

MU-lambda algebra

京大数理研 島田信夫 (Nobuo Shimada)

いわゆる lambda algebra Λ は \mathbb{Z}/p (p : 素数) 上の、
次数つき添加代数で微分作用素は derivation として働くもの (DGA -algebra) であり、Bousfield, Curtis, Kan その他 [4] によ
り導入された。これは Kan 流の方法で、(単体的)球面スペク
トラムの Kan ループ群の降中心列によるフィルターづけから得ら
れた Adams 型スペクトル系列の E_1 -項として、もともと定義
されたものであるが、その後 Steenrod 代数 \mathcal{S} の双対 Hopf 代数
 \mathcal{S}_* から比較的簡単に構成され得ることがわかった。

Λ を特徴づける事として、twisted なテンソル積 [6] $\mathcal{S}_* \otimes \Lambda$
が、いわゆる (normalized) cobar 構成 $\mathcal{S}_* \otimes T(\mathcal{S}_*)$ の商であり、
それ自身、 \mathcal{S}_* -comodule による \mathbb{Z}/p の非輪状入射的分解とし
ては、恐らく極小のものであると考えられる。

爾来、 Λ のホモトピー論への多くの興味ある応用が知られ
ている。[5], [7], [10] 等。

ここでは, MU-(2)ホモロジー論 (複素コホモロジー論) におけるラマダ代数の類似である $1MU$ を導入しよう [18].

§1. Hopf algebroid associated to the MU-homology theory

定義 1.1. 可換環 R 上の Hopf algebroid とは, 次数つき可換な R -代数 A , Γ の組 (A, Γ) から成り, 次の様な R -代数準同型写像:

- $\eta_L: A \rightarrow \Gamma$ (left unit)
- $\eta_R: A \rightarrow \Gamma$ (right unit)
- $\varepsilon: \Gamma \rightarrow A$ (augmentation or counit)
- $\Delta: \Gamma \rightarrow \Gamma \otimes_A \Gamma$ (diagonal or comultiplication)
- $\mu: \Gamma \otimes_A \Gamma \rightarrow \Gamma$ (Γ 自身の可換な積とは別物)
- $c: \Gamma \rightarrow \Gamma$ (conjugation)

が与えられている。 Γ は η_L によって左 A -加群, η_R によって右 A -加群と見做され, $\Gamma \otimes_A \Gamma$ は両側加群のテンソル積を表わす。 Δ と ε は両側 A -加群の射であり, $\varepsilon \eta_L = \varepsilon \eta_R = 1$, $\varepsilon c = \varepsilon$, $c^2 = 1$, $c \eta_L = \eta_R$, $c \eta_R = \eta_L$, また Δ, μ は結合的であり, 次の図式は可換である:

$$\begin{array}{ccccc}
 A \otimes_A \Gamma & \xleftarrow{\cong} & \Gamma & \xrightarrow{\cong} & \Gamma \otimes_A A \\
 & \searrow^{\varepsilon \otimes 1} & \downarrow \Delta & \nearrow_{1 \otimes \varepsilon} & \\
 & & \Gamma \otimes_A \Gamma & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xleftarrow{\varepsilon} & \Gamma & \xrightarrow{\varepsilon} & A \\
 \eta_R \downarrow & & \downarrow \Delta & & \downarrow \eta_L \\
 \Gamma & \xleftarrow{\mu(c \otimes 1)} & \Gamma \otimes_A \Gamma & \xrightarrow{\mu(1 \otimes c)} & \Gamma
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \Gamma & \xrightarrow{\Delta} & \Gamma \otimes_A \Gamma \\
 \downarrow c & & \downarrow c \\
 \Gamma & \xrightarrow{\Delta} & \Gamma \otimes_A \Gamma
 \end{array}$$

$$(c(\gamma \otimes \delta) = (-1)^{\deg \gamma \cdot \deg \delta} c(\delta) \otimes c(\gamma))$$

A は係数環, Γ は cooperation algebra とよばれる. $\eta_L = \eta_R$ の場合は普通の Hopf 代数である. Hopf algebroid の例は, ring-spectrum E に対して $A = \pi_*(E)$, $\Gamma = E_*E = \pi_*(E \wedge E)$ によって与えられる (Adams [2]), ただし Γ は左 A -flat (従って, また右 A -flat) と仮定する. この条件は多くの重要な場合 $E = KO, K, MO, MU, MSp, S, H\mathbb{Z}/p, BP$ 等において満たされている [2], [3].

以下, 特に $E = MU$ の場合を考えよう [3].

