

## カオスにおける量子古典対応

京大理 戸田幹人 (Mikito Toda)

足立 聡 (Satoshi Adachi)

カオスにおける量子古典対応について2つの観点から論ずる。§1では量子系の“軌道不安定性”を論ずる。そのために量子 Lyapunov 数を導入し、具体的な例について計算を行なったのでその結果を報告する。§2では Feynman の path integral を Poincaré 写像を用いて計算する方法について述べる。

### §1. 量子系の“軌道不安定性”

#### 1-1. 量子 Lyapunov 数

古典系のカオスの特徴である軌道不安定性は Lyapunov 数で定量化される<sup>1)</sup>。これに対応する量子系のカオス的挙動の特徴をとらえるため、量子 Lyapunov 数を導入する。まず量子系の位相空間における分布関数を

$$Q(\vec{p}, \vec{q}, t) \equiv |\langle \vec{p}, \vec{q} | \psi(t) \rangle|^2 \quad (1-1)$$

と定義する。ここで  $|\vec{p}, \vec{q}\rangle$  は位相空間の点  $(\vec{p}, \vec{q})$  に局在した最小不確定性波束である。 $\vec{p}$ ,  $\vec{q}$  はそれぞれ運動量と座標で

ある。(1-1)はQ表示と呼ばれる。<sup>2)</sup>  $2n$ 次元の位相空間の  $2n-1$ 次元の等エネルギー面内に  $2n-2$ 次元の微小な超曲面を考えその時間発展を追う。古典系では、この超曲面の面積  $S(t)$ は

$$S(t) \sim \exp \sum_{j=1}^{2n-2} \alpha_j t = \exp -\alpha_{2n-1} t = \exp \alpha_1 t \quad (1-2)$$

と変化する。ただし Lyapunov 数を  $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_{2n-1}$  とし、Liouville の定理から  $\sum_{j=1}^{2n-1} \alpha_j = 0$ 、時間反転対称性から  $\alpha_j = -\alpha_{2n-j}$  である。従って最大 Lyapunov 数は  $S(t)$  の時間変化から漸近的に

$$\alpha_1 \sim \log S(t)/t \quad (1-3)$$

として得られる。この考えを量子系に拡張しよう。或る位相点  $(\vec{p}_0, \vec{q}_0)$  に局在した最小不確定性波束  $|\vec{p}_0, \vec{q}_0\rangle$  を初期状態として選び、分布関数  $Q(\vec{p}, \vec{q}, t)$  の等高面  $\Sigma_t = \{(\vec{p}, \vec{q}) \mid Q(\vec{p}, \vec{q}, t) = \omega(t)\}$  の時間変化を追う。ここで等高面  $\Sigma_t$  の高さ  $\omega(t)$  は、 $\Sigma_t$  の内部の確率  $P$  が一定である様に、即ち

$$\int Q(\vec{p}, \vec{q}, t) \frac{d\vec{p} d\vec{q}}{(\pi\hbar)^n} \equiv P \quad (n: \text{自由度}) \quad (1-4)$$

$$Q(\vec{p}, \vec{q}, t) \geq \omega(t)$$

と選ぶ。 $\Sigma_t$  の面積  $S(t)$  が指数関数的に増大する時、量子系は“軌道不安定性”を持つと考える事ができる。この時、 $S(t)$  の時間変化の平均から量子 Lyapunov 数  $\alpha_q$  を

$$\alpha_q \sim \log S(t)/t \quad (1-5)$$

と定義する。

### 1-2. "Arnold の猫" の量子力学

(1-5)で導入した量子Lyapunov数を "Arnold の猫" の量子系で計算する。"Arnold の猫" は 2次元トラス  $M = \{(q, p) \mid 0 \leq q \leq 1, 0 \leq p \leq 1\}$  上の 1次変換  $T$

$$\begin{pmatrix} q' \\ p' \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \text{ mod } 1 \quad T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \quad (1-6)$$

である。ただし  $\det T = 1$ 。  $\text{Tr } T > 2$  の時 (1-6) は双曲的でありカオスを示す。"Arnold の猫" の量子力学<sup>3)</sup>は Green 関数

$$G(q', q) = (2\pi i \hbar)^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ i (T_{11} q^2 - 2qq' + T_{22} q'^2) / 2\hbar \right\} \quad (1-7)$$

