数理解析研究所講究録
第 604 巻 1987 年 139-162

放物型函数微分方程式の周期解の２重固有値からの分岐

東海産業短大経営学科　　新倉保夫 (Yasuo Niikura)

§0. Introduction.

この論文では，放物型函数微分方程式に対する，重複度2のHopf分岐問題をあつかう。我々の目的は，Hopf分岐の存在証明をし，同時に分岐点の近傍における解集合全体の表現を与えることである。我々の主結果は，定理1.4である。

放物型函数微分方程式の単純固有値からのHopf分岐に関する，最近の結果は，Yoshida[17]，Morita[10]，Yamada-Niikura[16]などがある。

放物型偏微分方程式の単純固有値からのHopf分岐についてはSattinger[12]，多重固有値からのHopf分岐についてはIze[7]などがある。

放物型函数微分方程式の多重固有値からのHopf分岐については，論文はあまり出ていないようである．今年出た本[2]には，分岐理論の最近の多くの結果が載っている．

§1　問題と結果

放物型函数微分方程式

$$
(1.1)\quad \begin{cases} \partial_t u(t,x) - \Delta u + \lambda u(t-1,x) + u^3 = 0, & \text{in } \mathbb{R}\times\Omega \\ u(t,x) = u(t+p,x) & \text{in } \mathbb{R}\times\Omega \\ u(t,x) = 0 & \text{on } \mathbb{R}\times\partial\Omega \end{cases}
$$

において，$\lambda\in\mathbb{R}$ および $p>0$ を parameter とする分岐問題を考える。ここで，Ω は $\mathbb{R}^n$ の有界領域，$\partial\Omega$ は smooth とする。

問題(1.1)は変換

$$
(1.2)\qquad t=\frac{s}{\mu},\quad \mu=\frac{2\pi}{p},\quad u(t,x)=u\left(\frac{s}{\mu},x\right)=v(s,x)
$$

をほどこすことにより，同等な問題

$$
(1.3)\quad \begin{cases} \mu\partial_s v(s,x) - \Delta v + \lambda v(s-\mu,x) + v^3 = 0, & \text{in } \mathbb{R}\times\Omega \\ v(s,x) = v(s+2\pi,x) & \text{in } \mathbb{R}\times\Omega \\ v(s,x) = 0 & \text{on } \mathbb{R}\times\partial\Omega \end{cases}
$$

に帰着される。

さて，関数空間

$$
X_{2\pi} = \left\{ v(s,x)\in C^{1+\alpha,2+2\alpha}(\mathbb{R}\times\Omega) \;\middle|\; v(s,x)=v(s+2\pi,x),\ v|_{\mathbb{R}\times\partial\Omega}=0 \right\}
$$

$$
Y_{2\pi} = \left\{ v(s,x)\in C^{\alpha,2\alpha}(\mathbb{R}\times\Omega) \;\middle|\; v(s,x)=v(s+2\pi,x) \right\}
$$

とし，λ と μ を parameter とする線型作用素 $L(\lambda,\mu): X_{2\pi}\to Y_{2\pi}$ を次のように定義する。

$$
(1.4)\qquad L(\lambda,\mu)v = \mu\partial_s v - \Delta v + \lambda v(s-\mu,x),\qquad v\in X_{2\pi}.
$$

このとき，問題(1.3)は次のように表現される．

$$(1.5) \qquad L(\lambda,\mu)v + v^3 = 0, \qquad \text{in } Y_{2\pi}.$$

我々は，いくつかの定義と命題を用意しよう．

<u>定義1.1.</u> 方程式(1.5)（すなわち(1.3)）をみたす組(λ,μ,v) $\in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\times X_{2\pi}$ を(1.5)の<u>解</u>という．

<u>定義1.2.</u> $(\lambda_0,\mu_0,0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\times X_{2\pi}$ が(1.5)（すなわち(1.3)）の<u>分岐点</u>であるとは次がなりたつこと：

$(\lambda_0,\mu_0,0)$ の $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\times X_{2\pi}$ における任意の近傍が $v\neq 0$ をみたす(1.5)の解をもつ．

<u>命題1.1.</u> $L(\lambda,\mu): X_{2\pi}\to Y_{2\pi}$ は任意の $\lambda\in\mathbb{R}$，$\mu>0$ に対して，有界な，index 0 の Fredholm 作用素である．

証明は§2で与える．

<u>命題1.2.</u> $L(\lambda_0,\mu_0)$ が invertible ならば $(\lambda_0,\mu_0,0)$ は分岐点ではない。

<u>証明.</u> 関数 $F(\lambda,\mu,v)$ を $F(\lambda,\mu,v)\equiv L(\lambda,\mu)v+v^3$ により定義すると，(i) $F(\lambda_0,\mu_0,0)=0$，(ii) $F_v(\lambda_0,\mu_0,0)=L(\lambda_0,\mu_0)$．したがって，(1.5)において Banach 空間の陰関数定理を用いれば，v は $(\lambda_0,\mu_0,0)$ の近傍で (λ,μ) に関して解けて，$v=v(\lambda,\mu)$ と一意的に表される。一方(1.5)は自明な解の族 $\{(\lambda,\mu,0)\,|\,\lambda\in\mathbb{R},\mu>0\}$ をもつから，$v(\lambda,\mu)\equiv 0$．すなわち分岐解は存在しない。□

対偶を考えることにより，次をえる．

(*) $(\lambda_0,\mu_0,0)$ が分岐点ならば，$L(\lambda_0,\mu_0)$ は invertible でない。

$L(\lambda_0, \mu_0)$はinvertibleでないとき，命題1.1により，

(1.6) $\dim NL(\lambda_0, \mu_0) = \operatorname{codim} RL(\lambda_0, \mu_0) = m, \quad 0 < m < \infty$

がなりたっている。

次にどのような(λ, μ)の値に対して，$\dim NL(\lambda, \mu) \neq 0$となるかを考える。いま$\varphi(x)$を$-\Delta$（Dirichlet zero）の固有函数，$\omega$をその固有値とする。すなわち

(1.7) $\begin{cases} -\Delta\varphi = \omega\varphi, & \text{in } \Omega, \\ \varphi = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$