良く知られた様は, Hopf algebroid $(A, \Gamma) = (MU_*, MU_*MU)$ において, $A = MU_*$ は多項式環 $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots]$, $\deg x_i = 2i$, に同型であり, $\Gamma = MU_*MU$ は $A \otimes S$ と同型である. ここで $S = \mathbb{Z}[b_1, b_2, \dots]$, $\deg b_i = 2i$, は Landweber-Novikov 作用素代数の dual Hopf algebra で, 多項式環であり, その diagonal は

$$(1.2) \quad \psi(b) = \sum_{i \geq 0} b^{i+1} \otimes b_i$$

で与えられる. ここで $b = 1 + b_1 + b_2 + \dots$, $b_0 = 1$.

$$\eta_L : A \rightarrow \Gamma = A \otimes S, \quad \eta_L(a) = a \otimes 1,$$

$$\varepsilon : \Gamma = A \otimes S \rightarrow A, \quad \varepsilon(1 \otimes s) = 0 \text{ for } \deg s > 0,$$

$$\Delta = 1 \otimes \psi : \Gamma = A \otimes S \rightarrow \Gamma \otimes_A \Gamma = A \otimes S \otimes S,$$

$$\mu = 1 \otimes m : \Gamma \otimes_A \Gamma = A \otimes S \otimes S \rightarrow \Gamma = A \otimes S \quad (m \text{ は } S \text{ の積}),$$

等が成り立つ。

diagonal (1.2) は具体的に、

$$\Psi(b_1) = b_1 \otimes 1 + 1 \otimes b_1, \quad \Psi(b_2) = b_2 \otimes 1 + 2b_1 \otimes b_1 + 1 \otimes b_2,$$

$$\Psi(b_3) = b_3 \otimes 1 + (2b_2 + b_1^2) \otimes b_1 + 3b_1 \otimes b_2 + 1 \otimes b_3, \quad \text{etc.}$$

を表わす。

S における primitive な元として $b_1, b_2 - b_1^2$ が見つかるが、
これらを S の生成元として組み入れる様な変数変換を施すが
が以下の目的に対して便利である。

それは

$$(1.3) \quad \Delta = 2 - b^{-1},$$

$$\Delta = 1 + \Delta_1 + \Delta_2 + \dots, \quad \Delta_0 = 1,$$

とおく。このとき

$$(1.4) \quad 2b = 1 + bs,$$

$$b_k = \sum_{i=0}^{k-1} b_i \Delta_{k-i} \quad (k \geq 1)$$

であり、帰納的に b_k は Δ_i の多項式として表わされ、逆も
成立する、例えば：

$$b = \frac{1}{2-\Delta} = \frac{1}{1-(\Delta-1)} = \sum_{n \geq 0} \bar{\Delta}^n, \quad \bar{\Delta} = \Delta - 1,$$

(1.5)

$$b_1 = \Delta_1, \quad b_2 = \Delta_2 + \Delta_1^2, \quad b_3 = \Delta_3 + 2\Delta_1\Delta_2 + \Delta_1^3,$$

$$b_4 = \Delta_4 + 2\Delta_1\Delta_3 + 3\Delta_1^2\Delta_2 + \Delta_2^2 + \Delta_1^4, \quad \text{etc.}$$

補題 1.6.

$$S = \mathbb{Z}[\Delta_1, \Delta_2, \dots], \quad \deg \Delta_i = 2i,$$

$$\Psi(\Delta) = \Delta \otimes 1 + \sum_{i \geq 1} b^{i-1} \otimes \Delta_i.$$

より具体的に

$$\begin{aligned}
 (1.7) \quad \psi(A_1) &= A_1 \otimes 1 + 1 \otimes A_1 \\
 \psi(A_2) &= A_2 \otimes 1 + 1 \otimes A_2 \\
 \psi(A_3) &= A_3 \otimes 1 + 1 \otimes A_3 + A_1 \otimes A_2 \\
 \psi(A_4) &= A_4 \otimes 1 + 1 \otimes A_4 + (A_2 + A_1^2) \otimes A_2 + 2A_1 \otimes A_3, \text{ etc.}
 \end{aligned}$$

証明. $\psi(b^{-1}) = \psi(b)^{-1} = b^{-1} \otimes 1 - \sum_{j \geq 1} b^{j-1} \otimes A_j$

と (1.3), (1.4) から

$$\psi(A) = 2(1 \otimes 1) - \psi(b^{-1}) = A \otimes 1 + \sum b^{i-1} \otimes A_j$$

§2. DGA-algebra Λ^S .

整数環 \mathbb{Z} 上の Hopf 代数 $S = \mathbb{Z}[A_1, A_2, \dots]$ における生成元 A_i ($i \geq 1$) のうち primitive なものは A_1 と A_2 のみである。 A_1 と A_2 によって生成された S の部分 Hopf 代数を $S_2 = \mathbb{Z}[A_1, A_2]$ とする。 $\rho: S \rightarrow S_2$ を標準的射影, また $\varepsilon: S$ (または S_2) $\rightarrow \mathbb{Z}$ を添加写像とし, その核 $\text{Ker } \varepsilon$ を, それぞれ, \bar{S}, \bar{S}_2 で表す。 簡単なため次の記号を用いる:

$$(2.1) \quad L = S_2, \quad \bar{L} = \bar{S}_2, \quad \bar{S} = \text{Ker } \varepsilon$$

$$\theta: S \xrightarrow{\rho} S_2 \xrightarrow{\iota} \bar{L}, \quad \theta = (1 - \varepsilon) \circ \rho \text{ 線形写像,}$$

