数理解析研究所講究録
第602巻 1986年 215-221

There are no expansive homeomorphisms on S^2

鹿児島高専　平出耕一（ Koichi Hiraide ）

(X, d) はコンパクト距離空間とし $f: X \to X$ は(上への)同相写像とする. f が拡大的(拡大定数 $c>0$)であるとは, $x, y \in X$ が異なるならば $n \in \mathbb{Z}$ が存在して $d(f^n(x), f^n(y)) > c$ となる時をいう. T.O'Brien と W. Reddy [5] は正の genus をもつ向き付け可能な閉曲面は拡大的同相写像を許容することを示した. しかし他の閉曲面が拡大的同相写像を許容するかどうかは未解決問題として残されている. この論文の目的はこの問題に対し次の様な部分解を与えることである.

定理1　2次元球面とクライン管上に拡大的同相写像は存在しない.

[4] において, 射影平面が拡大的同相写像を許容するならば, 2次元球面もまたそのような同相写像を許容するとい

うことが述べられている．しかし定理１より次が得られる．

<u>系</u>　射影平面上に拡大的同相写像は存在しない．

この論文を通して，曲面とは境界のない連結な２次元C^∞級リーマン多様体であるとし閉曲面をM^2によって表わすことにする．

定理１の結論は閉曲面上のsingular foliationに関連する次の定理２を証明することにより得られるであろう．

<u>定理２</u>　$f: M^2 \to M^2$は拡大的同相写像とする．そのとき集合族$\mathcal{F}^\sigma(M^2, f)$ $(\sigma = s, u)$は次の性質をもつ．

(1)　$\mathcal{F}^\sigma(M^2, f)$は$C^0$級のsingular foliationである，

(2)　各leaf $W^\sigma(x) \in \mathcal{F}^\sigma(M^2, f)$は$L_p = \{z \in \mathbb{C} : I_m(z^{\frac{p}{2}}) = 0\}$ $(p \geqq 2)$と同相である，

(3)　$\mathcal{F}^u(M^2, f)$は$\mathcal{F}^s(M^2, f)$と横断的である．

$x \in X$に対し<u>安定集合</u>$W^s(x)$，<u>不安定集合</u>$W^u(x)$を

$$W^s(x) = \{y \in X : d(f^n(x), f^n(y)) \to 0 \quad (n \to \infty)\},$$

$$W^u(x) = \{y \in X : d(f^n(x), f^n(y)) \to 0 \quad (n \to -\infty)\}$$

により定義する．$y \in W^\sigma(x)$とすると$W^\sigma(y) = W^\sigma(x)$だから，集合族

$\mathcal{F}^{\sigma}(X,f)=\{W^{\sigma}(x):x\in X\}$ はXの分割である.

今後$\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$によりそれぞれ自然数，実数，複素数の全体を表わすことにする．$p\in\mathbb{N}$に対し

$$L_p=\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}(z^{\frac{p}{2}})=0\}$$

とし，$t\in\mathbb{R}\,(t>0)$に対し$L(p,t,i)\ (1\leqq i\leqq p)$は$\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}(z^{\frac{p}{2}})=t\}$の連結成分を表わすことにする．このとき$L(1,t,1)$は放物線であり$L(2,t,i)\ (i=1,2)$は直線である．$p\geqq 3$のとき，$L(p,t,i)$ $(i=1,2,\cdots,p)$は双曲線に類似した代数曲線である．このような集合からなる集合族$\mathbb{C}_p$を

$$\mathbb{C}_p=\{L_p\}\cup\{L(p,t,i):t>0,\ i=1,2,\cdots,p\}$$

により定義する．$\mathbb{C}_p$は原点0を除くと$\mathbb{C}\setminus\{0\}$上のfoliationである.

M^2の分割$\mathcal{F}$がM^2上のC^r級$(0\leqq r\leqq\infty)$の<u>singular foliation</u>であるとは，各$L\in\mathcal{F}$は連結であり，各$x\in M^2$に対し$p(x)\in\mathbb{N}$，M^2におけるxの開近傍U_xそしてC^r級微分同相写像$\varphi_x:U_x\to\mathbb{C}$が存在して$\varphi_x(x)=0$であり$U_x\cap L\neq\phi\ (L\in\mathcal{F})$ならば$U_x\cap L$の各連結成分は$\varphi_x$により$\mathbb{C}_{p(x)}$の元の上に写される時をいう.

