数理解析研究所講究録
第604巻 1987年 62-87

Nonlinear Semigroups and Invariant Means

東工大 理 高橋 渉
(Wataru Takahashi)

S を semitopological semigroup とし，C を Banach 空間 E の空でない閉凸集合とする．このとき $\mathcal{S}=\{T_t : t\in S\}$ はつぎの3つの条件を満たすとき，C 上の nonexpansive semigroup であるといわれる．

(1) $t, s\in S$ と $x\in C$ に対して，$T_{st}(x)=T_sT_t(x)$ である．

(2) $S\times C$ から C への写像：$(s,x)\mapsto T_s(x)$ は連続である．

(3) $x, y\in C$ と $s\in S$ に対して，$\|T_s(x)-T_s(y)\|\leq\|x-y\|$ である．

nonexpansive semigroup の研究は非線形発展方程式の研究において重要な役割を演じていることはよく知られているが [18, 21, 30]，ここではこの nonexpansive semigroup の研究を Invariant mean (Banach limit の拡張) の理論を用いて究明してみる．

RUC(S) を S 上の有界な右一様連続関数の全体とすると，これは $C(S)$ (S 上の有界な連続関数の全体) の中で閉な部分

代数になるがこれはまた左および右変換に関して不変であるという性質をもっている．Invariant mean の議論を用いるとつぎの不動点定理が得られる：E を一様凸で，一様になめらか(smooth)な Banach 空間とし，C を E の空でない閉凸集合とする．S を $RUC(S)$ が Invariant mean をもつような semi-topological semigroup とし，$\mathcal{S}=\{T_t : t\in S\}$ を C 上の nonexpansive semigroup とする．このとき，C の元 x に対して $\mathcal{S}$ の軌道 $\{T_t x : t\in S\}$ が有界であるならば，すべての $s\in S$ に対して $T_s u = u$ となるような元 $u\in C$ が存在する．これは Hilbert 空間の場合に証明した Lau [19] の結果を拡張する（§2を見よ）．つぎに同じような手法を用いて，m-accretive 作用素 A の closedness property を証明する（§3）．この定理は Webb [31] の結果を拡張している．S を commutative semigroup とし，$\mathcal{S}=\{T_t : t\in S\}$ を C 上の nonexpansive semigroup とする．このとき $u : S\to C$ はつぎの条件を満たすとき $\mathcal{S}=\{T_t : t\in S\}$ の almost-orbit であるといわれる．

$$\lim_{s}\left(\sup_{t}\| u(t+s)-T_t u(s)\|\right)=0 \quad \cdots\cdots \quad (*)$$

Miyadera-Kobayashi [22] は initial value problems：

$$\frac{du(t)}{dt} + Au(t) \ni f(t),\ \forall t>0 \ ,\quad u(0)=x$$

（ただし，A は E の m-accretive 作用素，$f \in L^1(0,\infty;E)$，
$x \in \overline{D(A)}$ とする．）

の Integral solution $u(t)$ は $-A$ によって生成される $\overline{D(A)}$ 上の nonexpansive semigroup の almost-orbit であることを示し，この解の漸近的挙動を研究した．この講究の最後では，(*)を満たす $\mathcal{S}=\{T_t : t \in S\}$ の almost-orbit の漸近的挙動を研究する．

§1. 準備

S を set とし，$m(S)$ を S 上の有界実数値関数の作る Banach 空間とする．そのノルムは supremum ノルムとする．D を $m(S)$ の線形部分空間とし，1 を含むものとする．このとき D^*（D の dual 空間）の元 μ が $\|\mu\| = \mu(1) = 1$ を満たすならば D 上の mean であるといわれる．$\mu \in D^*$ を D 上の mean，f を D の元とする．このとき，値 $\mu(f)$ を $\mu_t(f(t))$ と書くこともある．$\mu \in D^*$ が D 上の mean である必要十分条件は

$$\inf_s f(s) \leqq \mu(f) \leqq \sup_s f(s), \quad \forall f \in D$$

であることはよく知られている．

E を実 Banach 空間とし，E^* をその dual 空間とする．$x \in E$ における $f \in E^*$ の値を $\langle x, f\rangle$ で表す．$x \in E$ に対して

$$J(x) = \{ f \in E^* : \langle x, f\rangle = \|x\|^2 = \|f\|^2 \}$$

とおくと，Hahn-Banachの定理によって$J(x)$は空でないことがわかるが，このJをEからE^*へのduality写像と呼んでいる．$B=\{x\in E:\|x\|=1\}$とする．このときEのノルムがGâteaux differentiableであるとは，$x, y\in B$に対して

$$\lim_{t\to 0}\frac{\|x+ty\|-\|x\|}{t} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (**)$$

がつねに存在するときをいう．（このときEはsmoothであるともいわれる．）またxに対して$(**)$の極限が$y\in B$に関して一様であるとき，EのノルムはFréchet differentiableであるといわれる．$y\in B$に対して，$(**)$の極限が$x\in B$に関して一様であるとき，Eは一様Gâteaux differentiable normをもつといわれる．$(**)$の極限が$x, y\in B$に関して一様であるときEのノルムは一様Fréchet differentiableであるといわれる．Eがsmoothならば，duality写像Jは一価であり，Eが一様Gâteaux differentiable normをもつなら，JはEの有界集合上で一様連続でもある（ただし，E上の位相はstrong位相であり，E^*の位相はweak star位相が入っているものとする）．またEがuniformly smooth（Eのノルムが一様Fréchet differentiable normをもつ）なら，JはEの有界集合上で一様連続である（ただし，EとE^*の位相はstrong位相である）．