で時間発展する (以下  $T_{12} = 1$ )。

以下、初期状態  $|p_0, q_0\rangle$  から出発した波束の時間変化を分布関数  $Q(p, q, t) = |\langle p, q | G^t | p_0, q_0 \rangle|^2$  で調べる。Fig. 1 に示すのは  $Q(p, q, t)$  の等高線の時間発展の代表例である。時間発展の初期には波束は行列  $T$  の固有値  $\lambda_1, \lambda_2$  のうち  $\lambda_1$  に対応する固有ベクトル  $e_1$  の方向に引き伸ばされる。  $M$  から外に出た部分は周期境界条件によりたたまれる。この図の様子は右奥系の "Arnold の猫" と全く同じである。

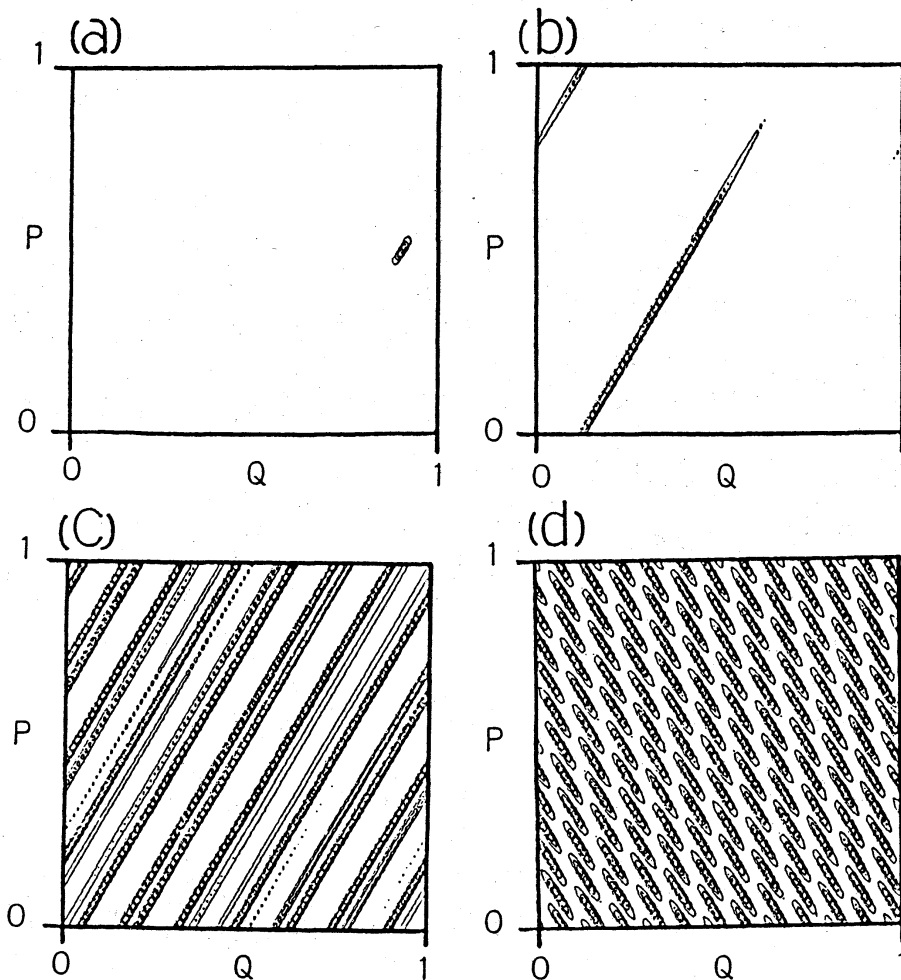


Fig. 1 "Arnold の猫" の量子力学における分布関数  $Q(p, q)$  の時間変化。(a)  $t=1$  (b)  $t=3$  (c)  $t=5$  (d)  $t=7$ 。

$$T_{11} = T_{22} = 2, \quad T_{21} = 3, \quad 2\pi\hbar = 1/3000.$$

分布関数の等高線の長さ  $l(t)$  の指数関数的な変化から (1-5) により量子 Lyapunov 数が評価できる。Fig. 2 に示すのは Fig. 1 の等高線の長さの時間変化である。時間発展の初期には  $l(t)$  は指数関数的に伸びる。量子 Lyapunov 数  $\alpha_q$  は古典系の最大 Lyapunov 数  $\alpha_1$  と良く一致する。