$$\theta(A_k \text{ (} k \geq 3 \text{)を含む monomial}) = 0$$

$$\theta(A_1^i A_2^j) = \lambda_{ij} = [A_1^i A_2^j] \text{ in } \bar{L} = \bar{S}_2 \text{ (} i, j \geq 0, i+j > 0 \text{)}$$

$$\theta(1) = 0$$

従って \bar{L} は $\{\lambda_0, \lambda_2, \lambda_{01}, \lambda_{11}, \dots, \lambda_{ij}, \dots\}$ を生成系とする自由アーベル群 (free \mathbb{Z} -module) と考える。 \bar{L} は

$$(2.2) \quad \text{bideg } \lambda_{ij} = (1, 2i+9j)$$

によって bigraded となる。 $T(\bar{L})$ を \bar{L} で生成されたテンソル代数, つまり,

$$T(\bar{L}) = \mathbb{Z} + \bar{L} + \bar{L} \otimes \bar{L} + \bar{L} \otimes \bar{L} \otimes \bar{L} + \dots$$

とする。 また線形写像 $\theta \vee \theta: S \rightarrow \bar{L} \otimes \bar{L} \subset T(\bar{L})$ を

$$(2.3) \quad \theta \vee \theta = (\theta \otimes \theta) \circ \psi$$

によって定義する。

定義-命題 2.4. テンソル代数 $T(\bar{L})$ の商環

$$\Lambda^S = T(\bar{L}) / I$$

を定義しよう, ここで I は, $\text{Ker } \theta$ の $\theta \vee \theta$ -像 $\theta \vee \theta(\text{Ker } \theta)$ によって生成された両側イデアルを表わす。これは \mathbb{Z} 上の DGA-algebra (differential, bigraded, augmented) であって, その微分作用素 d は Λ^S の derivation であって, $d\theta = -\theta \vee \theta$ の関係を満足する。

この定義が well-defined であることを示すため, 先づ, 線形写像

$$(2.5) \quad \iota: \bar{L} \rightarrow S, \quad \iota(\lambda_{ij}) = \lambda_i^1 \lambda_j^2, \quad \text{および}$$

$$d = -(\theta \vee \theta) \circ \iota: \bar{L} \rightarrow \bar{L} \otimes \bar{L} \subset T(\bar{L})$$

を定義する。 $d \in T(\bar{L})$ 上に derivation として拡張すれば,

$d(I) \subset I$ および $d \circ d \equiv 0 \pmod{I}$ が成り立つ。実際,

$$\begin{aligned} d(\theta \cup \theta) &= d\theta \cup \theta - \theta \cup d\theta = -\{(\theta \cup \theta) \circ 2\theta\} \cup \theta + \theta \cup \{(\theta \cup \theta) \circ 2\theta\} \\ &= \{(\theta \cup \theta) \circ (1-2\theta)\} \cup \theta - (\theta \cup \theta) \cup \theta - \theta \cup \{(\theta \cup \theta) \circ (1-2\theta)\} + \theta \cup (\theta \cup \theta) \\ &\equiv 0 \pmod{I}. \end{aligned}$$

従って, Λ^S は, 単位元 1 をもち, $\{\lambda_{ij}; i, j \geq 0, i+j > 0\}$ によって生成された \mathbb{Z} 上の DGA-algebra である。生成元 λ_{ij} の間の関係式は次の様にして得られる: 先づ基本関係

$$(2.6) \quad R_k = \theta \cup \theta (\Delta_k) = \sum_{i+j=k-2} \binom{i+j}{i} \lambda_{ij} \cdot \lambda_{01} = 0$$

があり, より一般に

$$\left(\begin{array}{l} i, j \geq 0, k \geq 3, \text{ } \circ \text{ はテンソル積から導} \\ \text{かれた } \Lambda^S \text{ における積を表わす.} \\ \binom{i+j}{i} \text{ は二項係数} \end{array} \right)$$

$$(2.7) \quad D_1^i D_2^j (R_{k_1} * \dots * R_{k_p}) = \theta \cup \theta (\Delta_1^i \Delta_2^j \Delta_{k_1} \dots \Delta_{k_p}) = 0$$

$$(i, j \geq 0, 3 \leq k_1 \leq \dots \leq k_p).$$

がある, これらからすべての関係式が生成される(つまり, 両側イデアール I の生成系として $\{D_1^i D_2^j (R_{k_1} * \dots * R_{k_p})\}$ がとれる)。

ここで (2.7) における記号を説明しよう。 $D_1: T(L) \rightarrow T(L)$ および $D_2: T(L) \rightarrow T(L)$ は共に derivation として

$$(2.8) \quad D_1(\lambda_{ij}) = \lambda_{i+1, j}, \quad D_2(\lambda_{ij}) = \lambda_{i, j+1}$$

によって定義され, $D_1(I) \subset I$, $D_2(I) \subset I$ の性質をもつものである。また $*$: $(L \otimes L) \otimes (L \otimes L) \rightarrow L \otimes L$ は,

$$(2.9) \quad (\lambda_{ij} e_i) * (\lambda_{k_2} e_{k_2}) = \lambda_{i+k_2, j+l_2} \cdot \lambda_{k_2, l_2}$$