とする。(1.4)において，

(1.8) $v = e^{ins}\varphi, \quad n \in \mathbb{Z}$

とおくと，

(1.9) $L(\lambda, \mu)\, e^{ins}\varphi = (in\mu + \omega + \lambda e^{-in\mu})\, e^{ins}\varphi.$

したがって，

(1.10) $in\mu + \omega + \lambda e^{-in\mu} = 0, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \omega \in \sigma(-\Delta),$

ならば，$NL(\lambda, \mu) \neq \{0\}$であるが，逆もなりたつ。

<u>命題 1.3.</u> $NL(\lambda, \mu) \neq \{0\}$であるための必要十分条件は，ある$n \in \mathbb{Z}$，ある$\omega \in \sigma(-\Delta)$に対して(1.10)がなりたつこと。

<u>証明.</u> 必要性を証明しよう。$0 \neq v \in X_{2\pi}$があって，

$$L(\lambda, \mu)v = 0, \quad \text{in } Y_{2\pi}, \quad v \in X_{2\pi}.$$

がなりたつとする。vは，$L^2((0,2\pi)\times\Omega)$の意味で，$v = \sum_{n\in\mathbb{Z}, j\in N} a_{nj}\, e^{ins}\varphi_j$と表わせ，ある$(n, j)$に対して$a_{nj} \neq 0$が

なりたつ。よって，$L(\lambda,\mu)e^{ins}\varphi_j = 0$，すなわち(1.10)がなりたつ。□

(1.10)をみたす対(λ,μ)は，次のように容易に求められる。(1.10)を実部，虚部に分解すれば

$$
(1.11)\quad \begin{cases} \omega + \lambda\cos n\mu = 0, \\ n\mu - \lambda\sin n\mu = 0. \end{cases}
$$

これより，

$$
(1.12)\qquad n\mu = -\omega\tan n\mu
$$

$$
(1.13)\qquad \omega^2 + (n\mu)^2 = \lambda^2
$$

をえる。したがって，各nおよびωを固定するごとに，(1.12)をみたすμが可算無限個定まり，その各μに対して，正負の2つのλが定まる。

(1.10)を満足する(λ,μ)を"Possible bifurcation point"と呼ぼう。我々の問題は，Possible bifurcation pointがいかなる条件のもとで分岐点(Bifurcation point)となるか，さらに，分岐解の族はどのようにparametrizeできるかを明らかにすることである。

この論文ではとくにdouble multiplicity，いいかえるとωが$(-\Delta)$のdouble eigenvalue，の場合について述べる。このとき，(1.6)の$m=4$であることに注意する。

我々は次の(A.1)，(A.2)を仮定する。

$$(A.1)\qquad NL(\lambda_0,\mu_0)=\mathrm{span}\{\varphi_1\cos s,\ \varphi_1\sin s,\ \varphi_2\cos s,\ \varphi_2\sin s\}.$$

$$(A.2)\begin{cases}\int_\Omega \varphi_1^3\varphi_2 \neq 0 \quad \text{または} \quad \int_\Omega \varphi_1\varphi_2^3 \neq 0 \quad \text{または} \\ \int_\Omega \varphi_1^2\varphi_2^2 \neq \int_\Omega \varphi_1^4 \neq 3\int_\Omega \varphi_1^2\varphi_2^2 \quad \text{または} \quad \int_\Omega \varphi_1^2\varphi_2^2 \neq \int_\Omega \varphi_2^4 \neq 3\int_\Omega \varphi_1^2\varphi_2^2.\end{cases}$$

注意. (A.1), (A.2)より, $n=1$およびφ_1,φ_2の共通の固有値ωに対して(1.10)がなりたつ:

$$i\mu_0+\omega+\lambda_0 e^{-i\mu_0}=0.$$

我々の主結果は次の定理である.

定理1.4 (A.1), (A.2)の仮定のもとで, 問題(1.3)は$(\lambda_0,\mu_0,0)$より分岐する, $(\varepsilon,\theta)\in R^+\times S^1$によってparametrizeされる, 少くとも2組の分岐解の族をもつ.

さらに$(\lambda_0,\mu_0,0)$の近傍での分岐解の全体$\mathcal{S}$は, 次のように表される:

$$\begin{cases}\mathcal{S}=\{(\lambda(\varepsilon),\mu(\varepsilon),z(\varepsilon,\theta)+w(\varepsilon,\theta))\mid z(\varepsilon,\theta)\in NL(\lambda_0,\mu_0),\ w(\varepsilon,\theta)\\ \qquad \in RL(\lambda_0,\mu_0),\ 0\leqq\varepsilon\leqq\varepsilon_0,\ 0\leqq\theta<2\pi\}\\ \lambda(\cdot)\in C^1,\ \lambda(0)=\lambda_0,\\ \mu(\cdot)\in C^1,\ \mu(0)=\mu_0,\\ z(\varepsilon,\theta)=\varepsilon\,\mathrm{Re}(a e^{i(s+\theta)}\varphi_1+b e^{i(s+\theta)}\varphi_2),\\ \qquad \{(a,b)\in \mathbb{C}^2 \mid |a|^2+|b|^2=1,\ \Gamma(a,b,\varepsilon)=0\},\\ \qquad \Gamma\text{は複素数値}C^1\text{函数},\\ w(\varepsilon,\theta)=h(z(\varepsilon,\theta),\lambda(\varepsilon),\mu(\varepsilon)),\\ \qquad h\text{は}RL(\lambda_0,\mu_0)\text{値}C^1\text{函数で}, h(0,\lambda_0,\mu_0)=0.\end{cases}$$

§2 準備

このSectionでは，証明するために必要な関数解析的な準備をする。まず，次のNotationを導入しよう：

$$N = N(L(\lambda_0,\mu_0)) = \{u \in X_{2\pi} \mid L(\lambda_0,\mu_0)u = 0\},$$

$$R = R(L(\lambda_0,\mu_0)) = \{L(\lambda_0,\mu_0)u \mid u \in X_{2\pi}\}.$$

命題1.1がなりたつことが，問題(1.3)を解析するために，基本的である．まずその証明を与える。

<u>命題1.1の証明.</u> $(\mu\partial_s - \Delta): X_{2\pi} \to Y_{2\pi}$ は有界な，index 0 のFredholm作用素である（実際，invertible operator）。証明は，Yamada-Niikura[16], Lemma 3.1にある。Sattinger[12], §5 を参照してもよい．さて，$L(\lambda,\mu)$ を

$$L(\lambda,\mu) = (\mu\partial_s - \Delta) + D_{-\mu}, \quad (D_{-\mu}v)(s,x) = v(s-\mu,x),$$