Kを Eの部分集合とする．このとき$\overline{K}$でKの閉包を表し，

$\overline{co}K$ でKの convex hull の閉包を表すものとする．また $\delta(K)$ でKの直径を表す．$x\in K$ がKの diametral point であるとは

$$\sup\{\|x-y\| : y\in K\} = \delta(K)$$

となるときをいう．Eの閉凸集合Cが normal structure をもつとは，Cの2点以上含む有界閉凸集合KがKの diametral point でない点を含むときをいう．一様凸な Banach 空間の閉凸集合は normal structure をもつし，Banach 空間の compact convex 集合は normal structure をもつ．

§2. Nonexpansive semigroup に対する不動点定理

この節では nonexpansive semigroup に対する不動点定理を証明する．Sを set とし，Eを smooth な実 Banach 空間とする．このとき，もし $\{x_t : t\in S\}$ がEの有界集合なら，$z, u\in E$ に対して，$m(S)$ の元 h_z, $g_{u,z}$ をつぎのように定義できる．

$$h_z(t) = \|x_t - z\|^2, \quad \forall t\in S \ ;$$

$$g_{u,z}(t) = \langle u, J(x_t - z)\rangle, \quad \forall t\in S.$$

[26], [28] の方法を用いてつぎの補題を証明する．

補題1. Eを一様 Gâteaux differentiable norm をもつ Banach 空間とし，CをEの空でない閉凸集合とする．Sを Index set とし，$\{x_t : t\in S\}$ をEの有界集合とする．Dを1を含み，かつ h_z, $g_{u,z}$ $(z\in C,\ u\in E)$ を含むような $m(S)$ の線形部分空間とし，μ をD上の mean とする．このとき $z_0\in C$ に対して，

つぎの命題(a)と(b)は同値である.

(a) $\mu_t \|x_t - z_0\|^2 = \min_{y \in C} \mu_t \|x_t - y\|^2$;

(b) $\mu_t \langle z - z_0, J(x_t - z_0) \rangle \leqq 0, \ {}^\forall z \in C$.

証明 $\mu_t \|x_t - z_0\|^2 = \min_{y \in C} \mu_t \|x_t - y\|^2$ とし, $\varepsilon > 0$ としよう. このとき $z \in C$ と λ $(0 \leqq \lambda \leqq 1)$ に対して

$$
\begin{aligned}
\|x_t - z_0\|^2 &= \|x_t - \lambda z_0 - (1-\lambda) z + (1-\lambda)(z - z_0)\|^2 \\
&\geqq \|x_t - \lambda z_0 - (1-\lambda) z\|^2 \\
&\qquad + 2(1-\lambda) \langle z - z_0, J(x_t - \lambda z_0 - (1-\lambda) z) \rangle
\end{aligned}
$$

であるので, E のノルムが一様 Gâteaux differentiable であることより, λ が十分1に近ければ

$$
| \langle z - z_0, J(x_t - \lambda z_0 - (1-\lambda) z) - J(x_t - z_0) \rangle | < \varepsilon
$$

となる. よって

$$
\begin{aligned}
\langle z - z_0, J(x_t - z_0) \rangle &< \varepsilon + \langle z - z_0, J(x_t - \lambda z_0 - (1-\lambda) z) \rangle \\
&\leqq \varepsilon + \frac{1}{2(1-\lambda)} \left(\|x_t - z_0\|^2 - \|x_t - \lambda z_0 - (1-\lambda) z\|^2 \right)
\end{aligned}
$$

である. だから

$$
\begin{aligned}
&\mu_t \langle z - z_0, J(x_t - z_0) \rangle \\
&\leqq \varepsilon + \frac{1}{2(1-\lambda)} \left(\mu_t \|x_t - z_0\|^2 - \mu_t \|x_t - \lambda z_0 - (1-\lambda) z\|^2 \right) \\
&< \varepsilon
\end{aligned}
$$

となる．$\varepsilon>0$ は任意なので

$$\mu_t\langle z-z_0, J(x_t-z_0)\rangle\leqq 0,\ \forall z\in C$$

となる．逆を証明する．$z\in C$ としよう．このとき

$$\|x_t-z\|^2-\|x_t-z_0\|^2\geqq 2\langle z_0-z, J(x_t-z_0)\rangle$$

でかつ

$$\mu_t\langle z-z_0, J(x_t-z_0)\rangle\leqq 0,\ \forall z\in C$$

であるので

$$\mu_t\|x_t-z_0\|^2=\min_{z\in C}\mu_t\|x_t-z\|^2$$

である．

Prüß [25] の結果を用いるとつぎの補題が証明できる．

補題2．E を一様凸で，一様 smooth な Banach 空間とし，C を E の閉凸集合とする．S を Index set とし，$\{x_t : t\in S\}$ を E の有界集合とする．D を $m(S)$ の線形部分空間で 1 を含み，かつ h_z, $g_{u,z}$ $(z\in C, u\in E)$ を含むものとする．このとき D 上の mean μ に対して，集合

