

A note on the order
of the Kahn-Priddy map

信大教養 向井純夫 (Junzo Mukai)

0. はじめに.

L_p を素数 p を法とする無限次元レンズ空間, L_p^k を L_p の k -切片とする. $c = 2m+1$, $m \geq 1$ とおく.

$$\lambda = \lambda_k: E^c L_p^k \rightarrow S^c \quad (2p-3 \leq k \leq 2(m+1)(p-1)-2)$$

の汎関数 θ^t 作用素 θ_λ^t に対し, $\theta_\lambda^t \neq 0$ のとき, λ を Kahn-Priddy map (以下, $K-P$ map) という. 定義より, $t \geq 0$ のとき, $E^t \lambda$ も $K-P$ map である. $E^t \lambda$ のホモトピー類を同じ記号 $E^t \lambda$ で表す. コホモトピー群 $\pi^{t+c}(E^{t+c} L_p^k)$ における元 $E^t \lambda$ の位数 $\#(E^t \lambda)$ を決定する問題は, 西田吾郎氏により提起された. p が奇素数で, stable な $K-P$ map に対しては, 西田 [11] により解決された.

これにより, Kahn-Priddy の定理 [5] を使えば, 球面の安定ホモトピー群の p -成分の元の位数の上界が与えられることになる.

[11] における方法は, L_p^k の代数的 K -群を決定し, その応用として結果が得られる. $p=2$ のとき, 筆者は部分的結果を得た [9]. この方法を進めて, 即ち, K - E map の (位相的) K -理論による特徴づけを行い, Adams [2] の d -または e -不変量を用い, 更に stunted レンズ空間の suspension-order [4] の結果を使えば, 問題が解決できることを示せる. これが本報告の目的である.

実数 x に対し, $[x]$ で x を越えない最大整数を表す. $\varphi(n) = \#\{0 < i \leq n, i \equiv 0, 1, 2 \text{ or } 4 \pmod{8}\}$.
 $\lambda = \lambda_{2n}: E^c L_p^{2n} \rightarrow S^c$, $\chi = \lambda|E^c L_p^{2n-1}$ (制限) とおく.
 $p=2$ のとき, $m=n$ とする. $t \geq 0$.

Theorem. i) p : 奇素数.

$$\#(E^t \lambda) = \#(E^t \chi) = p^{\lfloor \frac{n}{p-1} \rfloor}.$$

ii) $p=2$. $\#(E^t \lambda) = 2^{\varphi(2n)}$.

$$\#(E^t \chi) = \begin{cases} 2^{\varphi(2n)} & , \quad n: \text{even} \\ 2^{\varphi(2n-1)} & , \quad n: \text{odd} \end{cases}.$$

1. K - P map の K -理論による特徴づけ.

以下特に断わらない限り, p は奇素数を表す.

Proposition 1.1 (上部 [6]). $n = s(p-1) + r$, $0 \leq r < p-1$.

$$\tilde{K}(L_p^{2n+1}) \approx \tilde{K}(L_p^{2n}) \approx (Z_{p^{s+1}})^r + (Z_{p^s})^{p-r-1}$$

生成元: $\sigma, \dots, \sigma^r, \sigma^{r+1}, \dots, \sigma^{p-1}$.

環構造: $\sigma^p = \sum_{i=1}^{p-1} \binom{p}{i} \sigma^i$, $\sigma^{n+1} = 0$.

$n \geq 3$ のとき, 次のことはよく知られている.

$${}^p \pi_{i+n}(S^n) \approx \begin{cases} 0, & i < 2p-3 \text{ or } i = 2p-2. \\ Z_p, & i = 2p-3, \text{ 生成元 } E^{n-3}\alpha_1 \end{cases}$$

(p -成分)

$M_p^n = S^{n-1} \cup_p e^n$, $\bar{\alpha}_1 \in \pi^3(M_p^{2p+1}) \approx Z_p$ を α_1 の拡張とす. 上の事実より, 次が成り立つ.

Lemma 1.2. $n \geq 3$. $\pi^n(E^n L_p^{2p-4}) = 0$,

$$\pi^n(M_p^{n+2p-2}) = \{E^{n-3}\bar{\alpha}_1\} \approx Z_p.$$

$q: L_p^{2n} \rightarrow L_p^{2n}/L_p^{2n-2} = M_p^{2n}$ を自然な map とするとき,

cofibration

$$L_p^{2n-2} \hookrightarrow L_p^{2n} \xrightarrow{g'} M_p^{2n}$$

と Prop. 1.1 より, 次を得る.