と表わし，T.Kato[8], P238, Th.5.26 を適用することにより，$L(\lambda,\mu)$ が index 0 のFredholm作用素であることを証明しよう．実際，$T = (\mu\partial_s - \Delta)$，$A = D_{-\mu}$ とおくと，$D(T) = X_{2\pi}$，$D(A) = Y_{2\pi}$ であるから，A は T-compact 作用素（定義は[8], P194）であり，Th.5.26の仮定がみたされる．よって命題1.1は証明された。□

さて，仮定(A.1)により，

$$N = \mathrm{span}_R\{\varphi_1\cos s,\ \varphi_1\sin s,\ \varphi_2\cos s,\ \varphi_2\sin s\} \tag{2.1}$$

である．写像 $P: Y_{2\pi} \to N$ を

$$(2.2)\qquad Pu = \sum_{i=1}^{2}\left\{(u, \varphi_i \cos s)\varphi_i \cos s + (u, \varphi_i \sin s)\varphi_i \sin s\right\}$$

により定義する。ここで

$$(2.3)\qquad (u, v) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_\Omega u\, v\, dx\, ds\,.$$

このとき，次の命題がなりたつ．

命題2.2. 写像Pは，任意の(λ, μ)に対して，$L(\lambda, \mu)$と可換な射影作用素である。

証明. Pが$L(\lambda, \mu)$と可換なことをいうには，∂_s，Δおよび$D_{-\mu}$と可換なことを示せばよい．証明は簡単な計算により与えられるので省略する．$P^2u = Pu$であることも容易に計算できる。□

さて，証明に用いる計算を可能にするため，実零空間Nに$\mathbb{C}^2$の複素座標を導入しよう。まず複素有限次元空間$N_{\mathbb{C}}$，N_*を次のように定義する：

$$(2.4)\qquad N_{\mathbb{C}} = N \otimes \mathbb{C} = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{e^{\pm is}\varphi_1, e^{\pm is}\varphi_2\}$$

$$(2.5)\qquad N_* = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{e^{is}\varphi_1, e^{is}\varphi_2\}$$

さて，任意の$z \in N$は，$z \in N \subset N_{\mathbb{C}}$とみて，

$$(2.6)\qquad z = a e^{is}\varphi_1 + b e^{is}\varphi_2 + \bar{a} e^{-is}\varphi_1 + \bar{b} e^{-is}\varphi_2,\quad a, b \in \mathbb{C},$$

と表される．同相写像$i_* : N \to N_*$，$j_* : N_* \to \mathbb{C}_2$を

$$(2.7)\qquad i_* : a e^{is}\varphi_1 + b e^{is}\varphi_2 + \bar{a} e^{-is}\varphi_1 + \bar{b} e^{-is}\varphi_2 \longrightarrow a e^{is}\varphi_1 + b e^{is}\varphi_2$$

$$(2.8)\qquad j_* : a e^{is}\varphi_1 + b e^{is}\varphi_2 \longrightarrow (a, b)$$

により定義する．

我々は、§3でしばしば N から N への写像 f に対して，可換図式

(2.9)
$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "f"] & N \arrow[d, "i_*"] \\ N_* \arrow[u, "i_*^{-1}"] \arrow[r, "f_*"] & N_* \arrow[d, "j_*"] \\ \mathbb{C}^2 \arrow[u, "j_*^{-1}"] \arrow[r, "f_c"] & \mathbb{C}^2 \end{tikzcd}$$

により定義される写像 f_*, f_c を考える。たとえば $L(\lambda,\mu): N \to N$ に対して，$L(\lambda,\mu)_*: N_* \to N_*$，$L(\lambda,\mu)_c: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ を考えると，

(2.10) $$L(\lambda,\mu)_* = L(\lambda,\mu)\big|_{N_*},$$

(2.11) $$L(\lambda,\mu)_c = \begin{bmatrix} i\mu + \omega + \lambda e^{-i\mu} & 0 \\ 0 & i\mu + \omega + \lambda e^{-i\mu} \end{bmatrix}$$

であることに注意する．また写像 $P_*: Y_{2\pi} \to N_*$ を $P_* = i_* P$ により定義すると，P_* は射影作用素で，

(2.12) $$P_* v = \sum_{i=1}^{2} \langle v, e^{is}\varphi_i \rangle_{\mathbb{C}}\, e^{is}\varphi_i ,$$

(2.13) $$\langle v, e^{is}\varphi_i \rangle_{\mathbb{C}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_\Omega v\, e^{-is}\varphi_i\, dx\, ds , \quad i = 1, 2,$$

(2.14) $$\langle u, v \rangle_{\mathbb{C}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_\Omega u(s,x)\overline{v(s,x)}\, dx\, ds$$

である．

最後に，§3で用いるNotationを与える。

(i) $z \in N$ に対して，$|z|^2 = |a|^2 + |b|^2$ と定める。ここで a, b は(2.6)により与えられる．

(ii) $\Psi_i = e^{is}\varphi_i$, $\overline{\Psi}_i = e^{-is}\varphi_i$ $(i = 1, 2)$.

§3 証明.