$$M=\{u\in C : \mu_t\|x_t-u\|^2=\min_{z\in C}\mu_t\|x_t-z\|^2\}$$

はただ1つの点からなる．

証明　$g(z)=\mu_t\|x_t-z\|^2,\ \forall z\in C$

$r=\inf\{g(z) : z\in C\}$

としよう．このとき C 上の関数 g は連続で凸である．また，

$\|z\| \to \infty$ のとき，$g(z) \to \infty$ であるので，[4] から $g(u) = r$ となる $u \in C$ が存在する．よってMは空でない集合である．補題1から $u \in M$ となる必要十分条件は

$$\mu_t \langle z-u, J(x_t-u) \rangle \leqq 0, \; {}^\forall z \in C$$

であるから，これを使ってMが1点集合であることを証明する．$u, v \in M$ $(u \neq v)$ としよう．[25] によって，すべての $t \in S$ に対して

$$\langle x_t-u-(x_t-v), J(x_t-u)-J(x_t-v) \rangle \geqq k$$

となる正数 k が存在する．よって

$$\mu_t \langle v-u, J(x_t-u)-J(x_t-v) \rangle \geqq k > 0 \quad \cdots\cdots (***)$$

となる．一方 $u, v \in M$ であるから $\mu_t \langle u-v, J(x_t-u) \rangle \geqq 0$，$\mu_t \langle v-u, J(x_t-v) \rangle \geqq 0$ をもつ．だから

$$\mu_t \langle u-v, J(x_t-u)-J(x_t-v) \rangle \geqq 0$$

となる．これは $(***)$ に反する．よって $u = v$ である．

つぎの定理は Lau [19] の結果の一般化である．

定理1．Eを一様凸で，一様smoothなBanach空間とし，CをEの閉凸集合とする．SをRUC(S)がInvariant meanをもつようなsemitopological semigroupとし，$\mathcal{S} = \{T_t : t \in S\}$ をC上のnonexpansive semigroupとする．このときCの元 x に対して，$\{T_t x : t \in S\}$ が有界であるならば，すべての $s \in S$ に対して，$T_s u = u$ となるような元 $u \in C$ が存在する．

証明の概略　はじめに，$z\in C$ と $y\in E$ に対して，

$$h_z(t)=\|T_t x-z\|^2,\quad \forall t\in S;$$

$$g_{y,z}(t)=\langle y, J(T_t x-z)\rangle,\quad \forall t\in S$$

で定義される関数 h_z, $g_{y,z}$ が $RUC(S)$ に属することがわかる．

μ を $RUC(S)$ の left invariant mean としよう．そのとき

$$M=\{u\in C: \mu_t\|T_t x-u\|^2=\min_{z\in C}\mu_t\|T_t x-z\|^2\}$$

は T_s, $s\in S$ のもとで不変である．実際，$u\in M$ ならば，任意の $s\in S$ に対して，

$$\begin{aligned}\mu_t\|T_t x-T_s u\|^2&=\mu_t\|T_{st}x-T_s u\|^2\\&=\mu_t\|T_s T_t x-T_s u\|^2\\&\leqq \mu_t\|T_t x-u\|^2\end{aligned}$$

となるから $T_s u\in M$ である．一方補題2によって，M は1点からなるので，この点が T_s, $s\in S$ の共通不動点である．

§3. Accretive operators の closedness property

E を Banach 空間とし，$A\subset E\times E$ としよう．このとき A が E 上の accretive 作用素であるとは，$x_i\in D(A)$, $y_i\in Ax_i$ $(i=1,2)$ と $r>0$ に対してつねに

$$\|x_1-x_2\|\leqq\|x_1-x_2+r(y_1-y_2)\|$$

が成立するときをいう．A が accretive 作用素なら，任意の

$r>0$ に対して，A の resolvent J_r と Yosida 近似 A_r が

$$J_r = (I+rA)^{-1},$$
$$A_r = \frac{1}{r}(I-J_r)$$

で定義される．この J_r，A_r についてはつぎの性質が成立する．

(a) $A_r x \in AJ_r x$，$\forall x \in R(I+rA)$；

(b) $\|A_r x\| \leqq |Ax|$，$\forall x \in D(A) \cap R(I+rA)$.

ただし，$|Ax| = \inf\{\|y\| : y \in Ax\}$ である．

つぎの定理は Webb [31] の結果を一般化している．

定理 2．E を normal structure をもつ reflexive Banach 空間とし，$f \in E$ とする．$A \subset E \times E$ を

$$\overline{co}\, D(A) + f \subset R(I+A)$$

となる accretive operator とする．このとき $(v, f) \in A$ となる $v \in D(A)$ が存在する必要十分条件は $(x_n, y_n) \in A$ となる $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ で，$\{x_n\}$ が有界，$y_n \to f$ となるようなものが存在することである．

証明　$n=1, 2, \cdots$ に対して，$x_n = v$，$y_n = f$ とおけば，$(x_n, y_n) \in A$ で $\{x_n\}$ は有界，$y_n \to f$ である．

逆を示そう．最初に $f=0$，$C = \overline{co}\, D(A)$ としよう．Banach limit μ に対して

$$g(z) = \mu_n \|x_n - z\|, \quad \forall z \in C;$$
$$r = \inf\{g(z) : z \in C\}$$