を線形写像として拡張したもので、 $\bar{L} \otimes \bar{L}$ における可換な積を与え、 $I_{(2)} * I_{(2)} \subset I_{(2)}$ が成り立つ ($I_{(2)} = \theta \cup \theta(\text{Ker } \theta) = I \cap (\bar{L} \otimes \bar{L})$)。

そこで、関係式的具体例を挙げておこう：簡単のため、 $(ijkl) = \lambda_{ij} \cdot \lambda_{kl}$ の記号を用いる。

$$(2.10) \quad \begin{aligned} R_3 &= (1001), \quad R_4 = (2001) + \underline{(0101)}, \\ D_1 R_3 &= (2001) + \underline{(1011)} \\ \\ R_5 &= (3001) + 2 \underline{(1101)} \\ D_1 R_4 &= (3001) + (2011) + \underline{(1101)} + \underline{(0111)} \\ D_1^2 R_3 &= (3001) + 2(2011) + (1021) \\ D_2 R_3 &= \underline{(1101)} + (1002) \\ \\ R_6 &= (4001) + 3 \underline{(2101)} + \underline{(0201)} \\ D_1 R_5 &= (4001) + (3011) + 2 \underline{(2101)} + 2 \underline{(1111)} \\ D_2 R_4 &= \underline{(2101)} + (2002) + \underline{(0201)} + (0102) \\ R_3 * R_3 &= (2002) \\ D_1 D_2 R_3 &= \underline{(2101)} + \underline{(1111)} + (2002) + (1012) \\ D_1^3 R_3 &= (4001) + 3(3011) + 3(2021) + (1031) \\ D_1^2 R_4 &= (4001) + 2(3011) + (2021) + \underline{(2101)} + 2 \underline{(1111)} + \underline{(0121)} \\ \\ R_7 &= (5001) + 4 \underline{(3101)} + 3 \underline{(1201)} \\ R_3 * R_4 &= (3002) + (1102) \\ \\ &\vdots \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

(下線の意味は後述)

また differential $d: \Lambda^S \rightarrow \Lambda^S$ は, (2.5) からわかる様に

$$(2.11) \quad d\theta = -\theta \vee \theta$$

の関係も満足する。つまり θ を coalgebra S から algebra Λ^S への線形写像と見るとき, これは E.H. Brown [6] の意味の twisting cochain である。 d は具体的には,

$$(2.12) \quad d\lambda_{ij} = -\sum_{k,l \geq 0} \binom{i}{k} \binom{j}{l} \lambda_{ki} \cdot \lambda_{lk, j-l}$$

で与えられる。

次に Λ^S の加法的構造として

定理 2.13. Λ^S は \mathbb{Z} 上の自由加群である。

この定理の証明のため, 先づ次の補題を準備しよう。

補題 2.14. Hopf algebra $S = \mathbb{Z}[\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots]$ の n 個のテンソル積 $S^{\otimes n} = S \otimes \dots \otimes S$ において,

$$\sum_{i=0}^{n-2} \bar{S}^{\otimes i} \otimes \psi(S) \otimes \bar{S}^{\otimes (n-i-2)} = \sum \bar{S} \otimes \dots \otimes \psi(S) \otimes \dots \otimes \bar{S}$$

は直和因子である。ここで $\bar{S} = \text{Ker } \varepsilon$, ψ は S の diagonal (1.6)。

証明. n に関する帰納法。 $n=2$ のとき,

$$S \xrightleftharpoons[\psi]{\varepsilon \otimes 1} S \otimes S, \quad (\varepsilon \otimes 1) \circ \psi = \text{id}.$$

から $S \otimes S = \psi(S) \oplus (\bar{S} \otimes S)$ (直和分解) がある。 $n=3$ の場合

$$S^{\otimes 3} = \{\psi(S) \oplus (\bar{S} \otimes S)\} \otimes S = (\psi(S) \otimes S) \oplus (\bar{S} \otimes S \otimes S) =$$

$$(\psi(S) \otimes \mathbb{Z}) \oplus (\psi(S) \otimes \bar{S}) \oplus (\bar{S} \otimes \psi(S)) \oplus (\bar{S} \otimes \bar{S} \otimes S)$$

従って $(\psi(S) \otimes \bar{S}) \oplus (\bar{S} \otimes \psi(S))$ は $S^{\otimes 3}$ の直和因子, 以下同様。

この補題における直和因子の $\rho^{\otimes n}: S^{\otimes n} \rightarrow L^{\otimes n}$ ((2.1)参照)による像

$$\rho^{\otimes n}(\sum \bar{s} \otimes \dots \otimes \psi(s) \otimes \dots \otimes \bar{s}) = \sum \bar{l} \otimes \dots \otimes (\rho \psi \rho(s)) \otimes \dots \otimes \bar{l}$$