Lemma 1.3 $n = s(p-1)$, $s \geq 1$.

$$\text{Im} \{g'^*: \tilde{K}(M_p^{2n}) \rightarrow \tilde{K}(L_p^{2n})\} = \{p^{s-1} \sigma^{p-1}\} \approx Z_p.$$

以下, K -理論に関する議論では, 記号の簡略化のため, stable category で考える.

$\alpha \in {}^p\pi_{2p-3}(S^0)$ の拡張を $\bar{\alpha} \in \pi^0(M_p^{2p-2})$ とする. 次のことはよく知られている [2].

Lemma 1.4. $\alpha = a\alpha_1$, $a \equiv 1 \pmod{p}$.

$$\Leftrightarrow \rho_\alpha^1 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \bar{\alpha}^*: \tilde{K}(S^0) \rightarrow \tilde{K}(M_p^{2p-2}) \approx Z_p \text{ onto. i.e.,}$$

$$d_{\mathbb{C}}(\bar{\alpha}) \equiv a \pmod{p}.$$

$$\Leftrightarrow e_{\mathbb{C}}(\alpha) \equiv -\frac{a}{p} \pmod{1}.$$

K - P map の定義と Lemmas 1.2, 1.4 より, $k \geq 2p-2$ のとき, $\lambda: L_p^k \rightarrow S^0$ が K - P map であるための必要十分条件は, 次の図式がホモトピー-可換となることである.

(1.1)

$$\begin{array}{ccc}
 L_p^k & \xrightarrow{\lambda} & S^0 \\
 & \swarrow i & \nearrow \lambda' \\
 & L_p^{2p-2} & \\
 & \downarrow g' & \nearrow \alpha_1 \\
 & M_p^{2p-2} &
 \end{array}$$

ここで, $\lambda' = \lambda|_{L_p^{2p-2}}$. その他の maps は自然なものである.
 次の命題を示すことが本節の目的である.

Proposition 1.5. $k = 2n$ or $2n+1$, $n = s(p-1) + r$, $0 \leq r < p-1$, $s \geq 1$.

$$\lambda: L_p^k \rightarrow S^0 \quad K\text{-P map.}$$

$$\Leftrightarrow \text{Im} \{ \lambda^*: \tilde{K}(S^0) \rightarrow \tilde{K}(L_p^k) \} = \{ \sigma^{p-1} \text{ mod } p \tilde{K}(L_p^k) \} \approx \mathbb{Z}_p^s.$$

Proof. (1.1), Lemmas 1.3, 1.4 より, $\text{Im} \lambda^* = \text{Im} g'^* = \{ \sigma^{p-1} \} \approx \mathbb{Z}_p$. Prop. 1.1 より, i^* は onto で, $i^*(\sigma^{p-1}) = \{ \sigma^{p-1} \text{ mod } p \tilde{K}(L_p^k) \}$. 一方, (1.1) より, $i^*(\text{Im} \lambda^*) = \text{Im} \lambda'^*$. 故に, $\text{Im} \lambda^* = i'^*(\sigma^{p-1})$. □

2. L 空間の suspension-order,

空間 X に対し, \mathcal{L}_{EX} を EX の identity map のホモトピー類とする. $\#\mathcal{L}_{EX}$ を X の suspension-order [12] としよう. 記号 $|EX| = \#\mathcal{L}_{EX}$ を使う.

Lemma 2.1 ([4], [15]).

$$|E(L_p^{2n}/L_p^{2k})| = |EL_p^{2(n-k)}| = p^{1 + \lfloor \frac{n-k-1}{p-1} \rfloor}.$$

Lemma 2.2. ([6], [7]). $\tilde{K}(L_p^{2n}/L_p^{2k}) \approx \tilde{K}(L_p^{2(n-k)})$.

これらの Lemmas と Prop. 1.1 より, 次を得る.

Proposition 2.3. $t \geq 0$.

$$|E^{t+1}(L_p^{2n}/L_p^{2k})| = |E^{t+1}L_p^{2(n-k)}| = p^{1 + \lfloor \frac{n-k-1}{p-1} \rfloor}.$$

注. $p=2$ のとき, Prop. 2.3 は成り立たない.