を定義しよう．ただし $\mu_n \| x_n - z \|$ は有界数列 $\{\| x_n - z \|\}$ における μ の値を表す．このとき C 上の関数 g は連続で，凸である．また $\|z\| \to \infty$ のとき $g(z) \to \infty$ となるので，[4] から $g(v) = r$ となる $v \in C$ が存在する．そこで $M = \{v \in C \,;\, g(v) = r\}$ とおけば，M は空でない集合で，かつ有界，閉凸集合である．$v \in M$ とし，$J_1 = (I + A)^{-1}$ としよう．このとき J_1 は $R(I+A)$ から $D(A)$ の中への nonexpansive 写像であるから

$$\begin{aligned}
\mu_n \| x_n - J_1 v \| &= \mu_n \| x_n - J_1 x_n + J_1 x_n - J_1 v \| \\
&\leqq \mu_n \| x_n - J_1 x_n \| + \mu_n \| x_n - v \| \\
&\leqq \mu_n | A x_n | + \mu_n \| x_n - v \| \\
&\leqq \mu_n \| y_n \| + \mu_n \| x_n - v \| \\
&= \mu_n \| x_n - v \|
\end{aligned}$$

となる．ただし $|Ax_n| = \inf\{\|y\| \,;\, y \in Ax_n\}$ である．よって M は J_1 のもとで不変である．[17] を用いると $J_1 v = v$ となるような $v \in M$ が存在する．これは $0 \in Av$ を意味する．今や $x \in D(A)$ に対して $A_0 x = Ax - f$ としよう．このとき A は accretive であり，かつ

$$R(I + A_0) \supset \overline{co}\, D(A_0) = \overline{co}\, D(A)$$

となる．また $(x_n, y_n - f) \in A_0$ でもあるから，上の議論によって，$0 \in A_0 v$ (i.e., $f \in Av$) となる $v \in D(A_0) = D(A)$ が存在する．

系1 [31]. Eをseparable，一様凸，一様smoothなBanach空間とし，$T : D(T) \to E$をm-accretiveな作用素とする．このとき，$Tx_n \to f$となる有界点列$\{x_n\} \subset D(T)$が存在するならば$Tv = f$となる$v \in D(T)$が存在する．

定理2はWebbの結果が空間の条件にseparabilityと一様なめらかさ(uniform smoothness)の条件がなくても成立していることを主張している．

§4. Almost-orbitsの漸近的挙動

Sをcommutative semigroupとし，$\mathfrak{S} = \{T_t : t \in S\}$を$C$上のnonexpansive semigroupとする．このとき$u : S \to C$は

$$\lim_s \left(\sup_t \| u(t+s) - T_t u(s) \| \right) = 0$$

を満たすとき，$\mathfrak{S} = \{T_t : t \in S\}$のalmost-orbitであるといわれる．Miyadera-Kobayashi [22] はinitial value problem:

$$\frac{d u(t)}{dt} + A u(t) \ni f(t), \quad {}^\forall t > 0$$

$$u(0) = x$$

のIntegral solution $u(t)$は$-A$によって生成される$\overline{D(A)}$上のnonexpansive semigroupのalmost-orbitであることを示し，この解の漸近的挙動を研究した．ただし，Aはm-accretive operator，$f \in L^1(0, \infty; E)$，$x \in \overline{D(A)}$とする．この節では，

$\mathfrak{S}=\{T_t : t\in S\}$ の almost-orbit の漸近的挙動を研究する。

補題3. C を Banach 空間 E の閉凸集合とし，$\mathfrak{S}=\{T_t : t\in S\}$ を C 上の nonexpansive semigroup とする．このとき，

$$\{u(t) : t\in S\}\ ,\quad \{v(t) : t\in S\}$$

が $\mathfrak{S}=\{T_t : t\in S\}$ の almost-orbits であるなら，$\lim_t \|u(t)-v(t)\|$ が存在する．特に，$z\in F(\mathfrak{S})$ なら，$\lim_t \|u(t)-z\|$ が存在する．ただし，$F(\mathfrak{S})$ は T_s, $s\in S$ の共通不動点の集合である．

証明　$s\in S$ に対して，

$$\phi(s)=\sup_t \|u(t+s)-T_t u(s)\|\ ,$$

$$\psi(s)=\sup_t \|v(t+s)-T_t v(s)\|$$

とおく．このとき $\lim_s \phi(s)=0$，$\lim_s \psi(s)=0$ である．

$$\begin{aligned}\|u(t+s)-v(t+s)\| &\leqq \|u(t+s)-T_t u(s)\| \\ &\quad + \|T_t u(s)-T_t v(s)\| + \|T_t v(s)-v(t+s)\| \\ &\leqq \phi(s)+\psi(s)+\|u(s)-v(s)\|\end{aligned}$$

なので，すべての $s\in S$ に対して

$$\inf_t \sup_{t\leqq w} \|u(w)-v(w)\| \leqq \phi(s)+\psi(s)+\|u(s)-v(s)\|$$

をもつ．だから

$$\inf_t \sup_{t\leqq s} \|u(w)-v(w)\| \leqq \sup_t \inf_{t\leqq s} \|u(s)-v(s)\|$$

である．このようにして $\|u(t)-v(t)\|$ の極限が存在することがわかる．$t\in S$ に対して，$v(t)=z$ とおくことによって

$\|u(t)-z\|$ の極限が存在することは明らかである.

