_{\lambda=n+1}^{N} y^\lambda(u)\, N_\lambda^A$$

と一意に表わされるから、(2) は新たに未知関数 $(y_i(u), y_\lambda(u))$ について、

(3) $$\nabla_i y_j(u) + \nabla_j y_i(u) = 2\sum_{\lambda=n+1}^{N} y_\lambda(u) H_{ij\lambda}(u) + k_{ij}(u)$$

とかける。ここで、∇_i は $ds^2 = \sum g_{ij}(u)du^i du^j$ についての共変微分、$H_{ij\lambda}(u)$ は、$\{x^A(u), N_\lambda^A(u)\}$ についての第2基本形式である。($y_i(u), y_\lambda(u)$ はリーマン計量で添字を下したものである)。

以下の必要のために次の定義をしておく：

定義1.1. C^∞ 埋入 $x:(M^n, ds^2)\hookrightarrow \mathbb{R}^N$ が non-degenerate であるとは、才2基本形式 $\{H_{ij\lambda}(u)\}_{\lambda=n+1,\cdots,N}$ が、$n\times n$ 対称行列のなすベクトル空間の中で1次独立(各点 u で)であるときをいう。

2° 実主要部型線型偏微分方程式系

ここで我々は線形微分方程式の用語を用意する。

定義2.1. P を M 上の $m\times m$ classical (擬)微分作用素とし、その主表象を $p(x;\xi)$ とする。

(i) P が $(p_0;\xi_0)\in T^*M-\{0\}$ において実主要部型系であるとは、$(x_0;\xi_0)$ の錐近傍 Γ, 斉次 classical表象 $\tilde{p}(x;\xi)$, と $q(x;\xi)$ が存在して、

(4) $$\tilde{p}(x;\xi)\cdot p(x;\xi) = q(x;\xi)\,\mathrm{Id}_n \quad \text{in } \Gamma$$

かつ、dq と $\sum \xi_i dx^i$ は $\Gamma\cap\{(x;\xi)\mid q(x;\xi)=0\}$ 上で一次独立である。

(ii) P が $p_0\in M$ において($\mathrm{resp.}\ U\subset M$ において)実主要部型系であるとは、P は $\pi^{-1}(p_0)-\{0\}$ ($\mathrm{resp.}\ \pi^{-1}(U)-\{0\}$) の各点で主要部型系であるときをいう。(ここで、$\pi: T^*M\longrightarrow M$ は射影)。

ここで我々は(3)がどの様にして主要部型系になるかを見よう。例として、$n=2$ の場合を考えてみる。このとき、(3)の特性方程式は、次の行列式の0点で与えられる。

$$(5)\qquad \sigma(x;\xi) = \begin{vmatrix} \xi_1 & 0 & \xi_2 \\ 0 & \xi_2 & \xi_1 \\ H_{11} & H_{22} & H_{12} \end{vmatrix} = 0 \qquad (\text{mod. 低階項}).$$

従って、$d\sigma(x;\xi) \neq 0 \iff K = H_{12}^2 - H_{11}H_{22} \neq 0$ がいえる。Kは曲面のガウス方程式より、ガウス曲率に他ならない。

3. 主要部型系埋入の構成

2.で見た様に、(3)が主要部型になるためには、(M^n, ds^2)の曲率が関わる事が分る。実際我々は、次の事を得る：

命題3.1. 主定理の仮定の下で、任意の$\eta>0$と任意の正の整数sに対して、近傍$U \ni p_0$と3×3対称行列$\{H_{ij\lambda}(0)\}_{\lambda=1,2,3}$と$U$上の単位$C^\infty$ベクトル場$\{N^A_\lambda(u)\}_{\lambda=n+1,\dots,N}$と$C^\infty$埋入$(x^A(u))$が存在して：

(i) $(x^A(u))$ は non-degenerate 埋入

(ii) $\{N^A_\lambda(u)\}$ は $(x^A(u))$ の法ベクトル場

(iii) $\{H_{ij\lambda}(0)\}_{\lambda=n+1,\dots,N}$ は $(x^A(u))$ の単位法ベクトル$\{N^A_\lambda\}$に関する点p_0における第2基本量

(iv) $\left\| g_{ij}(u) - \sum_{A=1}^{N} \frac{\partial x^A}{\partial u^i}\cdot\frac{\partial x^A}{\partial u^j} \right\|_{H^s(0)} < \eta$

証明は解析的埋入を構成する時の手法により$x^A(u)$を作る。$g_{ij}(u)$をuについてTaylor展開し、$x^A(u)$のTaylor展開を逐次求める。この時、ガウス方程式により、曲率に対する第2基本量$\{H_{ij\lambda}(0)\}$を求めておき、それを出発にして求めてゆけばよい。

