

Digital制御系のカオス的丸め誤差

神戸大・工 潮 俊光 (Toshimitsu Ushio)
U. C. Berkeley C. S. Hsu

1. はじめに

最近のデジタル技術の発達にともない、制御系においても、補償器をデジタル化する機会が多くなった。しかしながら、補償器における量子化がシステムのふるまいに大きな影響を与えることがしばしばあり、古くから問題となっている。^{1) 2)}

そこで本報告では、補償器における丸めによって、デジタル制御系にカオスが存在することを示す。まず、プラントは、連続時間システムを離散化することによって、線形差分方程式でモデル化され、丸めが存在する補償器は cell mapping でモデル化されることを示す。次に、そのシステムにおいてカオスの存在するための十分条件を求める。最後に、無限語長の補償器を用いた場合にはシステムは安定となるが、丸めによってカオス(カオス的丸め誤差)が発生する制御系の例

を紹介する。さらに、そのアトラクタが自己相似性を持つ場合と持たない場合があることを示す。

2. デジタル制御系

本報告では、図1で示されるデジタル制御系を考える。プラントは次の線形差分方程式で記述される。

$$\left. \begin{aligned} x_p(k+1) &= A_p x_p(k) + b_p u(k) \\ y(k) &= C_p x_p(k) \end{aligned} \right\} (1)$$

ただし、 $x_p(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k), y(k) \in \mathbb{R}^1$, $A_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b_p \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $C_p \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ である。

次に、1-D structureで構成された一次のデジタル補償器を考える。⁴⁾ すなわち、無限語長の補償器は次のスカラー線形差分方程式で記述される。

$$\left. \begin{aligned} x_d(k+1) &= \alpha_1 x_d(k) + e(k) \\ u(k) &= (\alpha_1 + \alpha_2) x_d(k) + e(k) \end{aligned} \right\} (2)$$

ただし、 $x_d(k), e(k), \alpha_1, \alpha_2$ はすべてスカラーである。まるめの語長を k とおくと、実数 x に対してまるめの特性 $Q_R(x)$

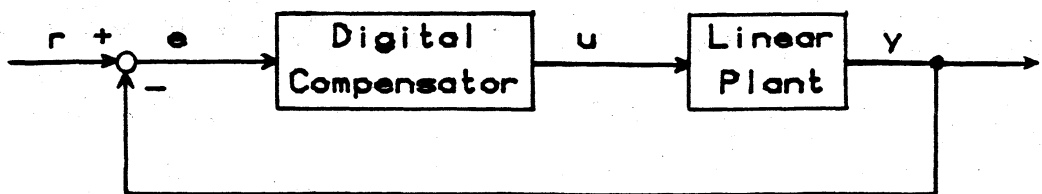


図1. デジタル制御系

は次のようになる。 $10^R Q_R(x)$ は整数で、

$$-10^{-R}/2 \leq x - Q_R(x) < 10^{-R}/2$$

である。ところで、 $10^R Q_R(x) = Q(10^R x) \triangleq Q_0(10^R x)$ であるので、有限語長の補償器は次の cell mapping で記述される。

$$\left. \begin{aligned} z(k+1) &= Q(\alpha_1, z(k)) + Q(10^R e(k)) \\ u(k) &= 10^{-R} \{ Q(\alpha_2 z(k)) + z(k+1) \} \end{aligned} \right\} (3)$$

ただし、 $z(k) \triangleq Q(10^R x_d(k))$ は整数である。以下、 A_p の固有値の絶対値は 1 と 0 以外であると仮定する。また、簡単のため $r=0$ とする。このとき、 $e(k) = -y(k)$ なので、有限語長の補償器を用いたデジタル制御系は、一般性を失うことなしに、次式で記述される。

$$\left. \begin{aligned} x(k+1) &\triangleq \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \left\{ Q(\alpha_2 z(k)) \right. \\ &\quad \left. + z(k+1) \right\} \\ z(k+1) &= Q(\alpha_1, z(k)) + Q(-[c_1, c_2] x(k)) \\ y(k) &= 10^{-R} [c_1, c_2] x(k) \end{aligned} \right\} (4)$$