このSection では，§2の準備のもとに，定理1.4を証明しよう。

(1.5) $\quad L(\lambda,\mu)v+v^3=0, \qquad v\in X_{2\pi},$

において，

(3.1) $\quad v=z+w, \quad z\in N, \quad w\in R,$

とおき，$N=PY_{2\pi}$ および $R=(I-P)Y_{2\pi}$ 上の方程式に分解する：

(3.2) $\quad L(\lambda,\mu)z+P(z+w)^3=0 \qquad \text{in } N,$

(3.3) $\quad L(\lambda,\mu)w+(I-P)(z+w)^3=0 \qquad \text{in } R.$

まず(3.3)にBanach空間における陰函数定理を適用して，w を λ,μ,z に関して解こう。(3.3)の左辺を $F(w,z,\lambda,\mu)$ とおく：

$$F(w,z,\lambda,\mu)=L(\lambda,\mu)w+(I-P)(z+w)^3.$$

このとき，$F(w,z,\lambda,\mu):(R\cap X_{2\pi})\times N\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\longrightarrow R$ は，連続的Fréchet 微分可能で，

(1) $\quad F(0,0,\lambda_0,\mu_0)=0,$

(2) $\quad F_w(0,0,\lambda_0,\mu_0)=L(\lambda_0,\mu_0):R\cap X_{2\pi}\to R$ はhomeomorphism,

をみたすから，陰函数定理（[12]§3, P60）により，w は

(3.4) $\quad w=h(z,\lambda,\mu), \quad h(0,\lambda_0,\mu_0)=0, \quad w=O(|z|^3)$

と解ける。ここで $h:N\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\to R\cap X_{2\pi}$ は C^1 級である。(3.4)を(3.2)に代入すると，Nにおける方程式

(3.5) $$L(\lambda,\mu)z + P(z + h(z,\lambda,\mu))^3 = 0, \quad \text{in } N,$$

を得る．(3.5)は「分岐方程式（Bifurcation equation)」とよばれ，(Possible) bifurcation point の近傍における解の構造を決定する。

以下では，(3.5)を解くことを考える。(3.5)において，

(3.6) $$z = \varepsilon y, \ |y| = 1,$$

とおき，ε でわると，

(3.7) $$L(\lambda,\mu)y + \frac{1}{\varepsilon}P(\varepsilon y + h(\varepsilon y,\lambda,\mu))^3 = 0$$

を得る．ここで，左辺の第2項を $H(y,\lambda,\mu,\varepsilon)$ とおくと，

(3.8) $$\begin{aligned} H(y,\lambda,\mu,\varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon}P(\varepsilon y + h(\varepsilon y,\lambda,\mu))^3 \\ &= \varepsilon^2 P y^3 + h_1(y,\lambda,\mu,\varepsilon), \end{aligned}$$

(3.9) $$h_1(y,\lambda,\mu,\varepsilon) = H(y,\lambda,\mu,\varepsilon) - \varepsilon^2 P y^3 = O(\varepsilon^4 |y|^5) = O(\varepsilon^4)$$

と表すことができる．したがって(3.7)は，

(3.10) $$L(\lambda,\mu)y + \varepsilon^2(Py^3 + h_2(y,\lambda,\mu,\varepsilon)) = 0$$

とかける。ここで，$h_2(y,\lambda,\mu,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2}h_1(y,\lambda,\mu,\varepsilon)$。(3.10)において，

(3.11) $$y = a\psi_1 + b\psi_2 + \bar{a}\bar{\psi}_1 + \bar{b}\bar{\psi}_2, \ |a|^2 + |b|^2 = 1, \ a, b \in \mathbb{C},$$

とおき，$\psi_i = e^{is}\varphi_i$，$i = 1, 2$，の各成分を計算しよう。(1.9)により，

(3.12) $$L(\lambda,\mu)\psi_i = (i\mu + \omega + \lambda e^{-i\mu})\psi_i, \quad i = 1, 2,$$

であり，§2でよえた $\langle \cdot, \psi_i \rangle_{\mathbb{C}}$ を計算することにより，(3.10)は次の systemに帰着される。

$$(3.13)\quad \begin{cases} a(i\mu+\omega+\lambda e^{-i\mu}) + \langle \varepsilon^2(y^3+h_2(y,\lambda,\mu,\varepsilon)), \psi_1\rangle_{\mathbb{C}} = 0 \\ b(i\mu+\omega+\lambda e^{-i\mu}) + \langle \varepsilon^2(y^3+h_2(y,\lambda,\mu,\varepsilon)), \psi_2\rangle_{\mathbb{C}} = 0 \end{cases}$$

ここで，$y = a\psi_1 + b\psi_2 + \bar{a}\bar{\psi}_1 + \bar{b}\bar{\psi}_2$ である．

命題3.1. 複素数値函数 $\alpha = \alpha(\lambda,\mu)$ を $\alpha(\lambda,\mu) = i\mu + \omega + \lambda e^{-i\mu}$ により定義すると，函数αは$(\lambda_0,\mu_0)\in\mathbb{R}^2$の近傍から $0\in\mathbb{C}$ の近傍へのhomeomorphismである。

証明. $\mathrm{Im}\left[\frac{\partial\alpha}{\partial\mu}\Big/\frac{\partial\alpha}{\partial\lambda}\right](\lambda_0,\mu_0) \neq 0$ を示せばよい．容易に，

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\lambda} = e^{-i\mu},\quad \frac{\partial\alpha}{\partial\mu} = i - i\lambda e^{-i\mu} = i(1-\lambda e^{-i\mu}).$$

よって，

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\mu}\Big/\frac{\partial\alpha}{\partial\lambda} = i(1-\lambda e^{-i\mu})e^{i\mu} = i(e^{i\mu}-\lambda)$$

この虚数部分の(λ_0,μ_0)における値は，

$$\mathrm{Im}\left[\frac{\partial\alpha}{\partial\mu}\Big/\frac{\partial\alpha}{\partial\lambda}\right](\lambda_0,\mu_0) = \cos\mu_0 - \lambda_0 \neq 0$$

である．なぜなら，$\cos\mu_0 = \lambda_0$ とすると，(1.11)より，

$$0 = \omega + \lambda_0\cos\mu_0 = \omega + \lambda_0^2,$$

となる。このことは(1.7)の固有値ωが正であることに反する。

□

我々は，(3.13)を解くために，新たに複素parameter β を導入して，次の"Modified bifurcation equation"を考える：

$$(3.14)\quad \begin{cases} a\alpha - \bar{b}\beta + \varepsilon^2 g_1(a,b,\alpha,\varepsilon) = 0 \\ b\alpha + \bar{a}\beta + \varepsilon^2 g_2(a,b,\alpha,\varepsilon) = 0, \end{cases}$$