[28] を用いてつぎの不動点定理を証明することができる.

補題4. E を normal structure をもつ reflexive Banach 空間とし, C を E の閉凸集合とする. $\mathfrak{S}=\{T_t ; t\in S\}$ を C 上の nonexpansive semigroup とし, $\{u(t) ; t\in S\}$ を $\mathfrak{S}=\{T_t ; t\in S\}$ の almost-orbit とする. このとき $F(\mathfrak{S})\neq\phi$ である必要十分条件は $\{u(t) ; t\geqq t_0\}$ が有界となる $t_0\in S$ が存在することである.

証明 $\{u(t) ; t\geqq t_0\}$ が有界であると仮定しよう. このとき $\{u(t) ; t\in S\}$ は $\mathfrak{S}=\{T_t ; t\in S\}$ の almost-orbit であるので, $\{T_t u(t_1) ; t\in S\}$ が有界となるような $t_1(\geqq t_0)$ が存在することがわかる. [28] によって, $F(\mathfrak{S})$ は空でない. 逆に $F(\mathfrak{S})\neq\phi$ とするなら, 任意の $z\in F(\mathfrak{S})$ に対して $\|u(t)-z\|$ の極限が存在する. よって $\{u(t) ; t\geqq t_0\}$ が有界となるような $t_0\in S$ が存在する.

補題5. E を uniformly convex Banach 空間とし, $\{u(t) ; t\in S\}$ を $\mathfrak{S}=\{T_t ; t\in S\}$ の almost-orbit とする. また $y\in F(\mathfrak{S})$, $0<\alpha\leqq\beta<1$ とする. このとき, 任意の $\varepsilon>0$ に対して, ある $t_0\in S$ が存在して, すべての $s\in S$ $(s\geqq t_0)$, $t\in S$, $\lambda\in R$ $(\alpha\leqq\lambda\leqq\beta)$ に対して

$$\|T_t(\lambda u(s)+(1-\lambda)y)-(\lambda T_t u(s)+(1-\lambda)y)\|<\varepsilon$$

となる．

この証明は多くの紙面を用するので省略する（[14]を参照）．

x, y を E の元としよう．このとき $[x, y]$ によって集合

$$\{\lambda x+(1-\lambda)y \,;\, 0 \leqq \lambda \leqq 1\}$$

を表すことにする．

補題 6 [20]．E を Fréchet differentiable norm をもつ一様凸 Banach 空間とし，C を E の閉凸集合とする．$\{x_\alpha\}$ を C の有界ネットとし，$z \in \bigcap_\beta \overline{co}\{x_\alpha \,;\, \alpha \geqq \beta\}$ と $y \in C$ に対して $y_\alpha \in [y, x_\alpha]$ を $\|y_\alpha - z\| = \min\{\|u-z\| \,;\, u \in [y, x_\alpha]\}$ となるような C の元とする．このとき $y_\alpha \to y$ なら $y=z$ である．

補題 5 と 6 を用いて，つぎの補題を証明することができる．

補題 7．E を Fréchet differentiable norm をもつ一様凸な Banach 空間とし，$\{u(t) \,;\, t \in S\}$ を $\mathcal{S}=\{T_t \,;\, t \in S\}$ の almost-orbit とする．$F(\mathcal{S}) \neq \phi$ とする．このとき

$$z \in \bigcap_{s \in S} \overline{co}\{u(t) \,;\, t \geqq s\} \cap F(\mathcal{S})$$

と $y \in F(\mathcal{S})$ と $\varepsilon > 0$ に対して，ある $t_0 \in S$ が存在して

$$\langle u(t)-y, J(y-z)\rangle \leqq \varepsilon \|y-z\|$$

がすべての $t \geqq t_0$ に対して成り立つ．

この証明もかなりの紙面を用するので省略する．

つぎの定理は $\{u(t) : t\in S\}$ の弱収束の問題や mean ergodic theorem を証明をする上で非常に大切である．

定理3．E を Fréchet differentiable norm をもつ一様凸な Banach空間とし，$\{u(t) : t\in S\}$ を $\mathcal{S}=\{T_t : t\in S\}$ の almost-orbit とする．$F(\mathcal{S})\neq\phi$ とする．このとき集合

$$\bigcap_{s\in S}\overline{co}\{u(t) : t\geqq s\}\cap F(\mathcal{S})$$

は高々1点からなる．

証明　$y, z\in\bigcap_{s\in S}\overline{co}\{u(t) : t\geqq s\}\cap F(\mathcal{S})$ とする．このとき $\dfrac{y+z}{2}\in F(\mathcal{S})$ なので，補題7より，$\varepsilon>0$ に対して

ある $t_0\in S$ が存在して，すべての $t\in S$ に対して

$$\left\langle u(t+t_0)-\frac{y+z}{2}, J\left(\frac{y+z}{2}-z\right)\right\rangle\leqq\varepsilon\left\|\frac{y+z}{2}-z\right\|$$

が成立する．$y\in\overline{co}\{u(t+t_0) : t\in S\}$ であるから，

$$\left\langle y-\frac{y+z}{2}, J\left(\frac{y+z}{2}-z\right)\right\rangle\leqq\varepsilon\left\|\frac{y+z}{2}-z\right\|$$

