数理解析研究所講究録
第 600 巻 1986 年 245-260

Supersymmetry and the index theorem

東大理　杉山健一　(Ken-ichi Sugiyama)

§0. Introduction

$$\begin{cases} (X, g) : \text{compact Riemannian manifold} \\ E, F \to X : \text{complex vector bundles on } X \\ D : E \to F : \text{elliptic operator of 1-st order} \end{cases}$$

とする。この時

$$\text{a-ind}(D) := \dim \operatorname{Ker} D - \dim \operatorname{Coker} D$$

が定義されるが，ここで次の様な問題を考えよう。

<u>Problem</u>

a-ind(D) の積分公式を求めよ。

この問題に対し、今まで大きく分けて2つの解答が得られている。

<u>Ans 1</u>　(Atiyah - Singer)

K - theory を用いる方法。

Ans. 2 (Atiyah - Patodi - Singer)

e^{-tD^*D} の kernel function の $t \sim 0$ での漸近的展開を求め不変式論の助けを借りて求める方法。

この講義では，

$$E = \Delta_+ , \quad F = \Delta_-, \quad D = \text{Dirac's operator}$$

の場合に Topological index を求めることを目標とするが、その方法は supersymbol という symbol class を定義して，漸近展開公式を求め，それを用いて e^{-tD^*D} の kernel function の $t \sim 0$ での漸近的展開を不変式論を用いず直接計算によって求めようとするものである。

§1. Clifford algebra and exterior algebra.

この §. では，Clifford algebra と exterior algebra との間の関係について調べることを目標とする。まず，最初に Clifford algebra の定義より始めよう。

Def. 1-1 Clifford algebra

(V : Euclidean vector space with orthonormal basis $\{\gamma_1, \cdots, \gamma_n\}$ $(n=2l)$

とする。 Clifford algebra of V, $C(V)$ は $\mathbb{R}$ 上 $\{\gamma_1, \cdots,$

$\gamma_n\}$ より生成された algebra で，関係式

1) $\gamma_i \gamma_j = -\gamma_j \gamma_i \quad (\text{if } i \neq j)$

2) $\gamma_i^2 = -1$

を満たすもの。

以下，簡単のため $\mathbb{R}$-線型同型

$$\theta : C(V) \xrightarrow{\sim} \Lambda^* V$$

where

$$\theta\left(\textstyle\sum_I a_I \gamma^I\right) = \textstyle\sum_I a_I \gamma^{\wedge I}$$

$\gamma^{\wedge I}$ は γ^I の積を外積に置きかえたもの。

により、両者をしばしば同一視する。

また，$C(V) \otimes \mathbb{C}$ については次のことが知られている。

<u>Fact 1-2</u>

Δ : vector space / $\mathbb{C}$ (space of spinors)

が存在して，次の条件を満たす。

$$C(V) \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\Delta)$$

as $\mathbb{C}$-algebra.

さて，$a = \sum_I a_I \gamma^I \in C(V)$ に対し，

$$\Phi_t(a) := \sum_I t^{|I|} a_I \gamma^I \qquad (t>0)$$

と定義すると，次のことが成り立つ。

Lemma 1-3

1) $a, b \in \Lambda^* V$

$$\Rightarrow \lim_{t \downarrow 0} \Phi_{t^{-1}}(\Phi_t a \cdot \Phi_t b) = a \wedge b$$

2) $f \in \mathbb{C}[[x_1, \cdots, x_m]]$: $\mathbb{C}$ 上の m 変数形式的巾級数
$a_i \in C^2(V) = \bigoplus_{i<j} \mathbb{R}\gamma^i\gamma^j$

に対し，

$$\lim_{t \downarrow 0} \Phi_{t^{-1}}(f(t^2 a_1, \cdots, t^2 a_m)) = f^\wedge(a_1, \cdots, a_n)$$