ただし、 $x_i(k) \in \mathbb{R}^{n_i}$ ($i=1, 2$)、 $x(k) = [x_1(k)^T \ x_2(k)^T]^T \triangleq 10^R x_p(k)$ で、 $A_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ ($A_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$) のすべての固有値は絶対値が 1 より大 (小) と仮定する。式 (4) は $\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^1$ から $\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^1$ への写像になっている。このようなシステムは、mixed

mapping system と呼ばれる。^{5) 6)}

3. 丸めによるカオスの存在条件

A_1^{-1} および A_2 の固有値はすべて 1 より小なので、任意の正定行列 $Q_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ に対して、次式を満たす正定行列 $P_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ が存在する。

$$\left. \begin{aligned} (A_1^{-1})^T P_1 A_1^{-1} - P_1 &= -Q_1 \\ A_2^T P_2 A_2 - P_2 &= -Q_2 \end{aligned} \right\} (5)$$

さらに、正数 ρ_i ($i=1, 2$) を次式で定義する。

$$\rho_i \triangleq \min \{ x_i^T P_i x_i ; c_i x_i = 0.5, x_i \in \mathbb{R}^{n_i} \}$$

このとき、次の定理が成立する。

<定理>⁵⁾

$m_i > 0$ で、ある Q_i ($i=1, 2$) に対して、次の条件 (6a) ~ (6d) が満足されるならば、式 (4) に Li-Yorke の意味のカオスが存在する。

$$|d_i| < 0.5 \quad i=1, 2 \quad (6a)$$

$$0.5 < c_i A_i^{-1} b_i < 1.5 \quad (6b)$$

$$b_i^T (P_i - Q_i - (A_i^{-1})^T Q_i A_i^{-1}) b_i < \rho_i \quad (6c)$$

$$b_2^T P_2 b_2 < \rho_2 \quad (6d)$$

(注意) もし $m_2 = 0$ ならば、 $A_1 = A_p$, $b_1 = b_p$, $c_1 = c_p$ で、

(6d) 式は不要である。

定理は、白岩-倉田の定理⁷⁾を用いて証明することができる。

4. 例題

(例題1)

次の制御系を考える。

$$\left. \begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} (Q(\alpha_2 z(k)) + z(k+1)) \\ z(k+1) &= Q(\alpha_1 z(k)) + Q(-y(k)) \\ y(k) &= [1 \quad 1/4] x(k) \end{aligned} \right\} (7)$$

定理より、

$$|\alpha_i| < 0.5 \quad i=1, 2 \quad (8)$$

のとき、式(7)にカオスが存在する。また、補償器が無限語長
長
のときに全体システムが安定となる条件は、

$$\left. \begin{aligned} 3\alpha_1 + 4\alpha_2 + 1 &> 0 \\ 10\alpha_1 + 3\alpha_2 + 7 &> 0 \\ (3\alpha_1 - \alpha_2 - 34)(\alpha_1 + \alpha_2) &> 0 \end{aligned} \right\} (9)$$

となる。 $\alpha_1 - \alpha_2$ 平面を図2に示す。実線で表わされた正方形の内部では式(7)にカオスが存在し、破線で表わされた三角形の内部では無限語長補償器によって全体システムが安定となる。さらに、シミュレーションによってカオス的アトラク

タ（カオス的まるめ誤差）は三角形の内部でのみ観測された。図3に、 $\alpha_1 = -0.2$, $\alpha_2 = 0$ のときのカオス的アトラクタを示す。カオス的アトラクタは $z = -\gamma \sim \gamma$ の間で存在し、原点に関して対称なアトラクタになっている。さらに、 $z = 0$ でのカオス的アトラクタおよび、その原点近傍での拡大図を図4に示す。原点近傍で、アトラクタが自己相似的になっていることがわかる。

(例題2)

プラントの固有値が不安定な複素共役である系を考える。

$$\left. \begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.4 \\ 1.1 \end{bmatrix} (Q(0.1z(k)) + z(k+1)) \\ z(k+1) &= Q(0.2z(k)) + Q(-y(k)) \\ y(k) &= [1 \quad 1] x(k) \end{aligned} \right\} (10)$$