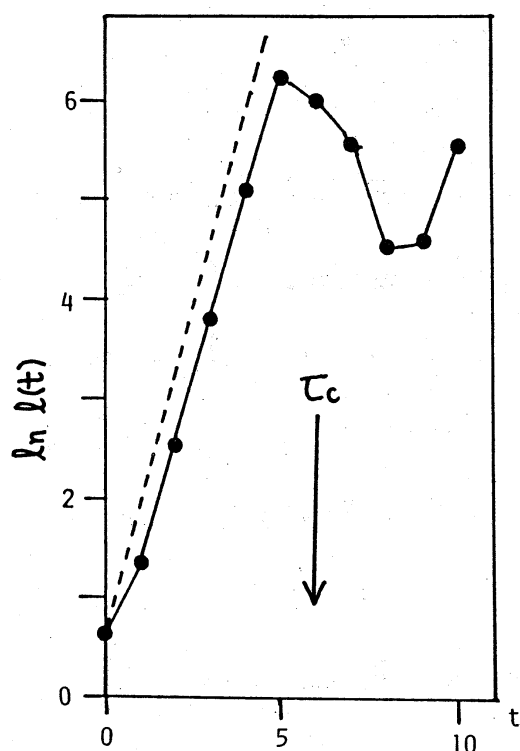


Fig. 2 "Arnoldの猫"の量子論における分布関数  $Q(p, q, t)$  の等高線の長さの時間変化。破線には古典論の等高線の変化を示す。パラメーターの値は Fig. 1 と同じである。

しかし量子古典対応は時刻  $\tau_c$  で突然に破れる。この時、量子系の分布関数の等高線を見ると、それまでの古典的なパターンが壊れ、複雑な模様があらわれている。量子古典対応の破れる時刻  $\tau_c$  は数値実験により

$$\tau_c \sim \log(S_R/\hbar)/\alpha_q \quad (1-8)$$

であたえられる。ここで  $\alpha_q = \alpha_1$  であり位相空間  $M$  の面積  $S_R = 1$  である。(1-8)の意味を考えよう。最小不確定性波束の等高線の長さ  $l(t)$  は  $\hbar \exp \alpha_1 t$  で伸びる。引き伸ばされた波束のうち  $M$  からみ出た部分は折りたたまれる。折りたたまれた各分枝の間隔  $d(t)$  は  $d(t) \sim S_R / (\hbar \exp \alpha_1 t)$  で減少する。従って  $\tau_c$  は  $d(t) \sim \hbar$  となった時刻、即ち折りたたまれた各分枝

が量子干渉をおこしはじめた時刻である。

### 1-3 Double Resonance Model (DRM)<sup>4)</sup>

(1-8)を評価した時、カオスの一様性が暗に使われていた。それは、折りたたまれた各分枝の間隔  $d(t)$  が一定である事にあらわれている。一般の系ではカオスは一様ではなく、折りたたまれる各分枝の間隔は一定ではない。  $d(t) > 0(\text{所})$  の所では波束の折りたたみが量子系でも見えるが、  $d(t) < 0(\text{所})$  では各分枝の間で量子干渉が発生し、うなりが生じる。

Fig. 3 に示すのは Double Resonance Model (DRM)

$$H(t) = \frac{I^2}{2} + V \cos \theta + V \cos(\theta - \omega t) \quad (1-9)$$

の場合の波束の時間発展である。カオスの特徴である hetero-clinic 構造が量子系の時間発展でも見られる。しかし折りたたみの間隔が  $0(\text{所})$  より細かい所で量子干渉によるうなりが発生し、古典的パターンの一部が消滅する。Fig. 4 に等高線の長さ  $l(t)$  の時間変化を示す。量子系の時間発展の初期には折りたたみによる量子干渉があるが引き伸ばしの作用が優勢である。そのために  $l(t)$  は平均として指数関数的に増大し、これから  $\alpha_q \sim 0.17$  を得る。  $\alpha_q$  は古典系の最大 Lyapunov 数  $\alpha_1 \sim 0.60$  より小さい。これは、細かく折りたたまれた部分で量子干渉によるうなりが発生し、古典的パターンの一部が消滅