は、自由加群 $L^{\otimes n} = S_2^{\otimes n}$ の部分加群であるから、それ自身 \mathbb{Z} -free である。一方 $\rho^{\otimes n}$ は全射であるから、

$$(2.15) \quad \sum \bar{l} \otimes \dots \otimes (\rho \psi \rho(s)) \otimes \dots \otimes \bar{l} \text{ は } \sum \bar{s} \otimes \dots \otimes \psi(s) \otimes \dots \otimes \bar{s} \text{ の,} \\ \text{従って } S^{\otimes n} \text{ の直和因子.}$$

一方

$$(2.16) \quad \sum \bar{l} \otimes \dots \otimes (\rho \psi \rho(s)) \otimes \dots \otimes \bar{l} \cap L^{\otimes n} \\ = \sum \bar{l} \otimes \dots \otimes (\rho \psi \rho(\text{ker } \theta)) \otimes \dots \otimes \bar{l}$$

である。従って

$$(2.17) \quad \Lambda_{(n)}^S = \frac{L^{\otimes n}}{\sum \bar{l} \otimes \dots \otimes (\rho \psi \rho(\text{ker } \theta)) \otimes \dots \otimes \bar{l}} \hookrightarrow \frac{L^{\otimes n}}{\sum \bar{l} \otimes \dots \otimes (\rho \psi \rho(s)) \otimes \dots \otimes \bar{l}} \\ \subset \frac{S^{\otimes n}}{\sum \bar{l} \otimes \dots \otimes (\rho \psi \rho(s)) \otimes \dots \otimes \bar{l}}$$

となり、この最後のものは (2.15) により自由 \mathbb{Z} -加群であるから、 Λ^S における長さ n の部分 $\Lambda_{(n)}^S$ も自由 \mathbb{Z} -加群となる。

Λ^S の基については、次のことが予想される。 Λ^S における单项式 $\lambda_{i_1 j_1} \lambda_{i_2 j_2} \dots \lambda_{i_k j_k}$ で条件

$$(2.18) \quad \min(1, j_1) \geq j_2 \geq \dots \geq j_k \geq 0$$

を満足するものを admissible と呼ぶことにする。このとき

予想 2.19. admissible monomials の全体は A^S の基をつくる。

例えば, 表(2.10)において下線を付したものは admissible である。

§3. comodule resolutions

(A, Γ) を Hopf algebroid (§1) とする。

定義 3.1. 左 A -module M と A -map $\Psi_M: M \rightarrow \Gamma \otimes_A M$ が与えら

れて, 条件

$$1) (M \xrightarrow{\Psi_M} \Gamma \otimes_A M \xrightarrow{\varepsilon \otimes 1} M) = \text{id.}$$

2) 次の図式は可換

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\Psi_M} & \Gamma \otimes_A M \\ \Psi_M \downarrow & & \downarrow \Delta \otimes 1 \\ \Gamma \otimes_A M & \xrightarrow{1 \otimes \Psi_M} & \Gamma \otimes_A \Gamma \otimes_A M \end{array}$$

を満足するとき, (M, Ψ_M) を 左 (A, Γ) -comodule, 或いは, 単に M を 左 Γ -comodule という。

例えば A は, $\Psi_A = \eta_L: A \rightarrow \Gamma$ (left unit) によって, A は Γ 自身は $\Psi_\Gamma = \Delta$ によって, 左 Γ -comodule とみなすことができる。

左 Γ -comodule M と N の間の射 (Γ -comodule map) $f: M \rightarrow N$ は Ψ_M, Ψ_N と compatible な A -map として定義される。 M から N への射全体を $\text{Hom}_\Gamma(M, N)$ で表わす。このとき, 例えば

$$(3.2) \quad \text{Hom}_\Gamma(A, N) \cong \{n \in N; \Psi_N(n) = 1 \otimes n\}$$

$$\text{Hom}_\Gamma(A, A) \cong \{a \in A; \eta_L(a) = \eta_R(a)\}$$

$$\text{Hom}_\Gamma(A, \Gamma) = \{f: A \rightarrow \Gamma; f(z) = \gamma_R(a) \text{ for some } a\} \cong A$$

が成り立つ。これは容易に験すことができるが、最後のものについて補足すれば、可換図

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & \Gamma \\ \gamma_A \cong \downarrow & & \downarrow \Delta \\ \Gamma & \xrightarrow{1 \otimes f} & \Gamma \otimes_A \Gamma \end{array},$$

において、 $1 \otimes f(z) = \Delta f(z)$ の両辺に $1 \otimes \varepsilon$ をほどかせば、 $1 \otimes \varepsilon f(z) = f(z)$ 。 $\varepsilon f(z) = a \in A$ とおけば、 $f(z) = \gamma_R(a)$ を得る。

前節の coalgebra S と DGA-algebra A^S に対して、twisting cochain $\theta: S \rightarrow A^S$ ((2.11)参照) による twisted tensor product $S \otimes_\theta A^S$ (簡単のため $S \otimes A^S$ で表わす) を考える。これは $S \otimes A^S$ に differential

$$(3.3) \quad \begin{aligned} d(s \otimes \lambda) &= ds \cdot \lambda + s \otimes d\lambda, \quad (s \in S, \lambda \in A^S), \\ d s &= (1 \otimes \theta) \psi(s), \quad \text{bideg } d = (1, 0), \text{ bideg } s = (0, \text{deg } s), \end{aligned}$$