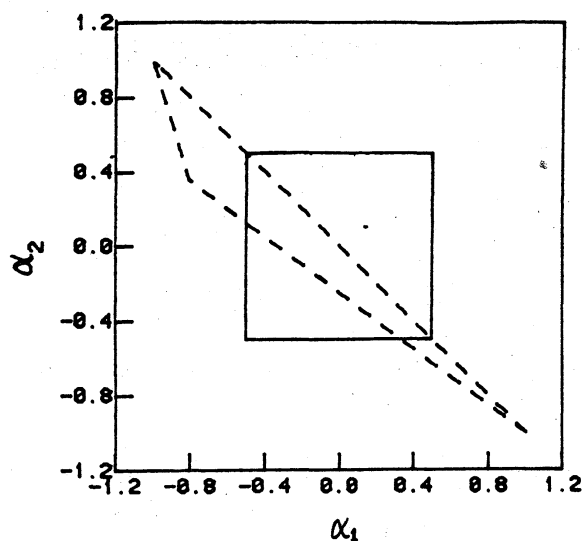


図2 式(7)に対する $\alpha_1 - \alpha_2$ 平面

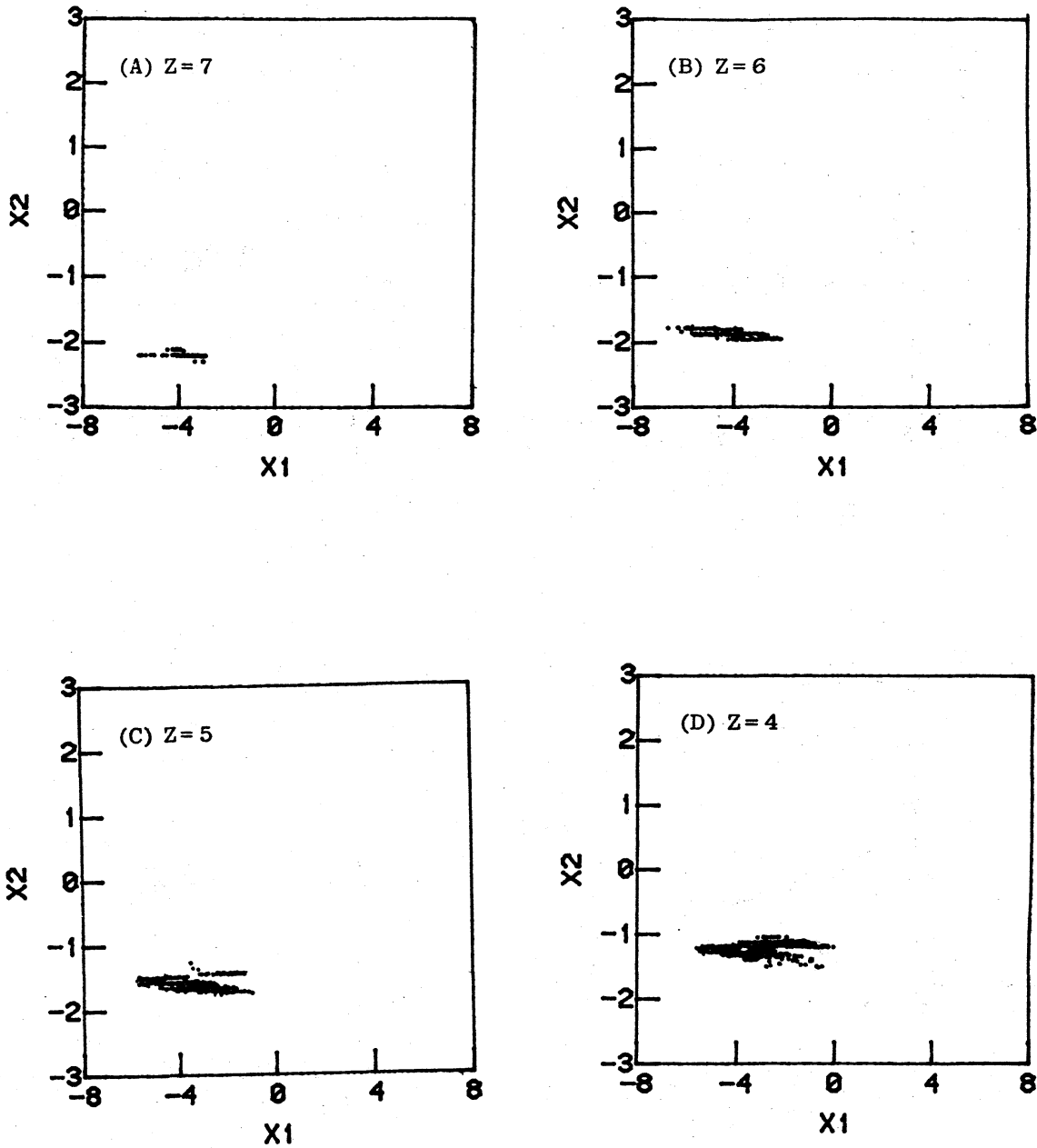


図3 式(7)のカオス的アトラクタ

$$(\alpha_1 = -0.2, \alpha_2 = 0)$$