となる．よって $\langle y-z, J(y-z)\rangle\leqq 2\varepsilon\|y-z\|$ である．これから $\|y-z\|\leqq 2\varepsilon$．$\varepsilon>0$ は任意なので，$y=z$ である．

定理3を用いて，$\{u(t) : t\in S\}$ の弱収束の問題を研究する．その前に定義を1つ与えておく．u を S から C への関数とす

すとき，$w(u)$ は $\{u(t) : t\in S\}$ の subnets が弱収束する点の集合を表すことにする．

定理4．E を Fréchet differentiable norm をもつ一様凸な Banach空間とし，$\{u(t) : t\in S\}$ を $\mathfrak{S}=\{T_t : t\in S\}$ の almost-orbit とする．$F(\mathfrak{S})\neq\phi$ とする．このとき $w(u)\subset F(\mathfrak{S})$ なら $\{u(t) : t\in S\}$ は $F(\mathfrak{S})$ のある元 z に弱収束する．

証明　$F(\mathfrak{S})\neq\phi$ なので，$\{u(t) : t\in S\}$ は有界である．そこで，$\{u(t) : t\in S\}$ は C のある元 z に弱収束する subnet $\{u(t_\alpha)\}$ を含まねばならない．$w(u)\subset F(\mathfrak{S})$ であり，

$z\in\bigcap_{s\in S}\overline{co}\{u(t) : t\geqq s\}$ であるので

$$z\in\bigcap_{s\in S}\overline{co}\{u(t) : t\geqq s\}\cap F(\mathfrak{S})$$

となる．定理3からこのような z は一意であるので $\{u(t)\}$ は $z\in F(\mathfrak{S})$ に弱収束することがわかる．

系2．E を Fréchet differentiable norm をもつ一様凸な Banach空間とし，$\{u(t) : t\in S\}$ を $\mathfrak{S}=\{T_t : t\in S\}$ の almost-orbit とする．$F(\mathfrak{S})\neq\phi$ とする．このとき，すべての h に対して $\lim_t\|u(t+h)-u(t)\|=0$ ならば，$\{u(t) : t\in S\}$ はある $y\in F(\mathfrak{S})$ に弱収束する．

証明　定理4によって，$w(u)\subset F(\mathfrak{S})$ を示せば十分である．$\{u(t_\alpha)\}$ を $y\in C$ に弱収束する subnet とする．$\varepsilon>0$ とし

よう．このとき，$\|u(t+t_\alpha)-T_t u(t_\alpha)\| < \frac{\varepsilon}{2}$ と $\|u(t+t_\alpha)-u(t_\alpha)\| < \frac{\varepsilon}{2}$ が十分大きな α と $t \in S$ に対して成り立つようにできるから

$$\|T_t u(t_\alpha)-u(t_\alpha)\| \leqq \|T_t u(t_\alpha)-u(t+t_\alpha)\| + \|u(t+t_\alpha)-u(t_\alpha)\| < \varepsilon$$

である．[7] より $I-T_t$ は demiclosed であるから $T_t y = y$ を得る．このようにして $y \in F(\mathfrak{S})$ である．

§5. Moroşanu の定理の一般化

つぎの定理は Moroşanu の定理の一般化である．その定理は Hilbert 空間の場合に証明されたが，ここでは一様凸な Banach空間の場合に証明する．（[15]，[23]を参照）

定理 5. E を一様凸な Banach空間とし，$\{u(t) ; t \in S\}$ を $\mathfrak{S}=\{T_t ; t \in S\}$ の almost-orbit とする．$F(\mathfrak{S}) \neq \phi$ とし，P を E から $F(\mathfrak{S})$ の上への metric projection とする．このとき，$Pu(t)$ は $F(\mathfrak{S})$ の点 z_0 に強収束する．ここで，z_0 は

$$\lim_t \|u(t)-z_0\| = \min\{\lim_t \|u(t)-z\| ; z \in F(\mathfrak{S})\}$$

となるような一意の点である．

証明　$F(\mathfrak{S}) \neq \phi$ であるので，$\{u(t) ; t \in S\}$ は有界となる．また任意の $z \in F(\mathfrak{S})$ に対して，$\lim_t \|u(t)-z\|$ が存在する．これを $\rho(z)$ とする．$R = \min\{\rho(z) ; z \in F(\mathfrak{S})\}$ とするならば，ρ

は連続な凸関数で，$\|z\| \to \infty$ のとき $\rho(z) \to \infty$ となるから，$\rho(z_0) = R$ となる $z_0 \in F(\mathcal{S})$ が存在する．一方すべての $t \in S$ と $y \in F(\mathcal{S})$ に対して $\|u(t) - Pu(t)\| \leqq \|u(t) - y\|$ であるから

$$\inf_t \sup_{t \leqq s} \|u(s) - Pu(s)\| \leqq R$$

である．$\inf_t \sup_{t \leqq s} \|u(s) - Pu(s)\| < R$ とすると，正数 ε と t_0 が存在して

$$\|u(s) - Pu(s)\| \leqq R - \varepsilon, \quad {}^\forall s \geqq t_0$$

となるようにできる．補題3の証明のようにして

$$\|u(t) - Pu(s)\| - \|u(s) - Pu(s)\| \leqq \phi(s), \quad {}^\forall t \geqq s$$

