数理解析研究所講究録
第 602 巻 1986 年 130-136

Constrained System の Characteristic Surface の局所的分類について

京大理学部　岡　宏枝 (Hiroe Oka)

1.　一年前の研究集会[1]において

$$\begin{cases} \varepsilon\dot{x} = f(x, y, \varepsilon) \\ \dot{y} = g(x, y, \varepsilon) \end{cases} \quad x\in\mathbb{R}^r,\ y\in\mathbb{R}^{n-r},\ \varepsilon:\text{small}\in\mathbb{R} \qquad (1)_\varepsilon$$

の形の ODE を内的な形で、次のように定式化した：

M：n次元 C^∞ 多様体，v：M上のベクトル場，A：TMの bundle endomorphism で、各 $x\in M$ に対して、$A(x)$ の corank が一定であるとする。

定義 1. 組 $(A; v)$ を Constrained system という。A の corank が一定値 r のとき、$(A; v)$ を、constrained system of corank r という。

定義 2. 2つの constrained system $(A; v)$, $(A'; v')$ が同値であるとは、bundle automorphism P と diffeomorphism φ が存在して、

$$(A'; v') = (P\circ T\varphi\circ A\circ T\varphi^{-1};\ P\circ T\varphi\circ v\circ\varphi^{-1})$$

が成立することである。また、$(P;\varphi)$を<u>変換</u>という。

<u>定義3.</u> Constrained system $(A;v)$に対して、

$$\Sigma = \left\{ x \in M \mid v(x) \in \bigcup_{x \in M} \mathrm{Im}\, A(x) \right\}$$

を <u>characteristic surface</u> という。

2. 以下、$x_0 \in M$におけるgermで考える。Constrained system $(A;v)$の局所的表現を、一般性を失うことなく、

$$\begin{pmatrix} A_1(x,y) & A_2(x,y) & ; & v_1(x,y) \\ A_3(x,y) & A_4(x,y) & ; & v_2(x,y) \end{pmatrix} \qquad (2)$$

(但し、A_4は原点$(0,0)$のまわりで non-singular) と表わすことができる。さらに、変換、

$$(P;\varphi) = \left(\begin{matrix} I_r & -A_2A_4^{-1} \\ 0 & A_4^{-1} \end{matrix} \; ; \; id \right)$$

によって、(2)は、

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & ; & w_1(x,y) \\ K(x,y) & I_{n-r} & ; & w_2(x,y) \end{pmatrix} \qquad (3)$$

という形になる。ここで

$$K(x,y) = K_{i,j}(x,y) \quad , \quad r+1 \leq i \leq n, \; 1 \leq j \leq r$$

は $(n-r) \times r$ の行列である。次の定理は、更にKが変換で消せるための条件を与える。

<u>定理4.</u> Constrained system (3) が変換によって、

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & ; & \omega_1'(x,y) \\ 0 & I_{n-r} & ; & \omega_2'(x,y) \end{pmatrix} \tag{4}$$

の形に出来るための必要十分条件は、

$$X_j = \frac{\partial}{\partial x_j} - \sum_{i=r+1}^{n} K_{ij}(x,y)\frac{\partial}{\partial x_i} \quad , \quad 1 \leqq j \leqq r$$

なる r 個のベクトル場の germ に対し、

$$[X_j, X_k] = 0, \quad 1 \leqq j, k \leqq r \tag{✡}$$

が成立することである。

条件(✡)は、bundle endomorphism A の kernel field の可積分条件である。条件(✡)が M のすべての点でみたされているとき、A の kernel field は、r 次元の foliation を定める。これは、Ikegami[2),3)] による 'constraint system' の定式化における foliation に対応している。

(4)の形の constrained system の characteristic surface は、$\{(x,y) \in \mathbb{R}^n \mid \omega_1'(x,y) = 0\}$ で与えられる。

命題 5. (4)の形の2つの constrained system が同値であるとする：

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & ; & \upsilon_1 \\ 0 & I_{n-r} & ; & \upsilon_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & ; & \omega_1 \\ 0 & I_{n-r} & ; & \omega_2 \end{pmatrix}.$$

このとき、υ_1 と ω_1 は contact equivalent である。すなわち、ある non-singular matrix valued function P_1 と $\mathbb{R}^n$ の diffeomorphism $\psi = (\psi_1(x,y), \psi_2(y))$ が存在して、

$$\omega_1(x,y) = P_1(x,y)\cdot v_1(\varphi_1(x,y), \varphi_2(y))$$

が成立する。

特に、corank 1 の constrained system は、いつも条件(※)をみたすことから、それらの characteristic surface は contact equivalence で分類されることがわかる。

Contact codimension 0 の characteristic surface としては、$\{x=0\}$, fold: $\{y-x^2=0\}$, cusp: $\{y-xz+x^3\}$ 等があるが、この結果を Zeeman の仕事[41,57] と比べれば面白いであろう。また直観的にいって、(1)の形の方程式は $\varepsilon=0$ としたとき、mapping f とベクトル場 g の組となる。その意味で、何人かの人々に指摘されているように、constrained system は、mapping とベクトル場の中間的存在といえよう。従って、constrained system の研究は、初等カタストロフ理論と一般カタストロフ理論の中間に位置づけられる。上で述べた characteristic surface が mapping の contact equivalence で分類されるという結果は、そのような考えによく適合していると思われる。私は、ここで述べた枠組で constrained system のアトラクターを研究することが、一般カタストロフ理論へ、何らかの寄与をすることを期待する。