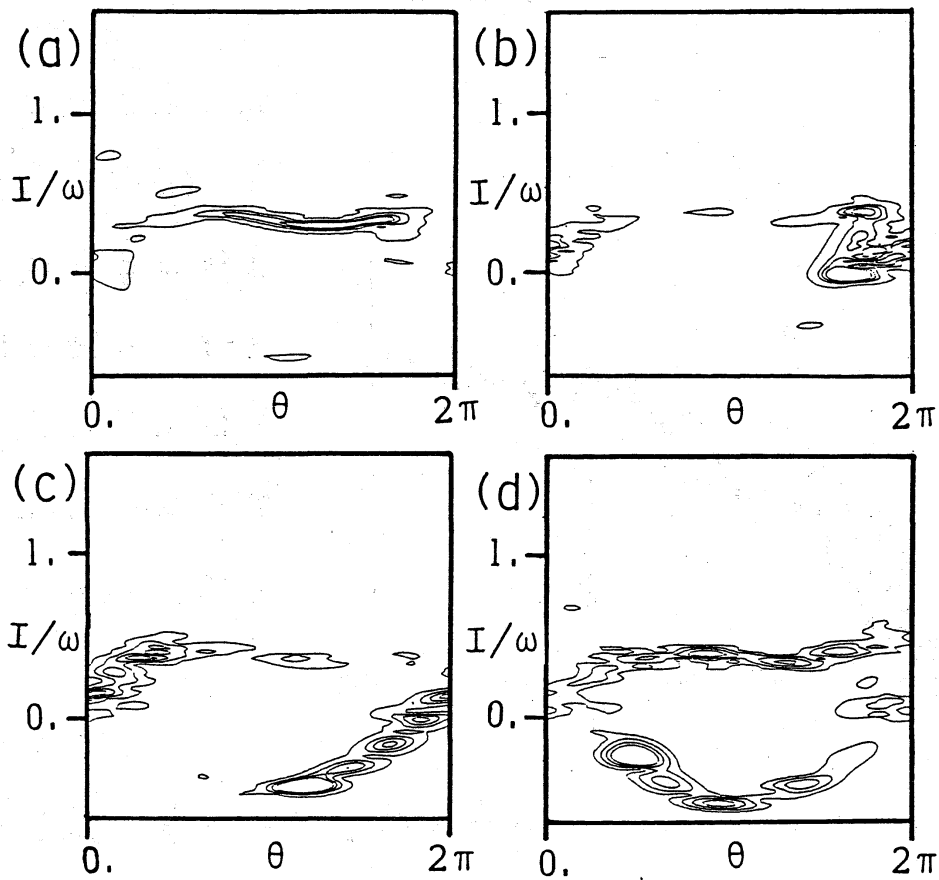


Fig. 3 DRMの量子論で分布関数の示す  
heteroclinic構造におけるうなりの発生  
 $V=1600$ ,  $\omega=160.3$ ,  $\hbar=1$

するからである。以上の様に、“Arnoldの猫”と異なり、カオスが一様ではない一般の系では量子Lyapunov数 $\alpha_q$ は古典系の最大Lyapunov数 $\alpha_1$ より小さい。

量子系の時間発展は $t_c \sim 20$ で、指数関数的伸びからゆるやかな増大へと変化する。量子系のカオスの“軌道不安定性”は有限の時間スケールで飽和する。“Arnoldの猫”の場合と違ってDRMの量子論の波束は時刻 $t_c$ では、まだカオス領域の