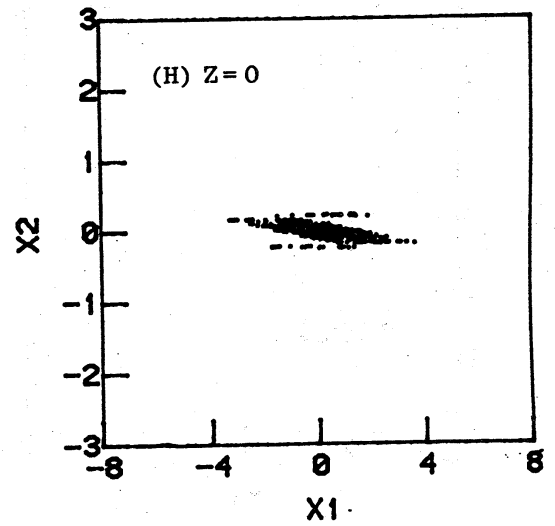
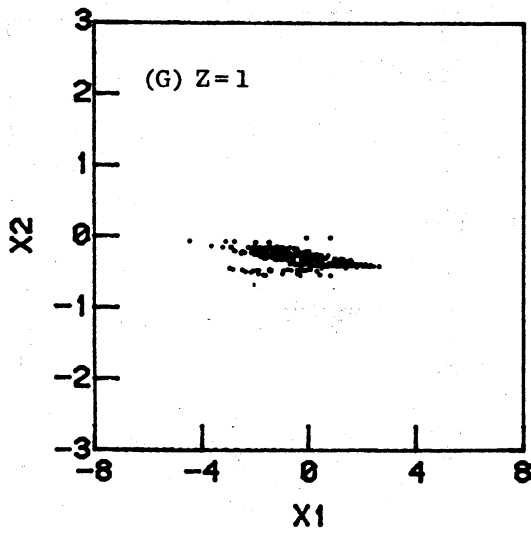
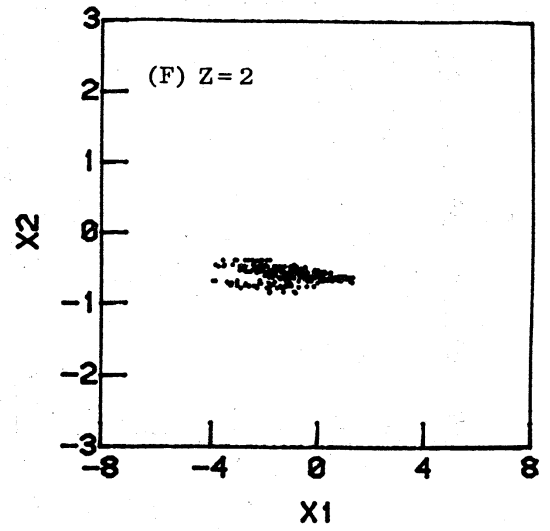
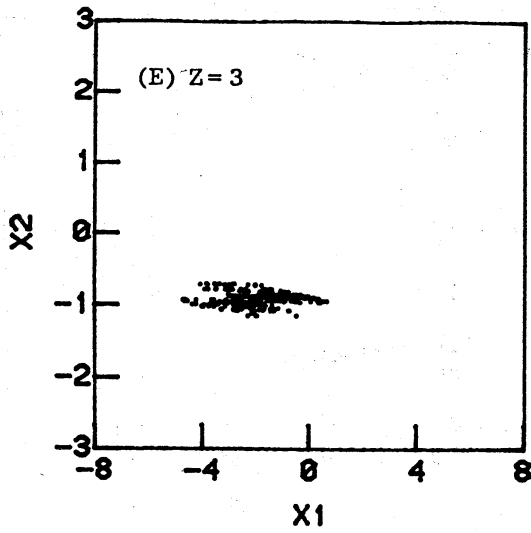