ここで，$g_i(a,b,\alpha,\varepsilon)$，$i=1,2$，は

$$(3.15)\quad g_i(a,b,\alpha,\varepsilon) \equiv \langle y^3 + R_2(y,\lambda,\mu,\varepsilon), e^{isi}\varphi_i \rangle_{\mathbb{C}}\ , \quad i=1,2,$$
$$y = ae^{is}\varphi_1 + be^{is}\varphi_2 + \bar{a}e^{-is}\varphi_1 + \bar{b}e^{-is}\varphi_2\ ,$$
$$\alpha = i\mu + \omega + \lambda e^{-i\mu}\ ,$$

により定義される関数である．Modified bifurcation equation(3.14)において，$\beta=0$とすると，(3.14)は(3.13)と一致することに注意する。

さて，(3.14)の左辺を$F((\alpha,\beta);(a,b);\varepsilon)$とおく．すなわち(3.14)は，

$$(3.16)\quad F((\alpha,\beta);(a,b);\varepsilon) \equiv \begin{bmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon^2 g_1(a,b;\alpha,\varepsilon) \\ \varepsilon^2 g_2(a,b;\alpha,\varepsilon) \end{bmatrix} = 0,$$

と表される．(3.16)に陰函数定理を適用して，αとβに関して解こう。

(1) $F((0,0),(a,b),0) = 0$

(2) $F_{(\alpha,\beta)}((0,0),(a,b),0) = \begin{bmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{C}),$

したがって，(3.16)はαとβに関して解けて，

$$(3.17)\quad \begin{cases} \alpha = \tilde{\alpha}(a,b,\varepsilon) \\ \beta = \tilde{\beta}(a,b,\varepsilon) \end{cases}$$

と表される。

以上の議論をまとめると，分岐方程式(3.5)の$(0,\lambda_0,\mu_0)$の近傍における解集合Sは，次のように表されることがわかる。

定理3.2

$$S = \left\{ (z, \lambda, \mu) \,\middle|\, z = \varepsilon(a e^{is}\varphi_1 + b e^{is}\varphi_2),\ (\lambda, \mu) = \alpha^{-1}\tilde{\alpha}(a, b, \varepsilon) \right.$$
$$\left. a, b \in \mathbb{C},\ |a|^2 + |b|^2 = 1,\ \tilde{\beta}(a, b, \varepsilon) = 0,\ 0 \leqq \varepsilon \leqq \varepsilon_0 \right\}.$$

次に上で求めた関数$\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$が(a, b, ε)のどのような関数であるかを調べよう。

命題3.3. $\zeta \in \mathbb{C}$, $|\zeta| = 1$とすると,

(1) $g_i(a, b, \alpha, -\varepsilon) = g_i(a, b, \alpha, \varepsilon)$

(2) $g_i(\zeta a, \zeta b, \alpha, \varepsilon) = \zeta g_i(a, b, \alpha, \varepsilon)$.

証明. (1)は(3.2), (3.3)の左辺がz, wについて奇関数であることから容易に計算される。(2)は(3.2), (3.3)の左辺で与えられる作用素が, time shift $T(\theta)$と可換であることから得られる。ここで, $[T(\theta)v](s, x) = v(s+\theta, x)$. □

さて(3.14)より,

$$(3.18)\quad \begin{cases} a\alpha - \bar{b}\beta + \varepsilon^2 g_1(a, b, \alpha, \varepsilon) = 0 \\ b\alpha + \bar{a}\beta + \varepsilon^2 g_2(a, b, \alpha, \varepsilon) = 0. \end{cases}$$

これから容易に,

$$(3.19)\quad \alpha = -\varepsilon^2\left(\bar{a} g_1(a, b, \alpha, \varepsilon) + \bar{b} g_2(a, b, \alpha, \varepsilon)\right),$$

$$(3.20)\quad \beta = \varepsilon^2\left(b g_1(a, b, \alpha, \varepsilon) - \bar{a} g_2(a, b, \alpha, \varepsilon)\right).$$

命題3.4. 複素数値関数$\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$は次の性質をもつ.

(1) $\tilde{\alpha}(a, b, -\varepsilon) = \tilde{\alpha}(a, b, \varepsilon)$

(2) $\tilde{\beta}(a, b, -\varepsilon) = \tilde{\beta}(a, b, \varepsilon)$

(3) $\tilde{\alpha}(\zeta a, \zeta b, \varepsilon) = \tilde{\alpha}(a, b, \varepsilon)$, $\zeta \in \mathbb{C}$, $|\zeta| = 1$,

(4) $\tilde{\beta}(\zeta a, \zeta b, \varepsilon) = \zeta^2 \tilde{\beta}(a, b, \varepsilon)$, $\zeta \in \mathbb{C}$, $|\zeta| = 1$.

<u>証明.</u> (3.19), (3.20)において, g_1, g_2に命題3.3を適用し, 陰函数定理による解の一意性を考慮すれば, 容易に検証される. □

さらに, (3.19), (3.20)に(3.15)を用いると,

$$(3.21)\quad \begin{aligned} \alpha &= -\varepsilon^2 \langle y^3 + h_2, a e^{\lambda s} \varphi_1 + b e^{\lambda s} \varphi_2 \rangle_{\mathbb{C}} \\ &= -\varepsilon^2 \langle (a\psi_1 + b\psi_2 + \bar{a}\bar{\psi}_1 + \bar{b}\bar{\psi}_2)^3, a\psi_1 + b\psi_2 \rangle_{\mathbb{C}} + O(\varepsilon^4), \end{aligned}$$

$$(3.22)\quad \begin{aligned} \beta &= \varepsilon^2 \langle y^3 + h_2, \bar{b} e^{\lambda s} \varphi_1 - \bar{a} e^{\lambda s} \varphi_2 \rangle_{\mathbb{C}} \\ &= \varepsilon^2 \langle (a\psi_1 + b\psi_2 + \bar{a}\bar{\psi}_1 + \bar{b}\bar{\psi}_2)^3, \bar{b}\psi_1 - \bar{a}\psi_2 \rangle_{\mathbb{C}} + O(\varepsilon^4). \end{aligned}$$

これより, ただちに次の命題を得る.