(where
$f^\wedge$: 積をすべて外積に置き換えたもの。

$$\gamma_{n+1} := i^l \gamma_1 \cdots \gamma_n$$

とすると，

1) $\gamma_{n+1}^2 = 1$

2) $\gamma_{n+1} \cdot \alpha = \alpha \cdot \gamma_{n+1}$ for $^\forall \alpha \in C_0(V) := \bigoplus_{|I|=\text{even}} \mathbb{R}\gamma^I$

が成り立つことは単純な計算よりわかる。従って，

$$\Delta_\pm := \{\delta \in \Delta \mid \gamma_{n+1}\delta = \pm\delta\} \ : \text{respectively}$$

とし，$\alpha \in C_0(V)$ に対し

$$\mathrm{Tr}_s(\alpha) := \mathrm{Tr}(\alpha|\Delta_+) - \mathrm{Tr}(\alpha|\Delta_-) \ : \text{supertrace of } \alpha$$

とすれば，次のことが示される。

Lemma 1-4

$$\mathrm{Tr}_s(\alpha)\,\gamma^1\wedge\cdots\wedge\gamma^n = \left(\frac{2}{i}\right)^{\ell}\alpha_n \qquad \text{for } {}^{\forall}\alpha\in C_0(V)$$

where

α_n : homogeneous part of α of degree $= n$.

Lemma 1-3, Lemma 1-4 をあわせると次の基本定理を得る。

Th. 1-5

$f\in\mathbb{C}[[x_1,\cdots,x_m]]$

$a_i\in C^2(V)$

$$\lim_{t\downarrow 0}\mathrm{Tr}_s(\Phi_{t^{-1}}(f(t^2a_1,\cdots,t^2a_m)))\,\gamma^1\wedge\cdots\wedge\gamma^n = \left(\frac{2}{i}\right)^{\ell}[f^{\wedge}(a_1,\cdots,a_m)]_n$$

§2. Supersymbol calculus.

この§では, supersymbol algebra を定義し, その symbol calculus について述べる。

Notations

(X, g) : compact oriented C^∞-mfd, with metric g,

$$\dim_{\mathbb{R}} X = n \cdot (=2\ell), \quad \text{spinnable}$$

$\Delta \to X$: spinor bundle on X

$T^*X \xrightarrow{\pi} X$: cotangent bundle of X

この時，spinor bundle $\Delta \to X$ には X 上の Levi-Civita connection ∇_X より induce される connection が唯一つ存在し，これを ∇ とかく。

<u>Def. 2-1</u> synchronous frame

$$\begin{cases} x \in X \\ \sigma = (\sigma_1, \cdots, \sigma_N) : \text{a base of } \Delta_x \\ B_x(r) := \{y \in X : \operatorname{dist}(x, y) < r\} \end{cases}$$

とした時，$\Delta | B_x(r)$ 上に frame

$$\sigma_x = (\sigma_{1x}, \cdots, \sigma_{Nx}) : \text{synchronous frame at } x$$

を，

$$\sigma_{ix}(y) := \{\text{parallel displacement of } \sigma_i \text{ along } \overrightarrow{xy} \text{ w.r.to connection } \nabla\}$$

($\overrightarrow{xy}$: x と y を結ぶ最小測地線

として定義する。

また，

$$\rho : X \times X \to \mathbb{R}$$

なる C^∞-function を,

$$\left(\begin{array}{ll} 1) & 0 \le \rho \le 1 \\ 2) & \rho \equiv 1 \ \text{near} \ \Delta_X \hookrightarrow X \times X : \text{diagonal of } X \times X \\ 3) & \rho \equiv 0 \ \text{outside an open neighborhood of } \Delta_X \end{array} \right.$$

となるように1つとり、固定しておく。更に, $x \in X$ に対し

$$\rho_x : T_x X \to \mathbb{R}$$

を,

$$\rho_x(v) := \rho(x, \exp_x v)$$

により定義する。

<u>Def. 2-2</u> super-symbol.