図3 続き.

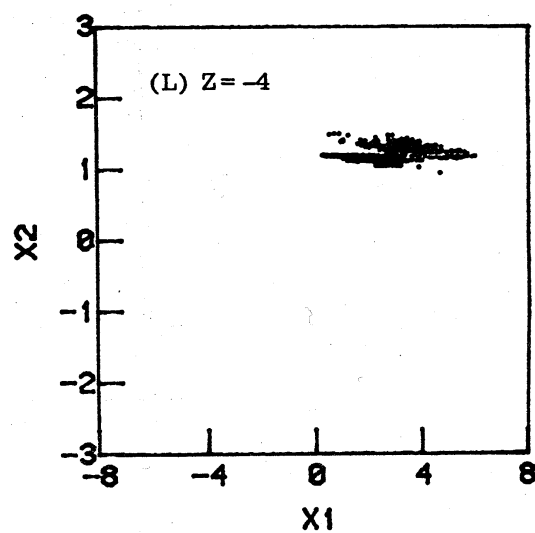
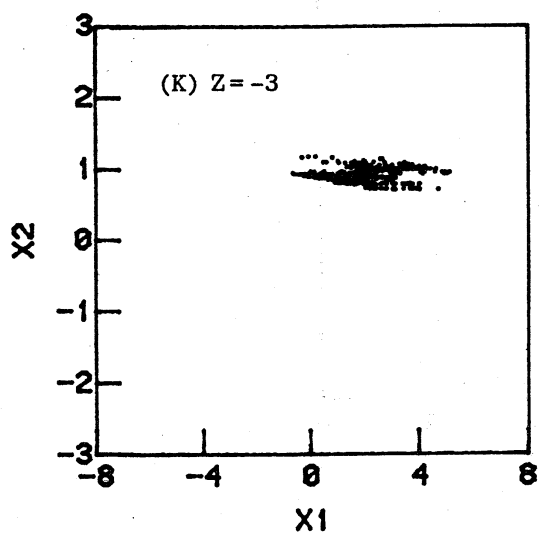
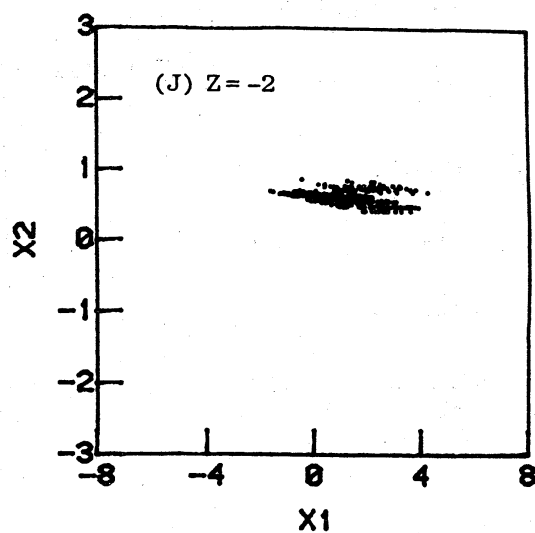
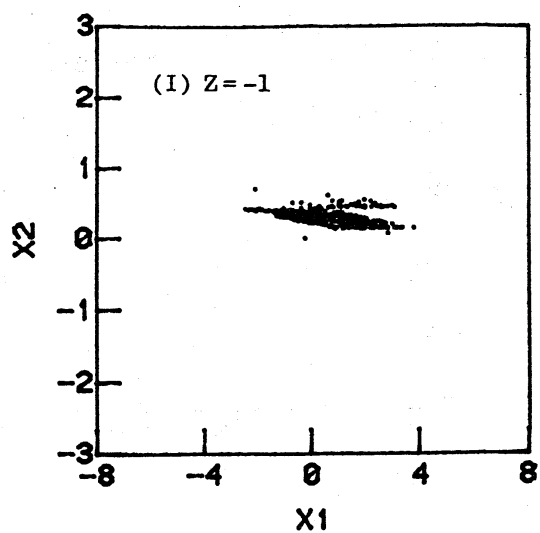