4. (3)の局所可解性

(1)の存在のためには命題3.1により、(3)の局所可解性が問題となる。ここで注意しておくことは $\{y_\lambda(u)\}_{\lambda=n+1,\dots,N}$ は、$\{H_{ij\lambda}(\partial u)\}$ の作り方から、代数的操作で解けていく。　一般的には、$N\times N$ 一階非線形微分方程式系

(6) $$\Phi(u) = g$$

で、$\mathcal{B}^\infty(\mathbb{R}^n)$ 係数の線形化方程式系で主要部型を $u=u_0$ でもつものの考察することになる（ここで、$\mathcal{B}^\infty(\mathbb{R}^n)$ は微係数がすべて有界の C^∞ 関数）。(6)に対して次が云える。

定理4.1. $\Phi(u)$ を $N\times N$ 非線形偏微分方程式系とする。$\Phi(u)$ の order $= m$，かつ $\Phi(u)$ は $\mathcal{B}^\infty(\mathbb{R}^n)$ 係数とする。$\Phi(u)$ は 0 order 以上の Sobolev 空間で Fréchet 微分可能で $\Phi'(u)$ をその微分とする。$p_0\in\mathbb{R}^n$，$u_0\in C^\infty(U,\mathbb{R}^N)$ とし，$\Phi'(u_0)$ は $N\times N$ 主要部型系とする。この時，U の中に含まれる p_0 の open 近傍 U_1，$s_0\in\mathbb{Z}_+$ と $\eta>0$ が存在して，任意の $g\in C^\infty(U_1)$ に対して

(7) $$\| g - \Phi(u)\|_{H^s(U_1)} < \eta$$

ならば，$u\in C^\infty(U_1,\mathbb{R}^N)$ で $\Phi(u)=g$ in U_1 となるものが存在する。

証明は Nash-Moser 陰関数定理に基づいている。線形化方程式

(8) $$\Phi'(u_0)v = h$$

は $p_0\in U$ の近傍では，解の一意性を持っていないから高階微分の解の評価を(8)の微分によって求める事は不可能に近い。

そこで、我々は、$\Phi'(u)$ の exact な局所右逆 $Q(u)$ を構成する。しかもそれは、次の性質を持つ。任意の $h \in H^s(\mathbb{R}^n)$ に対し、

(9) $\quad \|Q(u)h\|_{s-d} \leq C_s \|u\|_s$

(10) $\quad \Phi'(u)\,Q(u)h = h \quad \text{in } U_1.$

ただし、$\|u-u_0\|_\alpha \leq \delta$,（$\alpha$ は十分大きく固定する）。ここで、C_s, d, U_1 は u に無関係にとる。さらに、$\|\ \|_s$ は $H^s(\mathbb{R}^n)$ の norm. これは、実主要部型線型方程式の上に作用する0階フーリエ積分作用素の群を構成する。それは実主要部型線型方程式全体の上に transitive な作用をしておりかつ、非常によい多様体構造を持つ Lie 群となる事が示せる（参 Omori-Maeda-Yoshioka-Kobayashi [5]）。その構造（多様体の）から (9) の評価を持つ。後は、Nash-Moser の iteration scheme を追っていく事で定理が示せる。

5. 最後に、

等長埋込み問題の最近の結果として Lin [3] や Nakamura [4] 等が $n=2$ について調べられている。特に Lin の結果はガウス曲率が 0 を持つ点に対してであるが、これも我々の範囲で従う。又、$n=4$ の場合、曲率にある程度の条件をつければ局所等長埋入の存在を今までのやり方で示せるが、この方法がどこまで利用出来るかは、完全に調べ切ってはいない。

参考文献

[1] R. Bryant, P. Griffiths and D. Yang, Characteristics and existence of isometric embeddings, Duke Math. J. 50, 893-994 (1983).

[2] H. Jacobowitz, Local isometric embeddings, Ann of Math. Studies 102, 381-393 (1982).

[3] C.S. Lin, The local isometric embedding in $\mathbb{R}^3$ of two dimensional Riemannian manifolds with Gaussian curvature changing sign cleanly, Ph. D. dissertation at Courant Institute (1983).

[4] G. Nakamura, Local isometric embedding of two dimensional Riemannian manifolds into $\mathbb{R}^3$ with non-positive Gaussian curvature (submitted)

[5] H. Omori, Y. Maeda, A. Yoshioka and O. Kobayashi, regular Fréchet Lie groups I-VIII, Tokyo J. Math.