1) $0 \le i \le n$, $k \in \mathbb{Z}$ に対し

$$S_\Delta^{i,k}(X) := \{ p = \sum_{|I|=i} p_I(x,\xi)\, dx^I \in \Gamma(T^*X : \pi^*(\Lambda^i T^*X \otimes \mathbb{C}))$$
$$\mid \ |D_x^\alpha D_\xi^\beta p_I(x,\xi)| \le C_{\alpha\beta} (1+|\xi|)^{k-|\beta|} \ \text{for} \ {}^\forall I \}$$

また, $p = \sum_{|I|=i} p_I(x,\xi)\, dx^I \in S_\Delta^{i,k}(X)$ に対し

$$\| p \|_{(\ell)}^{i,k} := \max_{I,\, |\alpha|+|\beta| \le \ell} \ \sup_{T^*X} \{ (1+|\xi|)^{-(k-|\beta|)} |D_x^\alpha D_\xi^\beta p_I(x,\xi)| \}$$

により、ノルムを定義する。

2) $m \in \mathbb{Z}$ に対し,

$$S_s^m(X) := \bigoplus_{i=0}^{n} S_s^{i,\,m-i}(X) \quad : \quad m\text{-th super-symbol}$$

と定義する。更に，$S_s^{\infty}(X)$，$S_s^{-\infty}(X)$ を

$$\begin{cases} S_s^{\infty}(X) := \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} S_s^m(X) \\ S_s^{-\infty}(X) := \bigcap_{m\in\mathbb{Z}} S_s^m(X) \end{cases}$$

により定義する。

<u>Def. 2-3</u> map θ，σ

1) $\theta : S_s^{\infty}(X) \rightarrow Op(\Delta)$

を，次の様に定義する。

$$\begin{cases} p \in S_s^m(X) \\ u \in \Gamma(X : \Delta) \end{cases}$$

に対し，

$$(\theta p)u(x)$$
$$:= (2\pi)^{-n}\int_{T_x^*X} d\xi\, p(x,\xi)\int_{T_xX} e^{-i\langle v,\xi\rangle}\,\bar{u}(v)\,\rho_x(v)\,dv$$

(ここで，$\bar{u}(v)$ は $u(\exp_x v)$ の synchronous frame at x による列ベクトル表示。

2) $\sigma : Op(\Delta) \rightarrow S^{\infty}(X)$

を，次の様に定義する。

まず, $u = \sum_i \lambda_i \sigma_i \in \Delta_x$ ($\{\sigma_i\}$: a base of $\Delta_x / \mathbb{C}$)

に対し,

$$\tilde{u}(y) := \sum_i \lambda_i \sigma_{ix}(y)\, \rho_x(\exp_x^{-1} y) \in \Gamma(X : \Delta)$$

とし, $P \in Op(\Delta)$ に対し、

$$\sigma(P)(x,\xi)u := \left[P\left(e^{i\langle \exp_x^{-1}y,\,\xi\rangle}\, \tilde{u}(y)\right)\right]_{y=x} \in \Delta_x$$

により、

$$\sigma(P)(x,\xi) \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\Delta_x) \simeq C(T_x^*X)\otimes\mathbb{C} \simeq \Lambda^* T_x^* X \otimes \mathbb{C}$$

を定義する。

以上の準備の下に, super-symbol における漸近展開公式は次の様に述べられる。

<u>Th 2-4</u> (Asymptotic expansion formula)

$$p = \sum_{|I|=i} p_I(x,\xi)\, dx^I \in S_s^{i,k}(X)$$

に対し、

$$p_t := \sum_{|I|=i} t^i p_I(x, t\xi)\, dx^I \in S_s^{i,k}(X), \quad t>0$$

とすると, 次のことが成り立つ。

$\exists \{P_\nu(t)\}_{0<t<1,\, \nu\in\mathbb{Z}_+}$: a family of differential operators

s.t.