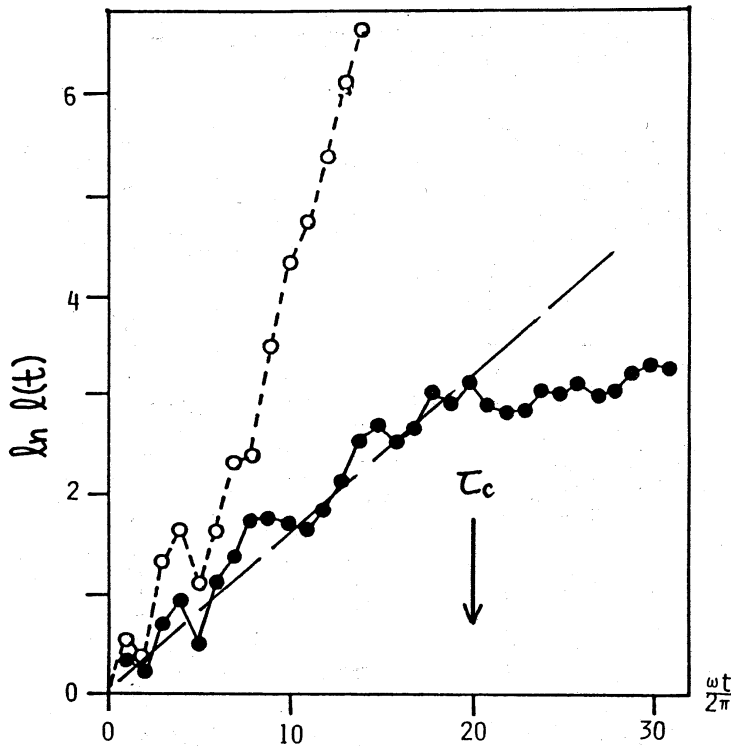


Fig. 4 DRM の等高線の長さ  $l(t)$  の時間変化。破線は古典論で実線は量子論。パラメータの値は Fig. 3 と同じである。これから  $\alpha_1 \sim 0.60$ ,  $\alpha_2 \sim 0.17$ ,  $\tau_c \sim 20$  を得る。

全域に広がっていない。この事から DRM の量子論が非エルゴード的である事が示唆される。時刻  $\tau_c$  では、波束は heteroclinic 構造によって多重に折りたたまれ、複雑なうなりを生じている。量子系の分布関数では折りたたみに際して、各分枝の持っている位相、即ち、作用積分の差によって量子干渉が起こる。カオスでは各分枝のたどる古典軌道の複雑さが位相差の乱雑さとなり、 $\tau_c$  以降では位相のそろった進行波の形成が不可能になるのである。これが DRM における量子古典対応の破れのメカニズムである。以上の事は、カオスが一般ではない一般の系に対しても言える事である。



## §2. Poincaré プロパゲーター

以下で、Poincaré写像1回分の古典軌道から半古典近似した経路積分によって構成した《Poincaréプロパゲーター》を用いて固有エネルギーを求める公式を記述する。これはChaos的挙動を示す系にも適用可能である。

Hamiltonian  $H$  に対して、プロパゲーター  $\hat{G}(E)$  の跡はその極の位置として固有エネルギーの情報を与えている：

$$\text{tr} \{ \hat{G}(E) \} = i\hbar \sum_n \frac{1}{E - E_n + i\epsilon} \quad (2-1)$$

Gutzwiller はこれを周期軌道に関する和として半古典的に評価した<sup>5)</sup>：

$$\text{tr} \{ \hat{G}(E) \} \cong \sum \frac{T_\alpha}{2 \sinh(\frac{u_\alpha}{2})} e^{\frac{i}{\hbar} S_\alpha - \frac{\pi i}{2} m_\alpha} \quad (2-2)$$

ここで、 $S_\alpha, T_\alpha, u_\alpha$  と  $m_\alpha$  はそれぞれ周期軌道  $\alpha$  の作用、周期、Liapunov数と共役点の数である。ここで、全ての周期軌道は不安定と仮定している。と仮定した。

実際にこの公式を具体的な系に適用することは古典カオスの中に埋れている全ての周期軌道を求めることを要求する。しかしながら、量子力学はプランク定数  $\hbar$  より微細な古典力学の位相空間の構造を見ないので、上の要求は過剰であると言える。

もうひとつの方法として、Poincaré 写像1回分の古典軌道から《Poincaré プロパゲーター》を半古典的に計算し、それを Poincaré 横断面 $\Sigma$  はり合わせる<sup>6)</sup>ことにより通常のプロパゲーターを表わす方法を定式化する。

$N$  自由度系の位置座標空間  $C$  に Poincaré 横断面  $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^N; x_1 = 0\}$  を設定し、 $C$  を  $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^N; x_1 < 0\}$  と  $\mathcal{Q} = \{x \in \mathbb{R}^N; x_1 > 0\}$  に分割する。また以下 $\mathcal{C}$  は Hamiltonian  $H$  が  $\Sigma$  に関して対称であると仮定する。