$\mathcal{F}$はM^2上のC^r級のsingular foliationであるとする．$x\in M^2$は$p(x)=2$のとき$\mathcal{F}$の<u>正則点</u>，$p(x)\neq 2$のとき$\mathcal{F}$の<u>特異点</u>であると呼ばれる．$\mathbb{C}_p$の定義から$\mathcal{F}$の特異点は有限個である．もし$\mathcal{F}$が特異点をもたないとすると，$\mathcal{F}$は普通のfoliationであ

る．$\mathcal{F}$ の各元は leaf と呼ばれ，普通の foliation と同様，leaf topology がはいっている．

回転 $R_p: \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ を $R_p(z)=ze^{\pi i/p}$ により定義する．$\mathcal{F}$ と $\mathcal{F}'$ は C^r 級の singular foliation であるとしよう．$\mathcal{F}'$ が $\mathcal{F}$ と横断的であるとは各 $x\in M^2$ に対し $\mathcal{F}$ と $\mathcal{F}'$ に共通な $p(x)\in\mathbb{N}$，M^2 における x の開近傍 U_x そして C^r 級微分同相写像 $\varphi_x: U_x\to\mathbb{C}$ が存在して $p(x), U_x, \varphi_x$ は $\mathcal{F}$ に対し singular foliation の定義にある条件を満たし $p(x), U_x, R_{p(x)}\circ\varphi_x$ は $\mathcal{F}'$ に対し singular foliation の定義にある条件を満たす時をいう．

定理２が証明されたとすると，定理１はやさしく証明される．実際，$\mathcal{F}$ が M^2 上の C^0 級の singular foliation であるならば次の Euler−Poincaré の公式が成り立つ

$$2\chi(M^2)=\sum_{x\in M^2}(2-p(x))$$

ここで $\chi(\cdot)$ は Euler 標数を表わす (cf. [1, P. 75])．

M^2 は拡大的同相写像 f を許容するとしよう．そのとき定理 2(1) より $\mathcal{F}^s(M^2,f)$ は C^0 級の singular foliation である．さらに定理 2(2) よりすべての $x\in M^2$ に対し $p(x)\geqq 2$ が成り立つ．したがって Euler−Poincaré の公式より $\chi(M^2)\leqq 0$ となる．２次元球面の Euler 標数は正であるから，M^2 は２次元球面になりえない．

M^2はクライン管であるとすると，$\chi(M^2)=0$である．これはすべての$x\in M^2$に対し$p(x)=2$を意味する．すなわち$\mathcal{F}^s(M^2,f)$は特異点をもたない．したがってKneserの定理より$\mathcal{F}^s(M^2,f)$の中にコンパクトleafが存在する([3])．しかし定理(2)よりこれは起りえない．ゆえにM^2はクライン管ではない．

注　上と同様にして，系を証明することができる．

$x\in X$と$\varepsilon>0$に対し

$$B_\varepsilon(x)=\{y\in X : d(x,y)\leqq\varepsilon\},$$

$$U_\varepsilon(x)=\{y\in X : d(x,y)<\varepsilon\},$$

$$S_\varepsilon(x)=\{y\in X : d(x,y)=\varepsilon\}$$

とおく．Xが閉曲面の場合，$\varepsilon>0$が十分小さいならば各$x\in X$に対し$B_\varepsilon(x)$, $U_\varepsilon(x)$, $S_\varepsilon(x)$はそれぞれ円板，開円板，円である．Xが連結かつ局所連結の場合は，[2, P. 95] の定理2.4により$B_\varepsilon(x)$は連結であると仮定することができる．

$x\in X$と$\varepsilon>0$に対し局所安定集合$W_\varepsilon^s(x)$, 局所不安定集合$W_\varepsilon^u(x)$を

$$W_\varepsilon^s(x)=\{y\in X : d(f^n(x),f^n(y))\leqq\varepsilon,\ n\geqq 0\},$$

$$W_\varepsilon^u(x)=\{y\in X : d(f^n(x),f^n(y))\leqq\varepsilon,\ n\leqq 0\}$$

により定義し，$C_\varepsilon^\sigma(x)\ (\sigma=s,u)$は$W_\varepsilon^\sigma(x)$における$x$の連結成分とす

る．定理２を証明するためには，次の命題Ａ，Ｂを必要とする．

命題Ａ　$f: X \to X$ は拡大的とする．もし X が自明でなく，連結かつ局所連結であるならば，各 $\varepsilon > 0$ に対し $\delta > 0$ が存在してすべての $x \in X$ に対し

$$S_\delta(x) \cap C_\varepsilon^\sigma(x) \neq \phi \qquad (\sigma = s, u) .$$

命題Ｂ　$f: X \to X$ は拡大的（拡大定数 $c > 0$）とする．もし X が閉曲面であるならば，すべての $0 < \varepsilon \leqq c/2$ と $x \in X$ に対し $C_\varepsilon^\sigma(x)$ $(\sigma = s, u)$ は局所連結である．

証明の詳細は，別の論文の中で与えられるであろう．

References

[1] A.Fathi and F.Laudenbach, Les feuille tages measurés, Travaux de Thurston sur les surfaces, p.71-92, Astérisque, 66-67, Soc.Math.France, Paris, 1979.

[2] D.W.Hall and G.L.Spencer II, Elementary Topology, John Wily & Sons, INC., New York, 1955.

[3] G. Hector and U. Hirsch, Introduction to the Geometry of Foliations, Part A, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 1981.

[4] E. Hemmingsen and W. Reddy, Lifting and projecting expansive homeomorphisms, Math. Systems Theory, 2 (1968), 7-15.

[5] T. O'Brien and W. Reddy, Each compact orientable surface of positive genus admits an expansive homeomorphism, Pacific J. Math., 35 (1970), 737-741.