<u>命題3.5.</u>

$$(3.23)\quad \begin{cases} \tilde{\alpha}(a, b, \varepsilon) = \varepsilon^2 A_0(a, b) + O(\varepsilon^4) \\ \tilde{\beta}(a, b, \varepsilon) = \varepsilon^2 B_0(a, b) + O(\varepsilon^4), \end{cases}$$

ここで,

$$(3.24)\quad \begin{cases} A_0(a, b) = -\langle (a\psi_1 + b\psi_2 + \bar{a}\bar{\psi}_1 + \bar{b}\bar{\psi}_2)^3, a\psi_1 + b\psi_2 \rangle_{\mathbb{C}} \\ B_0(a, b) = \langle (a\psi_1 + b\psi_2 + \bar{a}\bar{\psi}_1 + \bar{b}\bar{\psi}_2)^3, \bar{b}\psi_1 - \bar{a}\psi_2 \rangle_{\mathbb{C}} \end{cases}$$

<u>証明.</u> 上に述べたことから明らかである。□

<u>命題3.6.</u> ある $a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対して, $B_0(a, b) \neq 0$ ならば, $\varepsilon \to 0$ のとき $y_0 = \mathrm{Re}(a\psi_1 + b\psi_2)$ 方向へ漸近する分岐解の族は存在しない。

<u>証明.</u> 定理3.2よりあきらかである。□

<u>系.</u> すべての $a, b \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ に対して, $B_0(a,b) \neq 0$ ならば $(0, \lambda_0, \mu_0)$ は分岐点ではない。

命題3.6. の逆は必ずしも真でないことに注意する.

さて, $B_0(a,b) = 0$ をみたす (a,b) が少くとも2つ存在することを証明しよう。計算により,

$$
\begin{aligned}
B_0(a,b) &= \langle (a\psi_1 + b\psi_2 + \bar{a}\bar{\psi}_1 + \bar{b}\bar{\psi}_2)^3, \bar{b}\psi_1 - \bar{a}\psi_2 \rangle_{\mathbb{C}} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_\Omega (a\psi_1 + b\psi_2 + \bar{a}\bar{\psi}_1 + \bar{b}\bar{\psi}_2)^3 (b\bar{\psi}_1 - a\bar{\psi}_2)\, dx\, ds \\
&= 3a^2\left(-|a|^2\int\varphi_1^3\varphi_2 + |b|^2\int\varphi_1^3\varphi_2 - 2|b|^2\int\varphi_1\varphi_2^3\right) \\
&\quad + 3ab\left(|a|^2\int\varphi_1^4 - |b|^2\int\varphi_2^4 - 2|a|^2\int\varphi_1^2\varphi_2^2 + 2|b|^2\int\varphi_1^2\varphi_2^2\right) \\
&\quad + 3b^2\left(-|a|^2\int\varphi_1\varphi_2^3 + |b|^2\int\varphi_1\varphi_2^3 + 2|a|^2\int\varphi_1^3\varphi_2\right) \\
&\quad - 3a^3\bar{b}\int\varphi_1^2\varphi_2^2 + 3\bar{a}b^3\int\varphi_1^2\varphi_2^2.
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

記号を簡単にするため, 各積分値を次のようにおく:

$$
A = \int\varphi_1^4, \quad B = \int\varphi_1^3\varphi_2, \quad C = \int\varphi_1^2\varphi_2^2, \quad D = \int\varphi_1\varphi_2^3, \quad E = \int\varphi_2^4. \tag{3.26}
$$

この記号を用いれば, (3.25) は次のように表される:

$$
\left\{
\begin{aligned}
B_0(a,b) = {} & 3a^2(-|a|^2B + |b|^2B - 2|b|^2D) \\
& + 3ab(|a|^2A - |b|^2E - 2|a|^2C + 2|b|^2C) \\
& + 3b^2(-|a|^2D + |b|^2D + 2|a|^2B) \\
& - 3a^3\bar{b}C + 3\bar{a}b^3C, \\
& a, b \in \mathbb{C}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1.
\end{aligned}
\right.
\tag{3.27}
$$

我々は, 分岐解が存在するための必要条件として, (3.27)を

みたす複素数の組(a,b)をさがそう。(i) $D\neq 0$, (ii) $B\neq 0$, (iii) $B=D=0$ の3つの場合に分けて考える。

(i) $D\neq 0$. このとき, $B_0(a,b)=0$ ならば $a\neq 0$. (3.27)において,

(3.28) $$b=ka, \quad k\in\mathbb{C}, \quad a\neq 0$$

とおくと, 次の式をえる:

(3.29) $$\begin{aligned} B_0(a,ka) = 3a^2|a|^2\{&(-\bar{B}+|k|^2B-2|k|^2D) \\ &+k(A-|k|^2E-2\bar{C}+2|k|^2C) \\ &+k^2(-\bar{D}+|k|^2D+2B) \\ &-\bar{k}\bar{C}+k^3C\}. \end{aligned}$$

さて, 写像 $f_a:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ を

(3.30) $$f_a(k)=B_0(a,ka), \quad a\neq 0 \text{ は任意に固定},$$

により定義し, 充分大きい $R>0$ に対して, $D_R=\{k\in\mathbb{C}\mid |k|\leqq R\}$ 上, $0\in\mathbb{C}$ に対する写像度 $\deg(f_a,D_R,0)$ を考える。写像 f_a は, $f(k)=k^2|k|^2$ により定義される写像 f に homotopic であるから,

(3.31) $$\deg(f_a,D_R,0)=\deg(f,D_R,0)=2, \quad \forall a\neq 0.$$

ところで命題3.5から, 写像 $\beta_{a,\varepsilon}:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ を

(3.32) $$\beta_{a,\varepsilon}(k)=\frac{1}{\varepsilon^2}\tilde{\beta}(a,ka,\varepsilon), \quad a\neq 0, \ 0\leqq\varepsilon\leqq\varepsilon_0$$

により定義すれば, $\beta_{a,\varepsilon}$ は $f_a=\beta_{a,0}$ に homotopic であるから,

(3.33) $$\deg(\beta_{a,\varepsilon},D_R,0)=\deg(f_a,D_R,0), \quad a\neq 0, \ 0\leqq\varepsilon\leqq\varepsilon_0.$$

よって，(3.31)，(3.32) から

(3.34) $\deg(\beta_{a,\varepsilon}, D_R, 0) = 2, \quad \forall a \neq 0, \quad 0 \leqq \varepsilon \leqq \varepsilon_0$.