を導入したものである。これにより $S \otimes A^S$ は cochain complex となる。

定理 3.4. $H^{s,t}(S \otimes A^S, d) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (s,t) = (0,0) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

証明. まず S 上の unnormalized cobar construction $S \otimes T(S)$ を考える。

$T(S)$ は S 上の テンサー代数。 differential d は

$$d(\alpha[\alpha_1 | \alpha_2 | \dots | \alpha_n]) = \sum \alpha'[\alpha'' | \alpha_1 | \alpha_2 | \dots | \alpha_n] + \sum_{i=1}^n (-1)^i \alpha[\alpha_1 | \dots | \psi(\alpha_i) | \dots | \alpha_n] + (-1)^{n+1} \alpha[\alpha_1 | \dots | \alpha_n | 1]$$

で与えられる。良く知られた通り

$$H^{s,t}(S \otimes T(S)) = \mathbb{Z} \text{ for } (s,t) = (0,0), = 0 \text{ otherwise}$$

いま $\pi: T(S) \rightarrow A^S$ を自然な射影とする. 亦は $\pi(\theta): T(S) \rightarrow T(\bar{S}_2)$ を
 経由する. $J = \text{Ker } \pi$ は $T(S)$ の両側理想である. A^S が free であるから

$$T(S) = J \oplus J', \quad J' \cong A^S, \quad \text{ある直和分解がある} \left(\begin{array}{l} J' \subset T(S_2) \\ \text{と見よ} \end{array} \right).$$

複体の完全列

$$(3.5) \quad 0 \rightarrow S \otimes J \rightarrow S \otimes T(S) \rightarrow S \otimes A^S \rightarrow 0$$

において

$$\text{補題 3.6.} \quad H^{**}(S \otimes J) = 0$$

を言えば H^{**} -長完全列から定理 3.4 が証明される.

この目的のため J の subcomplexes を考える:

$$(3.7) \quad \begin{aligned} J'' &= S \cdot J + \bar{K}_\theta \cdot J' + \Psi(K_\theta) \cdot J', & K_\theta &= \text{Ker } \theta: S \rightarrow \bar{S}_2 \\ J''' &= \bar{S} \cdot J + [1] \cdot J'' & \bar{K}_\theta &= K_\theta \cap \bar{S} \end{aligned}$$

これはテンソル積. 亦は $dJ'' \subset J''$, $dJ''' \subset dJ''$ が直接計算によ
 って確かめられる.

補題 3.8. 1) 複体の完全列

$$0 \rightarrow S \otimes J''' \xrightarrow{i} S \otimes J \rightarrow S \otimes J/J''' \rightarrow 0$$

において, $i_*: H^{**}(S \otimes J''') \rightarrow H^{**}(S \otimes J)$ は零写像である,

$$2) \quad H^{**}(S \otimes J/J''') = 0.$$

証明. 1) は, cochain homology $\sigma: S \otimes J''' \rightarrow S \otimes J$ と,

$$\sigma(\alpha \otimes \beta \cdot u) = \varepsilon(\alpha) \cdot \beta \otimes u, \quad \alpha \in S, \left(\begin{array}{l} \beta \in \bar{S} \\ u \in J \end{array} \right) \text{ 又は } \left(\begin{array}{l} \beta = 1 \\ u \in J' \end{array} \right).$$

とすれば, $d\sigma + \sigma d = i$. 次に 2) の証明に移る. 2) のため

$$(3.9) \quad J/J''' \cong K_0 \cdot J' \oplus \Psi(K_0) \cdot J'$$

に注意する.

このとき, contracting homotopy

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \sigma(\alpha \otimes |k| \cdot v) &= 0 & (\alpha \in S, k \in K_0, v \in J') \\ \sigma(\alpha \otimes |\Psi(k)| \cdot v) &= \begin{cases} \alpha \otimes |k| \cdot v & (k \in \bar{K}_0) \\ \alpha \otimes |1| \cdot v & (k=1) \end{cases} \end{aligned}$$

と置けば, 直接計算によつて

$$(3.11) \quad d\sigma + \sigma d = \text{id} \quad \text{on } K_0 \cdot J' \oplus \Psi(K_0) \cdot J'$$

が示される. ここで $|k| \cdot dv, |\Psi(k)| \cdot dv$ 等が現れるが,

$$(3.12) \quad \begin{array}{ccc} J' & \xrightarrow{d} & T(S_2) \\ & \searrow \pi^{-1} d \pi & \downarrow \pi \\ & & J' \\ \text{\scriptsize } \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ \Lambda^S & \xrightarrow{d_1} & \Lambda^S \end{array} \quad \begin{aligned} \pi \circ d &= d_1 \circ \pi \\ d &\equiv \pi^{-1} d_1 \circ \pi \pmod{J} \end{aligned}$$

を考慮すれば, $|k| \cdot dv, |\Psi(k)| \cdot dv$ における dv は, $\text{mod } J'''$ で, $\pi^{-1} d_1 \pi(v)$ ($\in J'$) に置きかえ得る, 或いは $dv \in J'$ と見做してもよい.