1) $P_\nu(t): \Gamma(T^*X, \pi^*(\Lambda^*T^*X\otimes\mathbb{C})\oplus\pi^*(\Lambda^*T^*X\otimes\mathbb{C}))$
$$\to \Gamma(T^*X,\ \pi^*(\Lambda^*T^*X\otimes\mathbb{C}))$$

and

$$P_\nu(t):\ S_s^i(X)\oplus S_s^j(X)\ \to S_s^{i+j-\nu}(X)$$

2) $^\forall \nu\in\mathbb{Z}_+=\{\ell\in\mathbb{Z},\ \ell\geq 0\}$ に対し、

$\{P_\nu(t)\}_{0<t<1}$ は有界

(即ち、

$$P_\nu(t)=\sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta}(x,\xi:t)\,D_x^\alpha D_\xi^\beta$$

と局所的に書いた時、$^\forall\alpha,\beta$ に対し、

$\{a_{\alpha\beta}(x,\xi:t)\}_{0<t<1}$ は有界で、しかも

$\lim_{t\downarrow 0} a_{\alpha\beta}(x,\xi:t)$ が存在する。)

3) $p,\ q\in S_s^\infty(X)$ に対し、

$P_0(t)(p,q)$
$$=e^{-\frac{1}{4}R(\partial_\xi,\partial_\eta)}\,p(x,\eta)\wedge q(x,\xi)\,|_{\xi=\eta}$$

(但し、

$$R(\partial_\xi,\partial_\eta)=\sum R^i_{jk\ell}\,\partial_{\xi_i}\partial_{\eta_j}\,dx^k\wedge dx^\ell$$

$R^i_{jk\ell}$: curvature tensor of (X,g))

4) $A\subset S_s^{i,k}(X)$, $B\subset S_s^{j,\ell}(X)$: 有界集合

に対し、漸近的近似

$$p \underset{t}{\circ} q := \left[\sigma(\Theta p_t \circ \Theta q_t)\right]_{t^{-1}}$$
$$\underset{t \downarrow 0}{\sim} \sum_{\nu=0} t^{\nu} P_{\nu}(t)(p, q)$$
$$\text{for } {}^{\forall} p \in A,\ {}^{\forall} q \in B$$

が成り立つ。

Remark

ここで,
$$e^{-\frac{1}{4}R(\partial_\xi, \partial_\eta)} := \sum_{k=0}^{\infty} \left\{-\frac{1}{4}R(\partial_\xi, \partial_\eta)\right\}^k \times \frac{1}{k!}$$
と定義されるが, $k \geq \frac{n}{2}+1$ では, $(R(\partial_\xi, \partial_\eta))^k = 0$ となるため、これは有限和である。

§3. Calculation of topological index.

この§では, Th2-4 を用いて topological index を実際に計算することを目標とする。Dirac's operator
$$D : \Gamma(X : \Delta_+) \longrightarrow \Gamma(X : \Delta_-)$$
について次の事実は良く知られている。

Fact 3-1

$$\sigma(D^2)(x, \xi) = |\xi|^2 + \frac{1}{4} s(x)$$
$$(\ s : X \longrightarrow \mathbb{R} \quad : \text{ scalar curvature of } (X.g)$$

一方、一般論より、

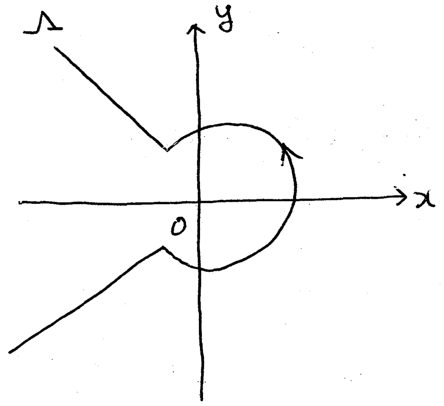
$$a\text{-}\mathrm{ind}(D) = (2\pi)^{-n}\int_{T^*X} \mathrm{Tr}_s\, \sigma(e^{-t^2D^2})_{t^{-1}}\, d\xi_x\, d\mathrm{vol}_x X \quad \text{for } {}^\forall t>0$$

