数理解析研究所講究録
第605巻 1987年 25-36

閉測地線の無限存在について

名大理数　四方義啓 (YOSHIHIRO SHIKATA)

I　球面上の種々の計量に対して、一般には変化するであろう閉測地線のカズをカゾえるという問題はすでにポアンカレによって意識されていたと言われる。モースはこの問題のために有名なモース理論を展開し、有限次元の場合にかぎってではあるが多様体に対する特異点をタイプナンバーとの関係を確立することになった。もとよりモース自身はその理論を球面上の閉曲線全体のなす無限次元空間を、その上に定義された長サによる関数に対して応用することを考えていたので、これはモース自身にとっては不本意な結果であったかもしれない。がしかし、仮に無限次元の場合にその理論が拡張されていたとしても、当時の技術でもってしてはその応用は不可能であったろう　というのは、球面上の閉曲線の全体のなす空間のホモロジーが有効な形で計算されるためには、尚　セール、サリバンを待たねばならなかったから

である。一方無限次元の困難を逃れるために閉曲線の空間を有限近似することがザイフェルト，アルバー，フィエット等によって行なわれ，少なくとも一個の測地線にコンパクトリーマン多様体上に存在するという形の結果が得られ始めた。しかしこの方向で，一個以上の測地線の存在を示すのは至難であった。実は以下すべての方法についての共通の困難となるのであるが，それはホモロジー等の位相的な手段によって如何にして多重測地線を除外してカゾえるかという点である。すなわち，ある測地線$\alpha=\alpha(t)$に対して同じ測地線をn倍の速度で走ったもの$\alpha^n(t)=\alpha(nt)$はまた測地線であり，長サ関数の特異点になる。従って特異点のカズだけをカゾえるときは幾何的に同一であるこれら多重測地線が何度もカゾえられて測地線の正しいカズがカゾえられないのである。

扨，スメイル等によってモースの理論の無限次元化が図られ，エリアソン等はX上の道の空間ΛX（とホモトピー的には同一とみなせる空間）とその上で定義されたある関数Eとに対してそれが適用可能であることを見出した。この関数Eはエネルギー関数と呼ばれその特異点が測地線に一致し，又，k回まわりの道に対し$E(\alpha^k)=k^2E(\alpha)$となるという性質を有している。これによってk次元ホモロジー

元に対し、指数がkであるような測地線が対応することになり測地線論は一つの転回点を迎えた。(注) とはいえ、多重測地線の困難は依然残っていたので、ボット及びグロモルとマイヤーは測地線αとα^nとの指数の関係に注目した。そしてα^n $(n=2,3,4\cdots)$の指数に対応してくるはずの次元のホモロジー元を除外していけば、その残りのホモロジーには幾何学的に本当に異った測地線が対応するであろうと考えたのである。ボットはむしろ指数関係そのものを整えることに重点をおき、すべての測地線が双曲型であるという強い仮定の下に理論をすゝめた。一方、グロモルとマイヤーはきれいな指数関係を諦らめ、その代りに一般の測地線についても成立するような形でそれを拡張した。こうして上のアイデアに従って真に異る測地線を得ようとするとき、実に多くのホモロジー元が必要になることに気ずく。これをホモロジー元の形のまゝである種の対称空間の上の道の空間において解決できたのは、サリバンの方法によってこの種の道の空間のホモロジーが有効に計算できるようになってからであった。一方ボットは、ホモロジーより同変K理論の方が双曲型測地線の場合には有利なことに気づき、その方向からの理論構成を行った。

しかしながら、以上どの方法もこの時点では本来の問題

である球面の場合には有効に作用せず，この場合は依然，問題として残された。

そこでクリンゲンベルグは，あるホモロジー元が閉測地線に対して特別な働きをもつことに気づき，それによってこの困難を打開しようとした。そして一連の著書や論文の中で，球面上には無限個の真に異なる測地線が存在すると主張した。しかしながら，理論の展開に非常な無理や多くの疑問点が存在していた。それどころか，カトックによって，クリンゲンベルクの理論によっては無数に閉測地線が存在するはずの2次元球面上に，フィンスラー計量と呼ばれるある種の計量が存在し，その測地線が有限個でしかあり得ないことが示されたのである。（但しこれは計量の種類が異なるので正確な意味での反例ではない）

これと相前後して，ボットの方法にも存在した疑問点がヒングステンによって解消され，すべての測地線が双曲型であるという仮定をおけば，それが球面上に無限個存在するという形での一つの弱い解が得られた。