3. 次に我々は、corank 1 の constrained system $(A; v)$ に関する'直線化定理' について述べる。2. の結果より、

$(A; v)$の局所的表現として、

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & ; & v_1(x, y) \\ 0 & I_{n-1} & ; & v_2(x, y) \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}^{n-1} \tag{5}$$

の形のものがとれ、また、v_1は contact equivalence で分類されることがわかる。このとき、原点$(0,0)$のまわりの標準形について、次の定理が成立する。

<u>定理6.</u> (i) (5)において、$v_1(0,0) \neq 0$ ならば、(5)は原点のまわりの十分小さい近傍で、

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & ; & 1 \\ 0 & I_{n-1} & ; & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

と同値である。

(ii) (5)において、$v_1(0,0)=0$, $\partial v_1/\partial x\,(0,0) \neq 0$, $v_2(0,0) \neq 0$ ならば、(5)は、原点のまわりの十分小さい近傍で、

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & ; & x \\ 0 & I_{n-1} & ; & e_{n-1} \end{pmatrix} \tag{7}$$

と同値である。ここで、$e_{n-1} = {}^t(1, 0, \cdots 0) \in \mathbb{R}^{n-1}$である。

上の定理6(i)は、constantな constrained system に出来るという意味で直線化定理といえよう。また、定理6(ii)も、ある意味で'直線化'出来ることを示している。

いま、2次元の constrained system で、(6)の unfolding として、

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & ; & 1 \\ 0 & 1 & & 0 \end{pmatrix}, \text{ あるいはODEの形で } \begin{cases} \varepsilon \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = 0 \end{cases} \tag{8}$$

を考えると、これは、x軸方向のオーダー $1/\varepsilon$ の速い運動を示す。(Fig. 1) また、同様に(7)のunfoldingとして、

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & ; & x \\ 0 & 1 & & 1 \end{pmatrix} \text{ あるいはODEの形で } \begin{cases} \varepsilon \dot{x} = x \\ \dot{y} = 1 \end{cases} \tag{9}$$

を考えると、これは、characteristic surface $\{x=0\}$ 上の ε^0 のオーダーの遅い運動と、それ以外の場所での x軸方向の速い運動を示している。(Fig. 2)

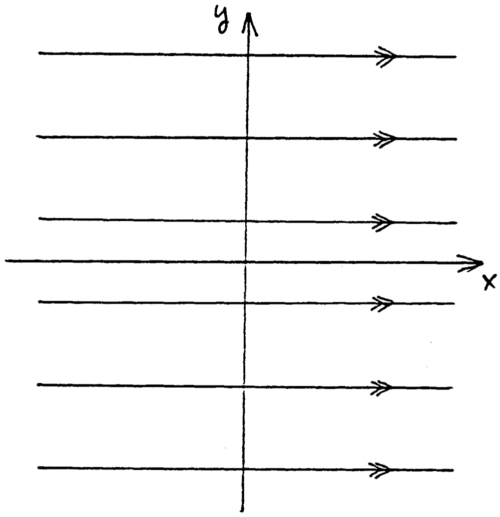

Fig. 1. (8)の phase portrait

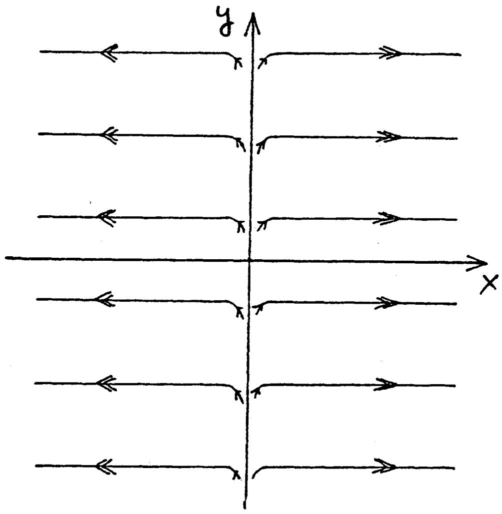

Fig. 2 (9)の phase portrait

2.及び3.に述べた結果の証明については、Oka[6]を参照して頂きたい。

4. 参考文献

1) Oka, H. 数理解析研究所講究録574「力学系と非線形振動現象」1985年12月

2) Ikegami, G. Vector fields tangent to foliations, Japanese J. Math. 12-1 (1986), 95-120.

3) Ikegami, G. Singular perturbations in foliations, preprint

4) Zeeman, E. C. Differential equations for heartbeat and nerve impulse, in 'Dynamical systems, Salvador 1971', Academic Press, 1973, 683-741

5) Zeeman, E. C. Levels of structures in catastrophe theory illustrated by applications in the social and biological science, in 'Proceedings of The International Congress of Mathematics, Vancouver, 1974' vol. 2, 533-546

6) Oka, H. Constrained system, characteristic surface, and normal form, submitted to Japan. J. Appl. Math.