図3 続き

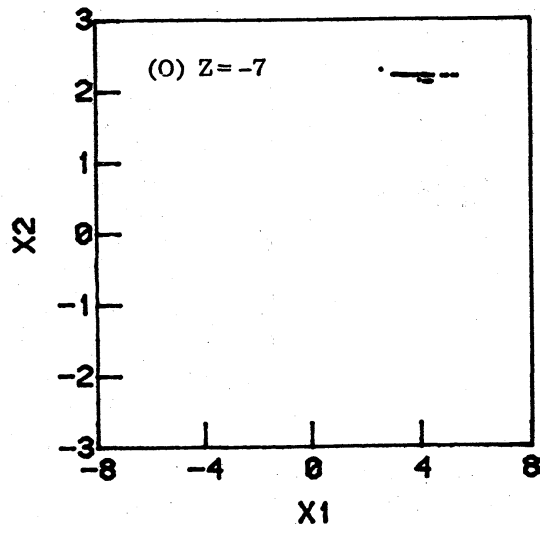
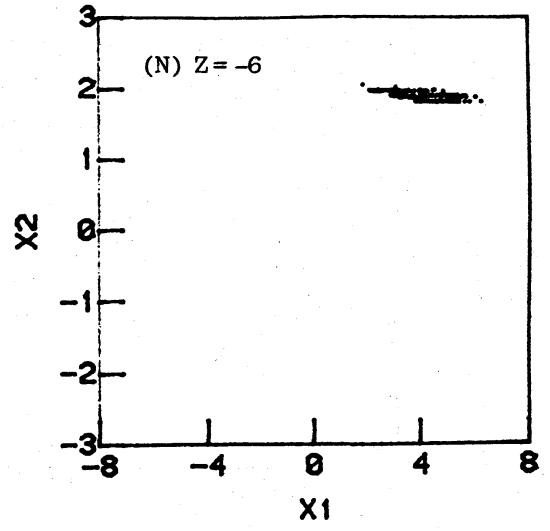
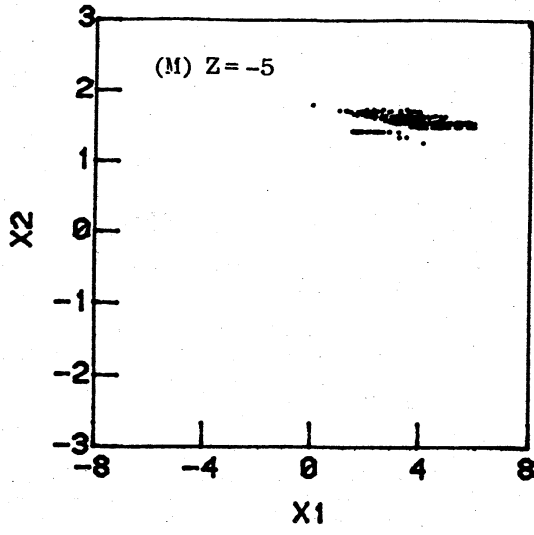
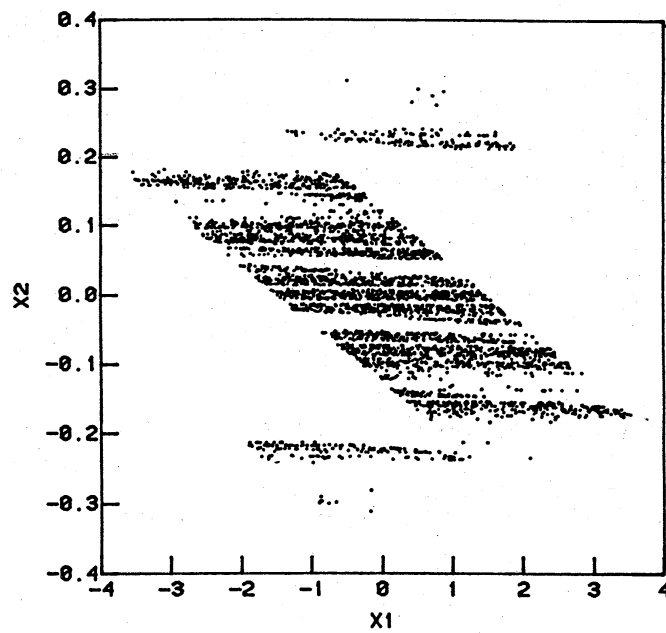
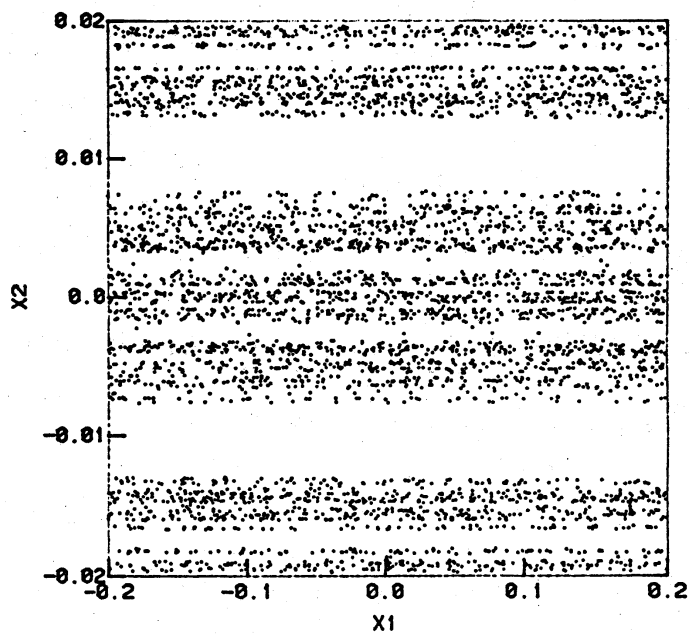