3. Proof of Theorem i).

Proposition 3.1. $\lambda: E^c L_p^{2n} \rightarrow S^c$ K-P map,
 $\chi = \lambda|_{E^c L_p^{2n-1}}$. $n \equiv 0 \pmod{p-1}$ のときの χ を除いて,
 $t \geq 0$ のとき,

$$\#(E^t \lambda) = \#(E^t \chi) = p^{\lceil \frac{n}{p-1} \rceil}.$$

Proof. $n = s(p-1) + r$, $0 \leq r < p-1$, $s \geq 1$
とす。 Lemma 1.2 より, 次の図式がホモトピー可換と
なるような map $\tilde{\lambda}: E^c(L_p^{2n}/L_p^{2p-4}) \rightarrow S^c$ が存在する:

$$\begin{array}{ccc} E^c L_p^{2n} & \xrightarrow{\lambda} & S^c \\ \downarrow \varphi' & & \nearrow \tilde{\lambda} \\ & & E^c(L_p^{2n}/L_p^{2p-4}) \end{array}$$

ここで, φ' は自然な map である。

これと Prop. 2.3 より,

$$\#(E^t \lambda) \mid \#(E^t \tilde{\lambda}) \mid |E^{t+c}(L_p^{2n}/L_p^{2p-4})| = p^{1 + \lceil \frac{n-p+1}{p-1} \rceil} = p^s.$$

一方, Prop. 1.5 より,

$$p^s \mid \#(E^\infty \lambda) \mid \#(E^t \lambda).$$

よって, $\#(E^t \lambda) = p^s$.

次に, $n \not\equiv 0 \pmod{p-1}$ のとき, $n-1 = s(p-1) + r-1$, $0 \leq r-1$. Prop. 1.5 と上の結果から,

$$p^s \mid \#(E^\infty \lambda) \mid \#(E^t \lambda) \mid \#(E^t \lambda) = p^s. \quad \square$$

Theorem i) の残された主張をいうには, stable な元 $\lambda = \lambda \mid L_p^{2n-1} : L_p^{2n-1} \rightarrow S^0$ に対して, $\# \lambda = p^s$ を示せばよい。

$n = s(p-1)$, $s \geq 1$ とする. $\alpha_s \in \pi_{2n-1}(S^0)$ を $e_{\mathbb{C}}(\alpha_s) \equiv -\frac{1}{p} \pmod{1}$ とする Adams-Toda の元 [2] とし, $\bar{\alpha}_s \in \pi^0(M_p^{2n})$ を α_s の拡張とする。

Lemma 3.2. $\lambda : L_p^{2n} \rightarrow S^0$ K-P map, $q' : L_p^{2n} \rightarrow M_p^{2n}$ 自然な map. このとき,

$$p^{s-1} \lambda \equiv \bar{\alpha}_s q' \pmod{\text{Ker } d_{\mathbb{C}}}.$$

Proof. $d_{\mathbb{C}}(\bar{\alpha}_s) \equiv -p e_{\mathbb{C}}(\alpha_s) \equiv 1 \pmod{p}$. 従って, Lemma 1.3 と Prop. 1.5 から主張を得る. \square

自然な maps に対する次の可換図式を考える:

$$\begin{array}{ccc} L_p^{2n-1} & \xrightarrow{g} & S^{2n-1} \\ \downarrow i & & \downarrow i_1 \\ L_p^{2n} & \xrightarrow{g'} & M_p^{2n} \end{array}$$

Proposition 3.3. $p^{s-1} \lambda' \equiv \alpha_s g \pmod{\text{Ker } e_C}$,
 $\# \lambda' = p^s$.

Proof. Lemma 3.2 と上の図式より,

$$p^{s-1} \lambda' = (p^{s-1} \lambda) \circ i \equiv (\alpha_s g') \circ i = \alpha_s g \pmod{(\text{Ker } d_C) \circ i}$$

i . 米田の積の性質から [2], $(\text{Ker } d_C) \circ i \subset \text{Ker } e_C$,

$$e_C(\alpha_s g) = d_C(Eg) e_C(\alpha_s) \equiv \pm \frac{1}{p} \pmod{\pm 1}. \text{ 何と云へば,}$$

$(Eg)^*: \tilde{K}^{-1}(S^{2n-1}) \rightarrow \tilde{K}^{-1}(L_p^{2n-1})$ は, [6] より, isom. であるから,

$$d_C(Eg) = \pm 1. \quad \square$$

4. Proof of Theorem ii).

$p = 2$ のとき, $L_p^k = P^k$ (実射影空間) と表し,

K -群の代りに KO -群を用いる。以下, 次の事実を自由に

使われる: $\widehat{KO}(P^n) \approx \mathbb{Z}_{2^{g(n)}} [1]$, $|E^\infty P^{2n}| = 2^{g(2n)} [12]$.

次の Lemma は Prop. 1.5 の mod 2 version である [9].

Lemma 4.1. $\lambda: P^n \rightarrow S^0$ K-P map.

$\Leftrightarrow \lambda^*: \widehat{KO}(S^0) \rightarrow \widehat{KO}(P^n)$ onto.