と見かく, これによつて補題 3.8, 補題 3.6 従つてまた定理 3.4 の証明が完了する。」

その結果, \mathbb{Z} の acyclic, injective (left) S -comodule resolution

$$(3.13) \quad \mathbb{Z} \rightarrow S \otimes \Lambda^S, \text{ または } 0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow S \xrightarrow{d} S \otimes \Lambda_{(1)}^S \xrightarrow{d} S \otimes \Lambda_{(2)}^S \rightarrow \dots$$

が得られ, これに左から $A = MU_*$ を tensor することによ

よって, A の acyclic, injective (left) Γ -comodule resolution :

$$(3.14) \quad A \xrightarrow{\eta} \Gamma \otimes \Lambda^S \quad (\Gamma = A \otimes S = MU_* \otimes MU^*)$$

が得られる。

§4. Λ^{MU} and a spectral sequence of the Adams-Novikov type.

左 Γ -comodule の圏における Hom-函手 を (3.14) に適用して

$$(4.1) \quad \text{Hom}_\Gamma(A, \Gamma \otimes \Lambda^S) \cong A \otimes \Lambda^S$$

を得る, differential は (3.14) のそれから導かれるもので,

$$(4.2) \quad d(a \otimes \lambda) = (\eta \otimes \theta)_R(a) \cdot \lambda + a \otimes d\lambda$$

となる。

$\text{Hom}_\Gamma(A, \quad)$ の derived functor が $\text{Ext}_\Gamma(A, \quad)$ であることから, 次の定理を得る:

定理 4.3. (i) cochain complex $\Lambda^{MU} = MU_* \otimes \Lambda^S$ (4.1) のコホモロジー群 $H^{s,t}(\Lambda^{MU}, d)$ は $\text{Ext}_{MU_* MU^*}^{s,t}(MU_*, MU_*)$ と同型である (後者は Adams-Novikov スペクトル系列の E_2 -項), (ii) Λ^{MU} は両側 MU_* -加群の構造をもち, それによつて, Λ^{MU} は DGA-algebra over \mathbb{Z} となる, (iii) Adams-Novikov-型 の スペクトル系列が存在して, Λ^{MU} はその E_1 -項となる。

証明. (i) は Ext の定義から明らか。 (ii) を示すため, Λ^{MU} に MU_* の右作用を次の様に定義する:

$$(4.4) \quad (a \otimes \lambda) \cdot b \stackrel{\text{def}}{=} \sum a \cdot b_{ij} \otimes D_i^c D_j^s(\lambda), \quad a, b \in MU_*, \lambda \in \Lambda^S$$

$$\eta_R(b) = \sum_{i,j \geq 0} b_{ij} \otimes \lambda_i^c \lambda_j^s + (\lambda_k \ (k \geq 3) \text{ を含む項})$$

ここで D_1, D_2 は (2.8) で定義された Λ^S の derivations である。

この右作用が well-defined であること、つまり

$$(4.5) \quad \begin{aligned} (\lambda \cdot \mu) \cdot b &= \lambda \cdot (\mu \cdot b), \\ \lambda \cdot (ab) &= (\lambda \cdot a) \cdot b, \quad \lambda, \mu \in \Lambda^S, a, b \in MU_* \end{aligned}$$

等の証明は省略させて置く。また

$$(4.6) \quad d(\lambda_{ij} \cdot a) = d\lambda_{ij} \cdot a - \lambda_{ij} \cdot da, \quad a \in MU_*$$

によって ΛMU は \mathbb{Z} 上の DGA-algebra となる。つぎに (iii) の

証明は、Adams [3] の方法に従って、先づスペクトラムの cofibrations

$$S^0 = Y_0 \xrightarrow{\tau} W_0 = MU \rightarrow Y_1, \quad Y_1 \rightarrow W_1 = MU \wedge S^{\Lambda_{(1)}^S} \rightarrow Y_2, \quad \text{等}$$

一般に $Y_n \rightarrow W_n = MU \wedge S^{\Lambda_{(n)}^S} \rightarrow Y_{n+1}$ を帰納的に定義する。

$$(4.7) \quad \begin{array}{ccccccc} & & \leftarrow & & \leftarrow & & \leftarrow \\ & & Y_1 & & Y_2 & & Y_3 \\ & \nearrow & & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow \\ S^0 = Y_0 & & W_0 & \xrightarrow{\delta_0} & W_1 & \xrightarrow{\delta_1} & W_2 & \xrightarrow{\delta_2} & W_3 & \cdots \end{array}$$

ここで

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & MU_*(S^0) & \rightarrow & MU_*(W_0) & \rightarrow & MU_*(W_1) & \rightarrow \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel & \\ 0 & \rightarrow & MU_* & \xrightarrow{\tau} & \Gamma & \xrightarrow{d_0} & \Gamma \otimes \Lambda_{(1)}^S & \xrightarrow{d_1} \end{array}$$