となることは良く知られているから、我々は、

$$\lim_{t\downarrow 0} (2\pi)^{-n}\int_{T^*X} \mathrm{Tr}_s\, \sigma(e^{-t^2D^2})_{t^{-1}}\, d\xi_x\, d\mathrm{vol}_x X$$

を計算することを目標とする。また、ここで、D^2 は Dirac's operator による Laplacian D^*D を表わすものとする。

複素平面$\mathbb{C}$における curve Λ を



とり、$\lambda\in\Lambda$, $0<t<1$ に対し

$$R_{t^{-2}\lambda} = (t^{-2}\lambda + D^2)^{-1}$$

$$r_\lambda(t) = t^{-2}[\sigma(R_{t^{-2}\lambda})]_{t^{-1}}$$

$$a(t) = t^2[\sigma(D^2)]_{t^{-1}}$$

と定義する。この時、単純な計算より、

1) $(\lambda + a(t)) \circ_t r_\lambda(t) = 1$

2) $\sigma(e^{-t^2D^2})_{t^{-1}} = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\lambda \in t^{-2}\Lambda} e^{t^2\lambda}[\sigma((\lambda+D^2)^{-1})]_{t^{-1}}\, d\lambda$

$\lambda = t^{-2}\rho$ とおけば

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Lambda e^\rho r_\rho(t)\, d\rho.$$

となる。

さて，ここで，Th.2-4 及び Lemma 1-3 1) より，

$r_\lambda(t)$ を具体的に求めてみよう。

$$\Phi_{t^{-1}}[e^{-\frac{1}{4}t^2R(\partial_\xi,\partial_\eta)}\Phi_t(\lambda+a(t))\cdot\Phi_t(r_\lambda(t))] = 1 + O(t)$$

を具体的に計算すると，

$$[\lambda + |\xi|^2 - \frac{1}{2}t^2R(\xi,\partial_\xi) - \frac{1}{16}t^4\cdot R\cdot R(\partial_\xi,\partial_\xi) + t^2 s(x)]\cdot\Phi_t r_\lambda(t)$$
$$= 1 + \Phi_t(O(t))$$

但し、

$$R(\xi,\partial_\xi) = \sum R^i_{jk\ell}\,\xi_i\,\partial_{\xi_j}\, dx^k \wedge dx^\ell.$$
$$R\cdot R(\partial_\xi,\partial_\xi) = \sum R^i_{jpq}\,R^k_{irs}\,(dx^p\wedge dx^q)\cdot(dx^r\wedge dx^s)\,\partial_{\xi_j}\partial_{\xi_k}.$$

$$P_t = |\xi|^2 - \frac{1}{2}t^2R(\xi,\partial_\xi) - \frac{1}{16}t^2R\cdot t^2R(\partial_\xi,\partial_\xi)$$

として，方程式

$$(\lambda + P_t + t^2 s(x))\cdot R_\lambda(t) = 1$$

を考えよう。

operator P_t は，T_xX の直交基底及び Δ_x の $\mathbb{C}$ 上の基底をうまくとることにより、

$$P_t = \sum_{j=1}^{\ell} P_j(t)$$

$$P_j(t) = \begin{bmatrix} P_{j,+1}(t) & & & & 0 \\ & P_{j,-1}(t) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & P_{j,+\frac{N}{2}}(t) & \\ 0 & & & & P_{j,-\frac{N}{2}}(t) \end{bmatrix}$$