したがって，写像度の性質により，$\tilde{\beta}(a, ka, \varepsilon) = 0$ は、任意の $a \neq 0$ および任意の ε，$0 \leqq \varepsilon \leqq \varepsilon_0$ に対して少くとも２つの解 k_1, k_2 をもつ．よって命題3.4(4)で与えた $\tilde{\beta}$ の性質を考慮すれば，$\tilde{\beta}(a, b, \varepsilon) = 0$ は，$0 \leqq \varepsilon \leqq \varepsilon_0$ および $\{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta| = 1\}$ によってparametrizeされる２つの解の族をもつことがわかる。

(ii) $B \neq 0$．このとき $B_0(a, b) = 0$ ならば $b \neq 0$．

(3.35) $a = \ell b, \quad \ell \in \mathbb{C}, \quad b \neq 0$

とおくと，

(3.36)
$$\begin{aligned} B_0(\ell b, b) = 3\ell^2|b|^2\{ & \ell^2(-|\ell|^2 B + B - 2D) \\ & + \ell(|\ell|^2 A - E - 2|\ell|^2 C + 2C) \\ & + (-|\ell|^2 D + D + 2|\ell|^2 C + 2C) \\ & - \ell^3 C + \bar{\ell} C\}. \end{aligned}$$

写像 $g_b : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を

(3.37) $g_b(\ell) = B_0(\ell b, b)$，$b \neq 0$ は任意に固定，

により定義すると，

(3.38) $\deg(g_b, D_R, 0) = \deg(g, D_R, 0) = 2$，

ここで写像 g は $g(\ell) = \ell^2|\ell|^2$ により定義されるものである。

さて(i)と同様に，写像 $\beta_{b,\varepsilon} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を

(3.39) $\beta_{b,\varepsilon}(\ell) = \dfrac{1}{\varepsilon^2}\tilde{\beta}(\ell b, b, \varepsilon)$，$b \neq 0$，$0 \leqq \varepsilon \leqq \varepsilon_0$

により定義すれば，$\beta_{\ell,0} = g_\ell$ であり，

(3.40) $\deg(\beta_{\ell,\varepsilon}, D_R, 0) = \deg(g_\ell, D_R, 0)$，$\ell \neq 0$，$0 \leqq \varepsilon \leqq \varepsilon_0$

が，写像度のhomotopy性質により得られる．したがって，

(3.41) $\deg(\beta_{\ell,\varepsilon}, D_R, 0) = 2$，$\forall \ell \neq 0$，$0 \leqq \varepsilon \leqq \varepsilon_0$．

このことから，(i)と同じ結論が得られることがわかる。

(iii) $B = D = 0$．このとき(3.27)は次の形になる：

(3.42) $$B_0(a, \ell) = 3a\ell(|a|^2A - |\ell|^2E - 2|a|^2C + 2|\ell|^2C) - 3a^3\bar{\ell} + 3\bar{a}\ell^3C,$$

また(3.30)，(3.37) は次のように表される．

(3.43) $$f_a(k) = B_0(a, ka) = 3a^2|a|^2\{k(A - |k|^2E - 2C + 2|k|^2C) - \bar{k}C + k^3C\}$$

(3.44) $$g_\ell(l) = B_0(l\ell, \ell) = 3\ell^2|\ell|^2\{l(|l|^2A - E - 2|l|^2C + 2C) - l^3C + \bar{l}C\}$$

我々は，$S^3 = \{(a, \ell) \in \mathbb{C} \mid |a|^2 + |\ell|^2 = 1\}$ とおき，$\deg_{S_i}(B_0, S^3, 0)$ を計算しよう。ここで，もし $\{(0, \ell) \mid |\ell| = 1\}$ の充分小さい近傍 $U_0 = \{(a, \ell) \in S^3 \mid |a| \leqq \delta\}$ がとれて，$B_0(\partial U_0) \neq 0$ をみたすとすれば，$\deg_{S_i}(B_0, S^3, 0)$ は

(3.45) $$\deg_{S_i}(B_0, S^3, 0) = \deg_{S_i}(B_0, S^3 \setminus U_0, 0) + \deg_{S_i}(B_0, U_0, 0) = \deg(f_a, D_R, 0) + \deg(g_\ell, D_\delta, 0),$$

R は充分大，δ は充分小，

によって与えられるものである。さて，D_R の半径Rを充分大

さくとるとき，(3.43)の形から，

(3.46) $f_a(k) \sim k|k|^2(2C-E)+k^3C$, on D_R over 0.

またD_δの半径$\delta\,(\approx\frac{1}{R})$を充分小さくとるとき，(3.44)の形から，

(3.47) $g_b(l) \sim l(2C-E)+\bar{l}C$, on D_ε over 0,

であることがわかる。したがって，(3.46)，(3.47)を(3.45)に適用すれば，

(3.48)
$$\deg_{S_1}(B_0, S^3, 0)$$
$$= \deg(k|k|^2(2C-E)+k^3C, D_R, 0) + \deg(l(2C-E)+\bar{l}C, D_\varepsilon, 0)$$

をえる。

以上と全く同様にして，充分小さいδに対して，

$\{(a,0)\,|\,|a|=1\}$の近傍$V_0=\{(a,b)\in S^3\,|\,|b|\leqq\delta\}$で$B_0(\partial V_0)\neq 0$をみたすものがとれるとき，

(3.49)
$$\deg_{S_1}(B_0, S^3, 0) = \deg_{S_1}(B_0, S^3\setminus V_0, 0) + \deg_{S_1}(B_0, V_0, 0)$$
$$= \deg(g_b, D_R, 0) + \deg(f_a, D_\delta, 0)$$

をえる。ここで

(3.50) $f_a(k) \sim k(A-2C)-\bar{k}C$, on D_δ over 0

(3.51) $g_b(l) \sim l|l|^2(A-2C)-l^3C$ on$_R$ over 0

を用いれば，

(3.52)
$$\deg_{S_1}(B_0, S_3, 0)$$
$$= \deg(k(A-2C)-\bar{k}C, D_\delta, 0) + \deg(l|l|^2(A-2C)-l^3C, D_R, 0)$$