図3 続き



(a) $z = 0$ でのカオス的アトラクタ



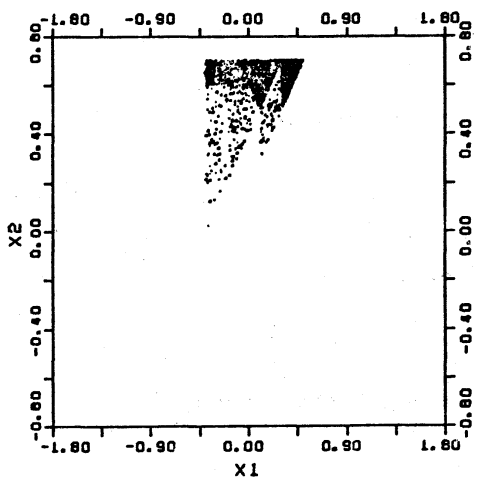
(b) 原点近傍でのカオス的アトラクタ

図4 式(7)の $z = 0$ でのカオス的アトラクタ

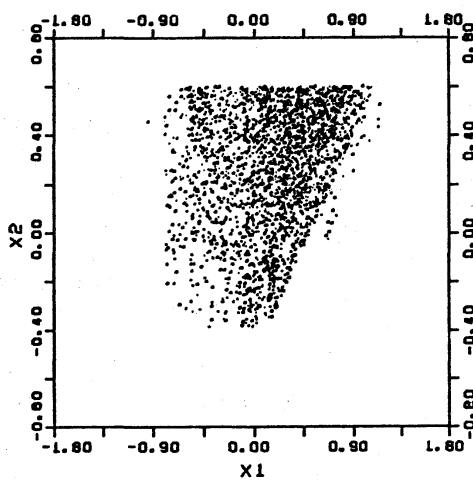
定理より式(10)にカオスが存在する。このときのカオス的アトラクタを図5に示す。アトラクタは $z = -2 \sim 2$ の間で存在しており、自己相似性はない。