Ⅱ　このような状況ではあったが，クリンゲンベルグのアイデアには真の閉測地線問題解決への一つの重要な鍵が含まれていたことは見逃せない。それが可除性補題で

ある. この補題の証明は, 実は与えられなかったので, クリンゲンベルグの予想というべきでもあろうが, その主張するところは, m重の(ある)測地線α^mが指数kの特異点になっているとき 指数$k+1$を有するl重の測地線β^lが存在して lがmを整除するというものである. 以下便宜上m重測地線になるような特異点を多重度mの頂点型特異点ということにする. これだけではクリンゲンベルグの意図は必ずしも明らかではないが, この補題が正しいものとして, 提出された測地線の無限存在の証明の手続きをみるとき, 従来のように特異点をその指数とエネルギーのみによって分類するのではなく, それにもう一つの特異点を併せて考え, それらの指数及びエネルギーによって特異点を分類しようというアイデアが明らかになる. すなわち, 適当なホモロジー条件によって各$ai+b$次元(a, bは定数, $i=0, 1, 2 \cdots$)にその指数を持つ頂点型特異点C_iがとれるものとする. このとき この特異点に対して, 新しい頂点型特異点C_i'が整除性をみたすようにとれるというのが可除性補題であるが, 今仮にC_i, C_i'が不等式

$$E(C_0) < E(C_0') < E(C_1) < E(C_1') < \cdots$$

をみたしていたとすれば, グロモルとマイヤーの指数定理より直に, 1重の測地線が無限個存在することが示される.

実際 仮にそれが有限個しかないとして それらを $\alpha_1 \cdots \alpha_N$ とおき

$$C_i = \alpha_l^{m_i} \qquad (\alpha_l \text{ は 1 重測地線})$$
$$C_i' = \alpha_{l'}^{m_i'}$$

とするとき $N+1$ 個の特異点 $C_k \cdots C_{k+N+1}$ に対してはある C_i', C_j' $(i<j)$ は同じ 1 重測地線 α の m_i', m_j' 重である．よって

$$E(\alpha^{m_i'}) < E(\beta^{m_j}) < E(\alpha^{m_j'}) \text{，ここで}$$

α, β は $\alpha_1 \ldots \alpha_N$ のうちどれかであり．可除性補題より

$$m_j = q\, m_j' \quad (q \in \mathbb{Z}) \qquad \text{である．}$$

書き直せば

$$(m_i')^2 E(\alpha) < q^2 (m_j')^2 E(\beta) < (m_j')^2 E(\alpha)$$

$$\therefore \quad \left({m_i'}/{m_j'} \right)^2 < q^2 \; E(\beta)/E(\alpha) < 1$$

所が k を大きくすれば グロモル．マイヤーの指数定理より m_j'/n_i' は 1 に収束し $E(\beta)/E(\alpha)$ の可能性は高々有限個であるから q が整数ではありえなくなって矛盾というわけである． 従って．ポアンカレ以来の測地線無限存在問題は可除性補題にすべて帰着されるわけであるが．この証明に関してクリンゲンベルグは少々素朴でありすぎたようである．

たしかに，頂点型特異点 c が，ホモロジー類 w に対応するとき w が同次元の非零境界に埋めこめるものならば，すなわち，

$$w \subset \partial w' \quad (w' \neq 0)$$

ならば，w' の中に c' が含まれるであろうことはすぐに予想できるし，道の空間では道の反転 ϑ に対してサリバン类はホモロジーとして

$$w + \vartheta w = 0,\ 即ち\ w + \vartheta w = \partial w'$$

であることがわかっている。また，更に，一般に特異点に対して境界が定義されて，特に頂点型特異点 c, c' に対して

$$c \in \partial c'$$

ならば c' の多重度 m' は c のそれを割り切るということも見易い。ところで，この型のモース理論では，すべての特異点が頂点型であることはありえないし，その上

$$\begin{array}{ccc} w & \subset & \partial w' \\ \cup & & \cup \\ c & & \partial c' \end{array}$$

から $c \in \partial c'$ は一般にはえられない。もしこれらがうまく成立しているならば，可除性補題は困難なしに証明できるはずではあるが，現実にはカトックの例にみるようにそうはいかないし，更に悪いことには，可除性補題で作られ

る特異点 c' のエネルギーの状態が先に示した無限存在の証明に使える程には明らかではない.