は (3.14) の acyclic resolution, $S^{\Lambda_{(n)}^S} = \bigvee_I S^{t(\lambda_I)}$ (wedge sum)

, $\tau \in \mathcal{L}\{\lambda_I\}$ は $\Lambda_{(n)}^S$ の基, $\text{bideg } \lambda_I = (n, t(\lambda_I))$ とする。

補題 4.8. (Prop. 13.5, Adams [3], Part III) F は E -module spectrum, E_*X は projective E_* -module のとき,

$$F^*X \cong \text{Hom}_{E_*}(E_*X, F_*)$$

この補題を $E = MU$, $X = W_{n-1} = MU \wedge S^{\wedge_{(n-1)}}$, $F = MU \wedge W_n$ に適用して $d_{n-1}: MU_*(W_{n-1}) \rightarrow MU_*(W_n)$ に対応する射

$$\delta_{n-1}: W_{n-1} \rightarrow MU \wedge W_n \rightarrow W_n$$

が得られる cofibration $Y_{n-1} \xrightarrow{\delta_{n-1}} W_{n-1} \xrightarrow{k} Y_n$ から $\delta_{n-1} = \delta_n \circ k_{n-1}$ となる

射 $\delta_n: Y_n \rightarrow W_n$ が得られる。(4.7) の三角形に函手 $\pi_* =$

$[S^*, -]$ を適用して exact complex

$$(4.9) \quad \begin{array}{ccc} \sum \pi_*(Y_{n+1}) & \xrightarrow{i} & \sum \pi_*(Y_n) \\ & \swarrow k & \searrow \delta \\ & E_1 = \sum \pi_*(W_n) & \approx \sum MU_* \otimes \Lambda_{(n)}^S = \Lambda^{MU} \end{array}$$

に伴うスペクトル系列を作れば, Adams-Novikov 型の, 球面の安定ホモトピー群に収束するものが得られる。

後書, Λ^{MU} を用いての Ext の計算は, differential に \mathbb{Z}_R が関係しているので, 低次元を除いて困難である。 Λ^{MU} のホモトピー論への応用は今後の問題である。 Λ^{BP} を同様の方法で構成できる(広下村克己氏との共同研究)。

このテーマについては学会その他で既にお話ししたことがあるが, 証明の完成のために 岩井 齊良, 石井 秀則, 小島 一元, 柳田 伸顕, 下村 克己, 平田 浩一の諸氏をはじめ多くの方から御助言を頂いた。ここに深く感謝いたします。

References

- [1] J. F. Adams, On the cobar construction, Colloque de Topologie Algebrique, Louvain, Paris (1956).
- [2] J. F. Adams, Lectures on generalized cohomology, Lecture Notes in Mathematics 99, Springer-Verlag, Berlin, 1969.
- [3] J. F. Adams, Stable homotopy and generalised homology, Chicago Lectures in Mathematics, The Univ. of Chicago Press. 1974.
- [4] A. K. Bousfield, E. B. Curtis, D. M. Kan, D. G. Quillen, D. L. Rector and J. W. Schlesinger, The mod-p lower central series and the Adams spectral sequence, Topology 5 (1966), 331-342.
- [5] A. K. Bousfield and D. M. Kan, The homotopy spectral sequence of a space with coefficients in a ring, Topology 11 (1972), 79-106.
- [6] E. H. Brown, Twisted tensor product I, Ann. of Math. 69 (1959), 223-246.
- [7] E. H. Brown and S. Gitler, A spectrum whose cohomology is a cyclic module over the Steenrod algebra, Topology 12 (1973), 283-295.
- [8] P. S. Landweber, cobordism operations and Hopf algebras,

- Trans. Amer. Math. Soc. 129 (1967), 94-110.
- [9] W. Lellmann and M. Mahowald, A generalization of the lambda algebra, to appear.
- [10] M. Mahowald, A new infinite family in π_{2k}^S , Topology 16 (1977), 249-256.
- [11] H. Miller, Some algebraic aspects of the Adams-Novikov spectral sequence, Dissertation, Princeton Univ. 1974.
- [12] J. W. Milnor, The Steenrod algebra and its dual, Ann. of Math. 67 (1958), 150-171.
- [13] J. W. Milnor, On the cobordism ring Ω^* and a complex analogue, Amer. J. of Math. 82 (1960), 505-521.
- [14] S. P. Novikov, The method of algebraic topology from the view point of cobordism theories (Russian), Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. 31 (1967), 855-951.
- [15] S. B. Priddy, Koszul resolutions, Trans. Amer. Math. Soc. 152 (1970), 39-60.
- [16] D. Quillen, On the formal group laws of unoriented and complex cobordism theory, Bull. Amer. Math. Soc. 75 (1969), 1293-1298.
- [17] N. Shimada and A. Iwai, On the cohomology of some Hopf algebras, Nagoya Math. J. 30 (1967), 103-111.
- [18] N. Shimada, An MU-analogue of the lambda algebra, to appear.
- [19] R. Zahler, The Adams-Novikov spectral sequence for the spheres, Ann. of Math. 96 (1972), 480-504.