数理解析研究所講究録
第 605 巻 1987 年 143-149

Stabilization of exotic 4-spaces

大阪市大・理 河内明夫 (Akio Kawauchi)

4次元ユークリッド空間 R^4 に同相だが，微分同相ではない4次元なめらか多様体を外来4次元空間 (exotic 4-space) という。現在では，非可算無限個の外来4次元空間の存在が確認されている (Taubes-Gompf による [G])。他に，すべての外来4次元空間を含んだ外来4次元空間 (普遍外来4次元空間 (universal exotic 4-space) といわれている) の存在 (Freedman-Tayler による [T]) や，R^4 に含まれる，従ってすべての外来4次元空間に含まれる，外来4次元空間の存在 (Edwards [E] による) なども知られている。

ここでは，次の安定化定理を注意する：

(外来空間の) 安定化定理　任意の外来4次元空間に可算無限個の $S^2 \times S^2$ を connected sum してできた4次元なめらか多様体は，必ず，R^4 に可算無限個の $S^2 \times S^2$ を connected sum してできたものに微分同相になる。

(注意) 次の (1), (2) は同値になるが、そのようなものの存在は知られていない:

(1) <u>有限個</u>の $S^2 \times S^2$ を connected sum して得られたものが、R^4 に同じことをして得られたものと微分同相となるような外来4次元空間が存在する。

(2) 外来4次元球面(すなわち、4次元球面と同相だが微分同相でないなめらか多様体)が存在する。

「可算無限個の $S^2 \times S^2$ の connected sum」を精密に述べる。そのために、W を 4次元の有向連結なめらか多様体とする。$\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ を互いに交わらない W 内部の4次元球体の族とする。任意の(W の中の)コンパクト集合と交わる B_i が、つねに有限個しかない時、この族 $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ を <u>離散的</u> (discrete) という。離散的族 $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ を使って可算無限個の $S^2 \times S^2$ を connected sum したものを「可算無限個の $S^2 \times S^2$ を connected sum」してできた 4次元なめらか多様体といい、$W \#_{i=1}^{\infty} S^2 \times S^2_i$ とかく。(4次元なめらか多様体になることは明らかだろう。)
W 内の任意のコンパクト集合 C に対して、$C \subset C'$ かつ $W - C'$ が連結となるようなコンパクト集合 C' が存在する時、

W を <u>connected at ∞</u> という。一般に，$W \#_{i=1}^{\infty} S^2 \times S^2_i$ は $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ の選択によるが，次の補題が成りたつ：

$\boxed{\text{補題}}$ W が connected at ∞ の時，$W \#_{i=1}^{\infty} S^2 \times S^2_i$ の有向微分同相型は離散的族 $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ の取り方によらない。

この補題によって，$R^4 \#_{i=1}^{\infty} S^2 \times S^2_i$ は R^4 内の離散的族 $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ の取り方によらず定まる。これを<u>安定4次元空間</u>(<u>stable 4-space</u>)といい，SR^4 で表わすことにする。SR^4 は4次元トーラスと $S^2 \times S^2$ の connected sum の普遍被覆空間と微分同相になる。connected at ∞ となる W で，任意のコンパクト集合 C で $W-C$ が連結となるものに対し，$C \subset C'$ かつ $W-C'$ が連結かつ $\pi_1(W-C') \to \pi_1(W-C)$ が自明となるようなコンパクト集合 C' が存在する時，W を <u>1-connected at ∞</u> という。

外来4次元空間の安定化定理は次の定理の系として得られる：

定理A　$W \#_{i=1}^{\infty} S^2 \times S^2_i$ が安定4次元空間 SR^4 に微分同相となるための必要十分条件は，W が 1-connected，spin，開，1-connected at ∞ であることである．[例えば，$(K3)_0$ で，K3曲面から1点を除いたものを表わす時，$(K3)_0 \#_{i=1}^{\infty} S^2 \times S^2_i \cong SR^4$ となる．]

系　SR^4 になめらかに埋め込まれた，4次元球 B^4 と任意の4次元コンパクト部分多様体 W で $\partial W \cong S^3$ となるものに対し，$SR^4 - \mathrm{Int}\, W$ は $SR^4 - \mathrm{Int}\, B^4$ に微分同相になる．[van Kampen定理によって，W は 1-connected であることに注意せよ．]

安定4次元空間は，その中で　2次元結び目理論を展開しようとして導入したものである．その動機は，4次元ユークリッド空間 R^4 は，その中で 2次元結び目理論を展開するには「狭すぎる」ように筆者には思えたからである．結び目理論としての内容は他の機会にゆずる（例えば，[K4]にだいたいの結果のみ述べてある）こととして，ここでは，この安定4次元空間 SR^4 は「広い空間」であることを指摘するにとどめる．まず定理A より次がわかる．

系　定理Aの条件を満たす W は，その補空間が $R^4_+ \#_{i=1}^{\infty} S^2 \times S^2_i$ に微分同相となるように，SR^4 になめらかに埋め込める（R^4_+ は R^4 の上半空間）．

特に，外来4次元空間は SR^4 になめらかに埋め込める．

任意の有向3次元多様体（非コンパクトでも，不連結でもよい）は，定理Aを満たすあるWに，properにしかもなめらかに埋め込める．（注：コンパクト集合の原像がコンパクトとなるような写像をproperという．）
従って，次が成りたつ：

$\boxed{\text{定理B}}$ 任意の3次元有向多様体は SR^4 に，properにしかもなめらかに埋め込める．

SR^4 は R^5 にproperにかつなめらかに埋め込めるので，次が出る：

$\boxed{\text{系}}$ 任意の3次元有向多様体は，自明法バンドルを持つような仕方で，R^5 にproperにしかもなめらかに埋め込める．

この系は，コンパクト3次元多様体の場合にはよく知られている (Hirsch [H]). 定理Bのコンパクト版は次に述べるように成りたたない：

非埋め込み定理 [K1] 任意のコンパクト有向連結4次元位相多様体 W に対し，それに埋め込めないコンパクト有向連結3次元多様体が無限に多く存在する。

安定4次元空間 SR^4 は，すべての有向3次元多様体を含むような4次元多様体のうちで，最も簡単な空間の1つだろう。

最後に，問題を1つあげておく。

問題 安定4次元空間 SR^4 上の微分構造は2つ以上あるか？ すなわち，外来安定4次元空間は存在するか？

参考文献

[E] R.D. Edwards, Some folk theorems about exotic R^4's, Abstracts from workshop on Four-manifolds and Geometry, MSRI, Berkeley, California, 1985, 7.

[G] R.E. Gompf, An infinite set of exotic R^4's, J. Diff. Geometry 21 (1985), 283–300.

[H] M.W. Hirsch, The imbedding of bounding manifolds in Euclidean space, Ann. of Math. 74 (1961), 494–497.

[K1] A. Kawauchi, Imbedding problem of 3-manifolds into 4-manifolds (preprint).

[K2] A. Kawauchi, Knots in the stable 4-space: An introduction (to appear).

[K3] A. Kawauchi, Knots in the stable 4-space, I: The stable 4-space (準備中).

[K4] 河内, Knots in the stable 4-space, 数理研講究録「2次元結び目を中心とした結び目理論」の中.

[T] L.R. Taylor, Smoothing 4-manifolds and the universal R^4, Abstracts from workshop on Four-manifolds and Geometry, MSRI, Berkeley, California, 1985, 27.