以上から, Theorem ii) の最初の主張を得る [9].

以下, $\lambda: P^{2n} \rightarrow S^0$ K-P map, $\chi = \lambda|_{P^{2n-1}}$ とし,
Theorem ii) の残された主張を () えばよ ().

Case I. $n \equiv 3 \pmod{4}$.

$$g(2n-1) = g(2n) \text{ より, } \# \chi = 2^{g(2n-1)}.$$

Case II. $n = 4s + 1$, $s \geq 0$.

$g(2n-1) = g(2n-2) + 1$. $\mu_s \in \pi_{2n-1}(S^0)$ を
 $d_R(\mu_s) \neq 0$ とする位数 2 の元 [2] とする. cofibration

$$P^{2n-2} \xrightarrow{i} P^{2n-1} \xrightarrow{q} S^{2n-1}$$

と Lemma 4.1 より, 次を得る.

Lemma 4.2. $2^{g(2n-2)} \chi \equiv \mu_s q \pmod{\text{Ker } d_R}$,

$$\# \chi' = 2^{\varphi(2n-1)}.$$

Case III. $n = 4s - 2$ or $4s$, $s \geq 1$.

$$\varphi(2n) = \varphi(2n-2) + 1, \quad \varphi(2n-1) = \varphi(2n-2).$$

$\beta_s \in \pi_{2n-1}(S^0)$ を, $\# \beta_s = 2$ かつ $e'_R(\beta_s) \equiv \frac{1}{2} \pmod{1}$ と
なる元 $[\alpha]$ とする.

注. Adams 予想が解けたから, $n = 4s$ のときも, $\text{Im } J \cong$
 $Z_{m(4s)}[\alpha]$. この生成元を d_{2n-1} と表すとき, $\beta_s = \binom{m(4s)}{2} d_{2n-1}$
とすればよい.

cofibration $P^{2n-2} \xrightarrow{i'} P^{2n} \xrightarrow{g'} M_2^{2n}$ を用いれば, 次の
Lemma (Lemma 3.2 の mod 2 version) が得られる.

$$\text{Lemma 4.3.} \quad 2^{\varphi(2n-2)} \lambda \equiv \bar{\beta}_s g' \pmod{\text{Ker } d_R}.$$

$s = 1$ のとき, この結果は [8] で得られた.

$$\text{Proposition 4.4.} \quad 2^{\varphi(2n-2)} \chi \equiv \beta_s g \pmod{\text{Ker } e'_R}$$

$$\# \chi = 2^{\varphi(2n)}.$$

Proof. 最初の主張は, Prop. 3.3 の前半の証明と全く同様
である. [3] によれば, 次の完全列

version を考える.

次の Lemma は, $H^*(L_p^k; \mathbb{Z}_p)$ の環構造と, β 作用素 β^i 及び Bockstein の作用素 Δ の性質, Adem の公式より得られる.

Lemma 5.1. $\lambda: E^c L_p^{2k} \rightarrow S^c$, $c = 2m+1$, $p-1 \leq k \leq (m+1)(p-1) - 1$ ($\lambda: E^c P^{2k} \rightarrow S^c$, $1 \leq k \leq m$) map. i を $i(p-1) \leq k$ ($i \leq k$, resp.) を満たす自然数とする. λ の汎関数 $\beta^i(S_f^{2i})$ - or $\Delta \beta^i(S_f^{2i+1})$ -作用素が, ある i で nontrivial な S , 任意の i で nontrivial である.

さて, inclusion $S^{2m-1} \hookrightarrow \Omega^2 S^{2m+1}$ の homotopy fibre $\varepsilon \mathbb{Q}_2^{2m-1} = \Omega(\Omega^2 S^{2m+1}, S^{2m-1})$ とする. K を有限 CW 複体とし, 次の完全列を考える [13]:

$$\cdots \rightarrow [EK, S^{2m-1}] \xrightarrow{E^2} [E^3K, S^{2m+1}] \xrightarrow{H^{(2)}} [K, \mathbb{Q}_2^{2m-1}] \rightarrow \cdots$$

Lemma 5.2. $\lambda \in \pi^{2m+1}(E^3K)$ に対し, $\beta_\lambda^m \neq 0$.
 $\Leftrightarrow H^{(2)}(\lambda) \neq 0$.