を得る。

さて仮定(A.2)と(3.26)により，

(iii.1) $C \neq A \neq 3C$ または (iii.2) $C \neq E \neq 3C$

がなりたつ．まず(iii.1)がなりたつとする．このとき，

$|A-2C| \neq C$である．

(iii.1.1) $|A-2C|>C$. このとき，

(3.53) $$|k(A-2C)| > t|\bar{k}C|, \quad 0 \leqq t \leqq 1$$

(3.54) $$|l|l|^2(A-2C)| > t|l^3C|, \quad 0 \leqq t \leqq 1$$

がなりたつから，

(3.55) $$k(A-2C)-\bar{k}C \sim k(A-2C), \quad \text{on } D_\varepsilon \text{ over } 0,$$

(3.56) $$l|l|^2(A-2C)-l^3C \sim l|l|^2(A-2C), \quad \text{on } D_R \text{ over } 0,$$

したがって，(3.52)は計算される．(3.55)，(3.56)により，

(3.57) $$\begin{aligned} &\deg_{S_i}(B_0, S^3, 0) \\ &= \deg(k(A-2C), D_\delta, 0) + \deg(l|l|^2(A-2C), D_R, 0) \\ &= 1+1=2. \end{aligned}$$

(iii.1.2) $|A-2C|<C$. このとき，

(3.58) $$|\bar{k}C| > t|k(A-2C)|, \quad 0 \leqq t \leqq 1$$

(3.59) $$|l^3C| > t|l|l|^2(A-2C)|, \quad 0 \leqq t \leqq 1,$$

がなりたつから，

(3.60) $$k(A-2C)-\bar{k}C \sim -\bar{k}C, \quad \text{on } D_\varepsilon \text{ over } 0$$

(3.61) $$l|l|^2(A-2C)-l^3C \sim -l^3C, \quad \text{on } D_R \text{ over } 0$$

したがって，(3.52)は，(3.60)，(3.61)を用いて計算される：

(3.62) $$\deg_{S_1}(B_0, S_3, 0) = \deg(-\bar{k}C, D_\varepsilon, 0) + \deg(-\ell^3 C, D_R, 0) = -1 + 3 = 2.$$

最後に(iii,2)がなりたつときは，$|E-2C| \neq E$がなりたつ．

(iii,2.1) $|E-2C| > C$． このとき，(iii,1.1)と同様にして，(3.48)を計算できる．

(3.63) $$\deg_{S_1}(B_0, S^3, 0) = \deg(k|k|^2(2C-E), D_R, 0) + \deg(\ell(2C-E), D_\varepsilon, 0) = 1 + 1 = 2.$$

(iii,2.2) $|E-2C| < C$． このとき，(iii,1.2)と同様にして，(3.48)を計算できる。

(3.64) $$\deg_{S_1}(B_0, S^3, 0) = \deg(k^3 C, D_R, 0) + \deg(\bar{\ell} C, D_\varepsilon, 0) = 3 - 1 = 2.$$

さて，写像$\beta_\varepsilon : S^3 \longrightarrow \mathbb{C}$を，

(3.65) $$\beta_\varepsilon(a, \ell) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon^2}\hat{\beta}(a, \ell, \varepsilon), & 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 \\ B_0(a, \ell), & \varepsilon = 0 \end{cases}$$

により定義する．このとき(i)の後半の議論と同様にして，

(3.66) $$\deg_{S_1}(\beta_\varepsilon, S^3, 0) = \deg_{S_1}(B_0, S^3, 0) = 2$$

を得るから，degreeの性質により，$0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$に対して，$B_0(a, \ell) = 0$の解からのcontinuationが可能である。したがって，(iii)の場合も(i)と同様の結果がえられる。

以上により，定理1.4の証明は完結した。□

REFERENCES

[1] M. G. Crandall and P. H. Rabinowitz, the Hopf bifurcation theorem in infinite dimentions, Arch. Rational Mech. Anal., **67**(1977), 53-72.

[2] M. Golubitsky and J. Guckenheimer, Multiparameter bifurcation theory, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.

[3] M. Golubitsky and D. Schaeffer, Bifurcation with O(3) symmmetry including application to the Benard problem, Comm. Pure Appl. Math., **35**(1982), 81-111.

[4] J. Hale, Theory of functional differentioal equations, Springer, New york-Heidelberg-Berlin, 1977.

[5] G. Iooss and D. Joseph, Elementary stability and bifurcation theory, Springer, New York-Heidelberg-Berlin,1980.

[6] J. Ize, Bifurcation theory for Fredholm operators, Memoirs Amer. Math. Soc. **174**, 1976.

[7] J. Ize, Periodic solutions of nonlinear parabolic equations, Comm. Partial Differntial Equations, **4**(1979), 1299-1387.

[8] T. Kato, Perturbation theory for linear operators, Springer, Berlin, 1966.

[9] J. Marsden and M. McCracken, The Hopf bifurcation and its applications, Springer, New York, 1976.

[10] Y. Morita, Destabilization of periodic solutions arizing in delay-diffusion systems in several space dimensions, Japan J. Apll. Math.,**1**(1984), 39-65.

[11] L. Nirenberg, Topics in nonlinear functional analysis, New york Univ. Lecture Notes, 1974.

[12] D. H. Sattinger, Topics in stability and bifurcation theory, Lecture Note in Math.,**309**, Springer, New York, 1972.

[13] D. Schaeffer and M. Golubitsky, Bifurcation analysis near a double eigenvalue of a model chemical reaction, Arch. Rational Mech. Anal.,**75**(1981).

[14] J. T. Schwartz, Nonlinear functional analysis, Gordon and Breach, New York, 1969.

[15] S. D. Taliaferro, Bifurcation at multiple eigenvalues and stability of bifurcating solutions, J. Funct. Anal.,**55**(1984), 247-275.

[16] Y. Yamada and Y. Niikura, Bifurcation of periodic solutions for nonlinear parabolic equations with infinite delays, to appear in Funkcial. Ekvac..

[17] K. Yoshida, The Hopf bifurcation and stability for semilinear diffusion equations with time delay arising in ecology, Hiroshima Math. J.,**12**(1982),312-348.