を得ることができる．$\phi(s) \to 0$ なので，ある $s\,(\geqq t_0)$ を選んで

$$\begin{aligned} \|u(t) - Pu(s)\| &\leqq \|u(s) - Pu(s)\| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leqq R - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} = R - \frac{\varepsilon}{2}, \quad {}^\forall t \geqq s \end{aligned}$$

とすることができる．このようにして

$$\lim_t \|u(t) - Pu(s)\| \leqq R - \frac{\varepsilon}{2} < R$$

となる．これは矛盾である．そこで

$$\inf_t \sup_{t \leqq s} \|u(s) - Pu(s)\| = R$$

である．

我々は $\lim_t Pu(t) = z_0$ であることを証明する．もしそうでないなら，ある $\varepsilon > 0$ が存在して，どんな $t \in S$ に対しても，$\| Pu(t') - z_0 \| \geqq \varepsilon$ となるような $t' (\geqq t)$ が存在する．δ を E の convexity の modulus とすると，空間の性質より

$$(R+a)\left(1-\delta\left(\frac{\varepsilon}{R+a}\right)\right) = R_1 < R$$

となるような正数 a が存在する．我々はまた十分大きな t' に対して，$\| u(t') - Pu(t') \| \leqq R+a$，$\| u(t') - z_0 \| \leqq R+a$ をもつ．よって

$$\left\| u(t') - \frac{Pu(t')+z_0}{2} \right\| \leqq (R+a)\left(1-\delta\left(\frac{\varepsilon}{R+a}\right)\right) = R_1$$

をもつ．$W_{t'} = \dfrac{Pu(t')+z_0}{2}$ は $F(\mathfrak{S})$ に属するので，補題 3 の証明のようにして，すべての $t (\geqq t')$ に対して

$$\| u(t) - W_{t'} \| \leqq \| u(t') - W_{t'} \| + \phi(t')$$

が成り立つ。$\phi(s) \rightarrow 0$ であるので，ある t' が存在して，すべての $t (\geqq t')$ に対して

$$\begin{aligned} \| u(t) - W_{t'} \| &\leqq \| u(t') - W_{t'} \| + \frac{R-R_1}{2} \\ &\leqq R_1 + \frac{R-R_1}{2} = \frac{R+R_1}{2} < R \end{aligned}$$

が成り立つ．よって $\rho(W_{t'}) < R$ である．これは矛盾であ

る．このようにして $\lim_t Pu(t) = z_0$ であることがわかる．またこの z_0 は $\rho(z_0) = \min\{\rho(z) ; z \in F(\mathfrak{S})\}$ を満たす一意の元であることもわかる．

系3．Hを Hilbert 空間とする．$\{u(t) ; t \in S\}$ を $\mathfrak{S}$ の almost-orbit とし，$F(\mathfrak{S}) \neq \phi$ とする．このとき，$u(t) \rightharpoonup y$ である必要十分条件はすべての $h \in S$ に対して $u(t+h) - u(t) \rightharpoonup 0$ であることである．この場合，$y \in F(\mathfrak{S})$ であり，$Pu(t) \to y$ である．

証明 "if" part のみを証明する．$\{u(t) ; t \in S\}$ は有界なので，$u(t_\alpha) \rightharpoonup z$ となるような subnet $\{u(t_\alpha)\}$ が存在する．$u \in F(\mathfrak{S})$ なら，我々は

$$
\begin{aligned}
0 &\leqq \|u(t_\alpha) - z\|^2 - \|T_t u(t_\alpha) - T_t z\|^2 \\
&= \|u(t_\alpha) - u\|^2 + 2\langle u(t_\alpha) - u, u - z\rangle + \|u - z\|^2 \\
&\quad - \|T_t u(t_\alpha) - u\|^2 - 2\langle T_t u(t_\alpha) - u, u - T_t z\rangle - \|u - T_t z\|^2 \\
&= \|u(t_\alpha) - u\|^2 - \|T_t u(t_\alpha) - u\|^2 + 2\langle u(t_\alpha) - u, T_t z - z\rangle \\
&\quad + 2\langle u(t_\alpha) - T_t u(t_\alpha), u - T_t z\rangle + \|u - z\|^2 - \|u - T_t z\|^2
\end{aligned}
$$

をもち，t_α を無限大にすることによって

$$
\begin{aligned}
0 &\leqq 2\langle z - u, T_t z - z\rangle + \|u - z\|^2 - \|u - T_t z\|^2 \\
&= -\|z - T_t z\|^2
\end{aligned}
$$

を得る．実際

$$
\lim_\alpha \|T_t u(t_\alpha) - u\|^2 = \lim_\alpha \|u(t + t_\alpha) - u\|^2 = \lim_\alpha \|u(t_\alpha) - u\|^2
$$