すなわち, 先の不等式

$$\cdots E(c_i) < E(c_i') < E(c_{i+1}) < E(c_{i+1}') \cdots$$

を常にみたすように 頂点型特異点 c_i, c_i' の列を作るのは実は容易ではないのである. それ所か, 不可能に近いが, この欠陥の比重は可除性補題の証明の欠陥に比して軽いものであった.

III　　可除性補題の修正証明, というより, クリンゲンベルグの予想の証明は, 文献[S-K]にみられるようにある部分では クリンゲンベルグ自身のいう可除性補題より強い主張に対しある部分ではそれより弱い主張に対して行われた. 強化した部分は, 元の主張がある特別な系列の頂点型特異点 c に対してのみ行なわれていたのに対して, あるホモロジー条件の下にではあるが, 勝手な頂点型特異点 c に対して c' がとれるとした点である. ここでこのホモロジー条件とは, 例えば

$$\dim H_k(\Lambda X, Z) = 0 \text{ or } 1$$

であり, X が球面の場合には, シュヴァルツによってこうな

ることが分っている．一方，弱くなった部分は，クリンゲンベルクのそれが，新しい特異点c'の指数は必ずcのそれより一つ多いとしたのに比して，一つ多いか，一つ少ない又は，二つ少ないの何れかにしかならないという点であり，又，考えている空間ΛXが単連結でなければならないとする点である．実はカトックの例はΛXが1次元ホモトピーを持つ場合に作られており，クリンゲンベルグの言うようにそのフィンスラー性ばかりによって無限測地線を排除しているのではないと考えられる

修正した可除性補題の証明の詳細は文献［S－K］にゆずるが，大筋は次のようである：　まず，ここで使用するモース理論がS^1作用を許すという特殊性を使って，頂点型特異点cに対してサイクル$Z(c)$を構成する．(注)
$Z(c)$が0になる場合が，新しく得られる特異点c'の指数が1つ又は2つ減少してしまう場合である．$Z(c)$が0でなければそれをホモロジーで考える．すると前記ホモロジー条件より，それ自身又は，それに随伴するホモロジーが境界になる．この境界を変形して，それが頂点型特異点のみを含むようにしてしまえば，そのどれかが指数が一つ多い特異点を与えるわけである．この変形にあたってどうしても$\pi_1(\Lambda X)=0$が効いて来てしまうのである．

実は文献[S-K]は第I部であって，そこではある種の仮定の下に上の作業を行った。この仮定を除くのは第II部（以降）になるが，細心にさえ行えばよく，本質的な問題が新たに発生するおそれはない．従って（修正された）可除性補題は充分一般な場合に成立すると考えてよい．かくして最後に，この型の可除性補題の下に真の無限存在を得る部分が残されるわけであるが，この部分は比較的容易であるとはいえ，正式な論文としては未発表なので，念のために現在準備中のものを次に掲げさせて頂く．

なお，この証明は前に引用したクリンゲンベルグの原証明とは全く異っているが，これは可除性補題によって c に対してとれる c' の指数が二つの可能性をもつことにまず起因する．更は，同夜表形によって結局はクリンゲンベルグのいうように c' としては指数が一つ高い場合だけを考えればよいことも証明できるのであるが（one way train）クリンゲンベルグは更にこの c' のとり方に暗黙にではあるが非常に強い条件をつけており，それによってエネルギー不等式を得ているので，ここではカバーし切れなかった．
そこで全く異る行き方をとっているが，この方法は，任意の特異点 c から出発できるという強みをもっているので，注意してみれば，クリンゲンベルグの方法では得られなかった特

異点の分布状態に関する示唆までを含む形で、（2次元を除き）非退化リーマン計量を有する球面上の閉測地線の無限存在を明らかにすることができた。もとより、ホモロジー条件を細かく検討すれば、球面を一般の多様体にまで拡張することも可能であるので、これについては [S-K] の第II部（以降）に取扱う予定である。

[S-K] Y. Shikata - W. Klingenberg. *On a proof of Divisibility Lemma I.* Nagoya. J. Vol. 100. ('85) 65-81.

（その他 文献は クリンゲンベルグの黄表紙 Lectures on closed geodesics に詳しい　）

注

ホモロジーから特異点を得るだけではなく、特異点からホモロジーを得るようにしなければいけない　とは故静間教授の一つの夢であった。その一半が実現でき　更に　この事が、測地線問題解決の大きい鍵となった今、謹しんで、ご冥福を祈る。