Proof. $H^{(2)}(\lambda) = 0$ と仮定すれば, 上の完全列から,

$\exists \theta \in \pi^{2m-1}(EK)$; $\lambda = E^2\theta$. β^m は cohomology suspension isom. と可換で、かつ、 $\beta^m \tilde{H}^{2m-1}(\ ; Z_p) = 0$. 故に $\beta^m_\lambda = 0$. □

Lemma 5.3. $K = E^{2m-2} L_p^{2m(p-1)}$, $\lambda \in \pi^{2m+1}(E^3K)$,

$H^{(2)}(\lambda) \neq 0 \Rightarrow \beta^m_\lambda \neq 0$. 即ち、 λ は K -D map.

Proof. $\lambda' \in \pi^{2m+1}(E^3K)$ を任意の K -D map とする.

Lemmas 5.1, 5.2 より、 $H^{(2)}(\lambda) \neq 0$. $\dim \leq 4mp - 6$ かつ、 Q_2^{2m-1} は M_p^{2mp-2} と p -同値 [13] だから、 $[K, Q_2^{2m-1}] \approx [M_p^{2mp-2}, M_p^{2mp-2}] \approx Z_p$. 従って、先の完全列から、 $\exists \theta \in \pi^{2m-1}(EK)$; $\lambda = a\lambda' + E^2\theta$, $a \equiv 1 \pmod p$. 故に、

$$\beta^m_\lambda = a\beta^m_{\lambda'} + \beta^m_{E^2\theta} = a\beta^m_{\lambda'} \neq 0. \quad \square$$

注. $\pi^{2m+1}(E^{2m+1} L_p^{2m(p-1)})$ において、 K -D map が存在することは、前節 Example iii) で述べた [14] の Lemma 8.2 を使う。尚、cf. [10] Lemma 7.4.

[13] によれば、 $\text{mod } p$ Hopf homo. は $H_p = I \circ H^{(2)}$:

$P[E^3K, S^{2m+1}] \xrightarrow{H^{(2)}} P[K, Q_2^{2m-1}] \xrightarrow{I} P[E^3K, S^{2mp+1}]$ と定義される。 $K = E^{2m-2} L_p^{2m(p-1)}$ のとき、 I が isom. であることは、

完全列

$$P[K, Q_2^{2m-1}] \xrightarrow{I} P[E^3K, S^{2mp+1}] \xrightarrow{\Delta} P[EK, S^{2mp-1}]$$

において, $[EK, S^{2mp-1}] = [M_p^{2mp-1}, S^{2mp-1}] \approx Z_p$ であること,
及 Δ は degree p の map である [13] ことが示される.

以上で, 次の主張が証明された.

Proposition 5.4. $\lambda: E^{2m+1} \mathbb{L}_p^{2m(p-1)} \rightarrow S^{2m+1}$ K - P map.
 $\Leftrightarrow H_p(\lambda) \neq 0.$

注. $p=2$ のとき, EHP 列を用い, 全く同様な議論により, 上の結論, 即ち, [9] の Theorem 1.2 を得る.

参考文献

- [1] J. F. Adams, Vector field on spheres, *Ann. of Math.*,
75(1962), 603 - 632.
- [2] ———, On the groups $J(X)$ -IV, *Topology*, 5(1966), 24-71.
- [3] M. Fujii, K_0 -groups of projective spaces, *Osaka J. Math.*,
4(1967), 141 - 149.
- [4] K. Iriye, On the James number of cyclic maps of spheres,
Japan J. Math., 10(1984), 1 - 8.

- [5] D. S. Kahn and S. B. Priddy, Applications of the transfer to stable homotopy theory, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 78(1972), 981-987.
- [6] T. Kambe, The structure of K_1 -rings of the lens space and their applications, *J. Math. Soc. Japan*, 18(1966), 136-146.
- [7] T. Kobayashi, Non-immersion theorems for lens spaces, II, *J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I*, 32(1968), 285-292.
- [8] J. Mukai, On the stable homotopy of the real projective space of even low dimension, to appear in *Publ. RIMS Kyoto Univ.*
- [9] ———, A characterization of the Kahn-Priddy map, to appear in *Advanced Studies in Pure Math.*
- [10] G. Nishida, The nilpotency of elements of the stable homotopy groups of spheres, *J. Math. Soc. Japan*, 25(1973), 703-732.
- [11] ———, On the algebraic K-group of lens spaces and its applications, *J. Math. Kyoto Univ.*, 23(1983), 211-217.
- [12] H. Toda, Order of the identity class of a suspension space, *Ann. of Math.*, 78(1963), 300-325.
- [13] ———, On iterated suspensions I, *J. Math. Kyoto Univ.* 5(1965), 87-142.
- [14] ———, On iterated suspensions II, *J. Math. Kyoto Univ.* 5(1966), 209-250.
- [15] J. Ucci, On cyclic and iterated cyclic products of spheres, *Osaka J. Math.*, 8(1971), 393-404.