であるからである．このようにして $z \in F(\mathfrak{S})$ を得る．よって $W(u) \subset F(\mathfrak{S})$ がいえた．定理4によって，$\{u(t);t \in S\}$ はある $y \in F(\mathfrak{S})$ に弱収束することがこれでわかる．　一方 P は H から $F(\mathfrak{S})$ 上への metric projection であるので，

$$\langle u(t) - Pu(t),\ Pu(t) - z \rangle \geqq 0$$

が，すべての $z \in F(\mathfrak{S})$ に対していえる．そこで，定理5によって $Pu(t) \to u$ なので，

$$\langle y - u,\ u - z \rangle \geqq 0$$

となる．$y = z$ とおくことによって $-\|y-u\|^2 \geqq 0$ を得，その結果 $y = u$ を得る．

§6．おわりに

§4，§5の結果は S が right reversible semitopological semigroup（すなわち，S の2つの閉な left ideals が空でない共通部分をもつ）の場合にも証明されることが最近わかった．ただし，S における order は $a \leqq b \Longleftrightarrow \{a\} \cup \overline{Sa} \supset \{b\} \cup \overline{Sb}$ である．また，E が Fréchet differentiable norm をもつ一様凸な Banach 空間に対しては，$\mathfrak{S} = \{T_t;t \in S\}$ の almost-orbit $\{u(t);t \in S\}$ に対する mean ergodic theorem も考えることができ，S が commutative の場合には弱収束の形でその定理も証明できる．

References

[1] S. Aizicovici, On the asymptotic behaviour of solutions of Volterra equations in Hilbert space, Nonlinear Analysis, 7 (1983), 271–278.

[2] J. B. Baillon and H. Brézis, Une remaque sur le comportement asymptotique des semigroupes non linéaires, Houston J. Math. 2 (1976), 5–7.

[3] V. Barbu, Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces, Noordhoff, Leyden, 1976.

[4] V. Barbu and Th. Precupanu, Convexity and Optimization in Banach spaces, Editura Academiei R.S.T., Bucuresti, 1978.

[5] M. S. Brodskii and D. P. Milman, On the center of a convex set, Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.), 59 (1948), 837–840.

[6] F. E. Browder, Nonexpansive nonlinear operator in a Banach space, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 54 (1965), 1041–1044.

[7] F. E. Browder, Nonlinear operators and nonlinear equations of evolution in Banach spaces, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 18, no. 2, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. 1976.

[8] R.E. Bruck, Asymptotic convergence of nonlinear contraction semigroups in Hilbert space, J. Funct. Analysis 8 (1975), 5–26.

[9] R.E. Bruck, A simple proof of the mean ergodic theorem for nonlinear contractions in Banach spaces, Israel J. Math., 32 (1979), 107-116.

[10] M.M. Day, "Normed linear spaces", 3rd., Springer-Verlag, Berlin/ New York, 1973.

[11] F.R. Deutsch and P.H. Maserick, Application of the Hahn-Banach theorem in approximation theory, SIAM Rev., 9 (1967), 516-530.

[12] J. Diestel, Geometry of Banach spaces, selected topics. Lecture notes in mathematics 485 (1975), Springer Verlag, Berline-Heidelberg, New York.

[13] C.W. Groetsch, A note on segmenting Mann iterates, J. Math. Anal. Appl., 40 (1972), 369-372.

[14] N. Hirano and W. Takahashi, Nonlinear ergodic theorems for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in a Banach space, Pacific J. Math., 112 (1984), 333-346.

[15] D.S. Hulbert and S. Reich, Asymptotic behavior of solutions to nonlinear Volterra integral equations, J. Math. Anal. Appl., 104 (1984), 155-172.

[16] K. Kido and W. Takahashi, Means on commutative semigroups and nonlinear ergodic theorems, J. Math. Anal. Appl., 111

(1985), 585-605.

[17] W. A. Kirk, A fixed point theorem for mappings which do not increase distances, Amer. Math. Monthly, 72 (1965), 1004-1006.

[18] 高村幸男・小西芳雄, 非線形発展方程式, 岩波講座基礎数学, 岩波書店, 1977.

[19] A. T. Lau, Semigroup of nonexpansive mappings on a Hilbert space, J. Math. Anal. Appl., 105 (1985), 514-522.

[20] A. T. Lau and W. Takahashi, Weak convergence and non-linear ergodic theorems for reversible semigroup of nonexpansive mappings, Pacific J. Math., 126 (1987), to appear.

[21] 宮寺功, 非線形半群, 紀伊国屋書店, 1977.

[22] I. Miyadera and K. Kobayashi, On the asymptotic behaviour of almost-orbits of nonlinear contraction semigroups in Banach spaces, Nonlinear Analysis, 6 (1982), 349-365.

[23] G. Moroşanu, Asymptotic behaviour of solutions of differential equations associated to monotone operator, Nonlinear Analysis, 3 (1979), 873-883.

[24] A. Pazy, On the asymptotic behaviour of semigroups of nonlinear contractions in Hilbert space, J. Funct. Analysis 27 (1978), 292-307.

[25] J. Prüß, A characterization of uniform convexity and

applications to accretive operators, Hiroshima J. Math., 11 (1981), 229-234.

[26] S. Reich, Product formula, nonlinear semigroups, and accretive operators, J. Functional Anal., 36 (1980), 147-168.

[27] W. Takahashi, A nonlinear ergodic theorem for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space, Proc. Amer. Math. Soc., 81 (1981), 253-256.

[28] W. Takahashi, Fixed point theorems for families of non-expansive mappings on unbounded sets, J. Math. Soc. Japan, 36 (1984), 543-553.

[29] W. Takahashi, A nonlinear erdodic theorem for a reversible semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space, Proc. Amer. Math. Soc., 97 (1986), 55-58.

[30] 田辺広城，発展方程式，岩波書店，1975.

[31] J. R. L. Webb, Mappings of accretive and pseudo-A-proper type, J. Math. Anal. Appl., 85 (1982), 146-152.