参考文献

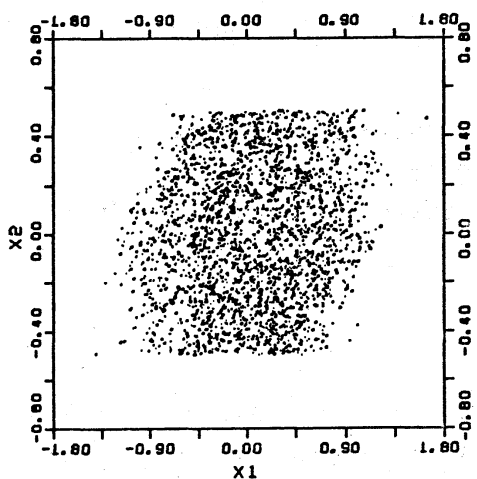
- 1) J. E. Bertram, "The effect of quantization of sampled-feedback systems", AIEE Trans. Appl. Ind. 77, pt. 2, 177-182 (1958)
- 2) P. Moroney, "Issues in the Implementation of Digital Feedback Compensators", MIT Press (1983)
- 3) C. S. Hsu, "A theory of cell-to-cell mapping dynamical systems", J. Appl. Mech. 47, 931-939 (1980)
- 4) C. L. Phillips & N. T. Nagle, Jr., "Digital Control System Analysis and Design", Prentice-Hall, Inc. (1984)
- 5) T. Ushio & C. S. Hsu, "Chaotic rounding error in digital control systems", Preprint (1986)
- 6) T. Ushio & C. S. Hsu, "A simple example of digital control systems with chaotic rounding errors", to appear in the Int. J. Control
- 7) K. Shiraiwa & M. Kurata, "A generalization of a theorem of Marotto", Nagoya Math. J. 82, 83-97 (1981)



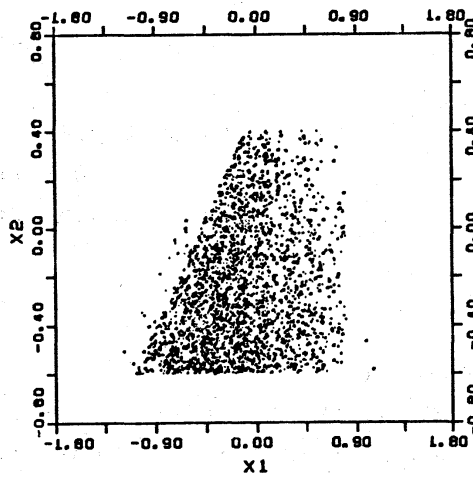
(a) $z = 2$



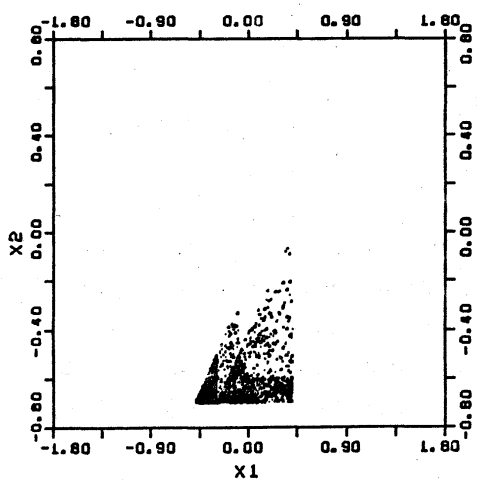
(b) $z = 1$



(c) $z = 0$



(d) $z = -1$



(e) $z = -2$

図5 式(10)のカオス的アトラクタ