このとき、Auerbach<sup>5)</sup> のプロパゲーターを面 $\Sigma$  はり合わせる<sup>6)</sup>技法を用いると、始点  $x'$  と終点  $x$  を  $\Sigma$  上に持つ通常のプロパゲーター  $G(x, x'; E)$  を

$$G(x, x'; E) = 2 \left\{ G^{(\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P})}(x, x'; E) + G^{(\mathcal{Q} \leftarrow \mathcal{P})}(x, x'; E) \right\} \quad (2-3)$$

と表わすことができる。ただし、

$$G^{(\alpha \leftarrow \beta)}(x, x'; E) = \int_0^\infty dt e^{iEt/\hbar} \int_{x(0)=x'}^{x(t)=x} \mathcal{D}[x(\cdot)] e^{\frac{i}{\hbar} S[x(\cdot)]}, \quad (\alpha, \beta \in \{\mathcal{P}, \mathcal{Q}\}; x, x' \in \Sigma) \quad (2-4)$$

である。ここで  $S[x(\cdot)]$  は経路  $x(\cdot)$  に沿った作用である。また、 $\alpha, \beta \in \{\mathcal{P}, \mathcal{Q}\}$  に対し、 $\mathcal{D}^{(\alpha \leftarrow \beta)}[\cdot]$  は経路を  $\Sigma$  面上の点  $x'$  を  $\beta$  へと出発し、最終的に  $\alpha$  から  $\Sigma$  面上の点  $x$  に到着する経路だけに制限したことを表わす。

さらに (2-4) を導入されたプロパゲーターは次の積分方程式を満たす:

$$\begin{aligned}
 G^{(\phi \leftarrow \phi)}(x, x'; E) &= G^{(\phi \leftarrow \phi)}(x, x'; E) \\
 &+ \int_{\Sigma} dx'' G^{(\phi \leftarrow \ell)}(x, x''; E) \frac{\vec{v}_L'' + \vec{v}_I''}{2} G^{(\phi \leftarrow \phi)}(x'', x'; E) \\
 G^{(\phi \leftarrow \ell)}(x, x'; E) &= G^{(\phi \leftarrow \ell)}(x, x'; E) \\
 &+ \int_{\Sigma} dx'' G^{(\phi \leftarrow \ell)}(x, x''; E) \frac{\vec{v}_L'' + \vec{v}_I''}{2} G^{(\phi \leftarrow \ell)}(x'', x'; E) \\
 (x, x' \in \Sigma) . & \qquad \qquad \qquad (2-5)
 \end{aligned}$$

ただし

$$G^{(\alpha \leftarrow \beta)}(x, x'; E) = \int_0^{\infty} dt e^{\frac{i}{\hbar} E t} \int_{x^{(0)}=x'}^{x^{(t)}=x} \mathcal{D}[x^{(t)}] e^{\frac{i}{\hbar} S[x^{(t)}]} ,$$

$(\alpha, \beta = (\phi, \phi), (\phi, \ell) ; x, x' \in \Sigma)$  (2-6)

である。ここで  $\mathcal{D}^{(\phi \leftarrow \phi)}[.]$  は経路を  $\Sigma$  面上の点  $x'$  を  $\phi$  へと出発し、面  $\Sigma$  を横切ることなく、 $\phi$  から  $\Sigma$  面上の点  $x$  に到着する経路だけに制限したことを表わす。まったく同様に、 $\mathcal{D}^{(\phi \leftarrow \ell)}[.]$  は経路を  $\Sigma$  面上の点  $x'$  を  $\ell$  へと出発し、 $\ell$  から  $\phi$  へと面  $\Sigma$  を一度だけ横切り、 $\phi$  から  $\Sigma$  面上の点  $x$  に到着する経路だけに制限したことを表わす。つまり、 $G^{(\phi \leftarrow \ell)}$  は Poincaré 写像 1 回に相当する「Poincaré プロパゲーター」である。