但し、

$$\begin{cases} P_{j,\pm\ell}(t) = \xi_{2j-1}^2 + \xi_{2j}^2 \pm \frac{i}{2} t^2 \omega_{j,\ell} \left(\xi_{2j-1} \frac{\partial}{\partial \xi_{2j}} - \xi_{2j} \frac{\partial}{\partial \xi_{2j-1}} \right) \\ \qquad + \frac{1}{16} t^4 \omega_{j,\ell}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_{2j-1}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_{2j}^2} \right) \\ \omega_{j,\ell} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ここで，

$$\omega_j := \begin{bmatrix} 0 & -i\omega_{j,1} & & & \\ i\omega_{j,1} & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & -i\omega_{j,\frac{N}{2}} \\ & & & i\omega_{j,\frac{N}{2}} & 0 \end{bmatrix} \in \Lambda^* T_x^* X \otimes \mathbb{C}$$

により、curvature tensor $R(x)$ は

$$R(x) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_1 & & & \\ \omega_1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & -\omega_\ell \\ & & & \omega_\ell & 0 \end{bmatrix}$$

とかけることに注意しておく。ここで，次の補題が成立する。

<u>Lemma 3-2</u>

1) $\Upsilon_\lambda(t) - \Phi_{t^{-1}} R_\lambda(t) = O(t)$

2) (Mehler's formula)

$$\int_{T_x^*X} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda\in\Lambda} e^\lambda \, \Phi_{t^{-1}}(R_\lambda(t))\, d\lambda \right] d\xi_x$$

$$= \pi^\ell e^{t^2 s(x)} \, \Phi_{t^{-1}} \left[\prod_{j=1}^{\ell} \frac{\frac{t^2\omega_j}{2i}}{\sinh\left(\frac{t^2\omega_j}{2i}\right)} \right]$$

<u>Remark</u>

ここでの ω_j は $C_2(T_x^*X)$ の元と見做している。

以上の準備の下に計算を始めよう。

$$\lim_{t\downarrow 0} (2\pi)^{-n} \int_{T^*X} \mathrm{Tr}_s\, \sigma(e^{-t^2D^2})_{t^{-1}}(x,\xi)\, d\xi_x\, d\mathrm{vol}_x X$$

$$= \lim_{t\downarrow 0} (2\pi)^{-n} \int_{T^*X} \mathrm{Tr}_s \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda\in\Lambda} e^\lambda \, \Upsilon_\lambda(t)\, d\lambda \right] d\xi_x\, d\mathrm{vol}_x X$$

<u>Lemma 3-2</u> 1) より、

$$= \lim_{t\downarrow 0} (2\pi)^{-n} \int_{T^*X} \mathrm{Tr}_s \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda\in\Lambda} \Phi_{t^{-1}}(R_\lambda(t))\, d\lambda \right] d\xi_x\, d\mathrm{vol}_x X$$

Lemma 3-2 2) より、

$$= \lim_{t \downarrow 0} (2\pi)^{-n} \cdot \pi^{\ell} \int_X e^{t^2 s(x)} \mathrm{Tr}_s \Phi_{t^{-1}} \Big[\prod_{j=1}^{\ell} \frac{\frac{t^2 \omega_j}{2i}}{\sinh\left(\frac{t^2 \omega_j}{2i}\right)} \Big] d\mathrm{vol}_X$$

Th. 1-5 より、

$$= (2\pi)^{-n} \left(\frac{2\pi}{i}\right)^{\ell} \int_X \Big[\prod_{j=1}^{\ell} \frac{\frac{\omega_j}{2i}}{\sinh\left(\frac{\omega_j}{2i}\right)} \Big]_n$$

Remark

ここで積をすべて外積におきかえた。

$$= (-1)^{\ell} \int_X \Big[\prod_{j=1}^{\ell} \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{\omega_j}{2\pi}}{\sinh\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\omega_j}{2\pi}\right)} \Big]_n$$

$$= (-1)^{\ell} \int_X \hat{A}(X)$$

($\hat{A}(X)$: $\hat{A}$-genus of X

従って結局，次の定理を得た。

Main Theorem (Index theorem for Dirac's operator)

$$a\text{-}\mathrm{ind}(D) = (-1)^{\ell} \int_X \hat{A}(X).$$