この Poincaré プロパゲーターを用いると、固有エネルギー

を定める方程式は

$$\det \begin{bmatrix} G^{(\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{Q})} \frac{\vec{v}_1}{2} - \mathbb{1} & G^{(\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{L})} \\ \frac{\vec{v}_1}{2} G^{(\mathcal{Q} \leftarrow \mathcal{L})} \frac{\vec{v}_1}{2} & \frac{\vec{v}_1}{2} G^{(\mathcal{Q} \leftarrow \mathcal{L})} - \mathbb{1} \end{bmatrix} = 0 \quad (2-7)$$

となる。

自明な例として、この公式を1次元箱型 Potential に適用してみよう：

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x), \quad (2-8)$$

$$V(x) = \begin{cases} 0, & (|x| < \frac{a}{2}) \\ +\infty, & (|x| > \frac{a}{2}) \end{cases}, \quad (2-9)$$

$$\Sigma = \{0\}, \quad \mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^1; x < 0\}, \quad \mathcal{Q} = \{x \in \mathbb{R}^1; x > 0\}. \quad (2-10)$$

この場合、(2-7)式の左辺は次のようになる：

$$\begin{aligned} \text{L.H.S.} &= \det \begin{bmatrix} \frac{1}{2} e^{\frac{i}{\hbar} \sqrt{2mE} 2a} - 1 & \sqrt{\frac{m}{2E}} e^{\frac{i}{\hbar} \sqrt{2mE} 2a} \\ \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2E}{m}} e^{\frac{i}{\hbar} \sqrt{2mE} 2a} & \frac{1}{2} e^{\frac{i}{\hbar} \sqrt{2mE} 2a} - 1 \end{bmatrix} \\ &= 1 - e^{\frac{i}{\hbar} \sqrt{2mE} 2a}. \end{aligned} \quad (2-11)$$

よって、(2-7)と(2-11)より固有エネルギーは

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2, \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (2-12)$$

となる。

### §3. まとめ

本研究ではカオスにおける量子古典対応について論じた。  
 §1では量子系のカオスの“軌道不安定性”を特徴づけるものとして量子Lyapunov数を導入した。2つの代表的な例について数値計算を行ない、以下の結論を得た。カオスの基本的メカニズムは引き伸ばしと折りたたみであるが、引き伸ばしにおいては量子古典対応が良く成り立つ。量子系の“軌道不安定性”は量子Lyapunov数が正である事で特徴づけられる。量子古典対応の破れは、折りたたみに際して波動関数の量子干渉によるうなりが発生する事から始まる。カオスが一般でない一般の系では量子干渉によるうなりによって、量子Lyapunov数が古典Lyapunov数より小さくなる。また、波動関数が複雑に折りたたまれて乱雑な量子干渉をおこした後では、量子系のカオス的挙動は見られなくなる。この事から量子系のカオスの非エルゴード性が示唆される。

§2ではPoincaré写像1回に相当する古典軌道を用いて半古典的に経路積分を評価することによりつくられた《Poincaréプロパゲーター》を“はり合わせる”ことにより通常のプロパゲーターを表現する方法が定式化された。これは周期軌道を枚举することなしにカオス的挙動を示す系の固有エネルギーを得ることを可能にする。適用例としては可積分である1次元箱型

ポランシヤルがとりあげられた。カオスの挙動を示す非等方的 Kepler 問題への適用が現在進行中<sup>7)</sup>である。

### Reference

- 1) V. I. Oseledec, Trans. Moscow Math. Soc. 19, 197 (1968)
- 2) J. Klauder and E. Sudarshan, Fundamentals of Quantum Optics (W. Benjamin, New York, 1968)  
K. Takahashi and N. Saito, Phys. Rev. Lett. 55 (1985) 645
- 3) J. H. Hannay and M. V. Berry, Physica 1D, 267 (1980)
- 4) M. Toda and K. Ikeda, to appear in J. Phys. A.
- 5) M. C. Gutzwiller, J. Math. Phys. 8, 1979 (1967); 10, 1004 (1969);  
11, 1971 (1970); 12, 343 (1971); 14, 139 (1973); 18, 806 (1977);  
Physica 5D, 183 (1982)
- 6) A. Auerbach, S. KIVELSON and D. Nicole, Phys. Rev. Lett. 53, 411 (1984)  
A. Auerbach, S. KIVELSON, Nucl. Phys. B257, 799 (1985)
- 7) S. Adachi, in preparation