

## 一様等方性乱流における因子化キュムラント展開法

京大理物理 巽 友正 (Tomomasa Tatsumi)

山田 道夫 (Michio Yamada)

武井 利文 (Toshifumi Takei)

### § 1. はじめに

流体乱流の統計的性質は、速度場の特性汎関数によって、完全に記述される。この特性汎関数は、速度場の全てのキュムラントに対する情報を含むものであるが、連続無限個の独立変数に依存する汎関数であるため、その形を厳密に求めることは、現在の段階では殆ど不可能である。他方、実験的測定や実用の観点からすれば、速度場の統計的性質としては、主として低次のいくつかのキュムラントが重要であり、高次のキュムラントは副次的な役割りを担うに過ぎない。このため、乱流場の統計理論もまた、低次キュムラント（あるいはそれに相当するもの）を主な対象とし、これらに対して何らかの近似を用いて閉じた方程式を得る近似理論として発展してきた。そのような近似理論の中で、低次キュムラントのみ

による乱流の記述という精神を最も端的に表現したものが、  
 0-4次キュムラント理論 (Proudman & Reid 1954 :  
 Tatsumi 1955, 1957) であった。周知のように、この理  
 論は、負のエネルギーの発生という致命的欠陥をかかえてい  
 たが、近似の意味の明確さと理論の簡潔さの点から、その後  
 いくつかの改良案が提出された。その中で代表的なものが  
 EDQNM (Orszag 1970) 及び修正0-4次キュムラント  
 理論 (Tatsumi, Kida & Mizushima 1978) である。これ  
 らの理論は、定量的には異なる結果を与えるものの、エネ  
 ルギーの正值性、エントロフィー・カタストロフ、あるい  
 は、二次元乱流におけるパリンストロフィー・カタストロフ  
 などの定性的な面については一致した結果を与え、乱流の  
 一般的な性質をとらえたものとして受け入れられている。  
 これらの修正法の成功の理由の一つは、エネルギー・スペク  
 トルの発展方程式をマルコフ化して、0-4次キュムラント  
 理論における過去からの寄与の過剰な評価を修正した点に  
 あった。しかし、このマルコフ化の手続きが、流体乱流の  
 どのような性質に基づくものであるのかは明らかとはいえず  
 なく、この点、近似の物理的根拠は不明のまま残されている。  
 この論文においては、マルコフ化を伴わない新しいキュム  
 ラント展開法を提案する。我々の展開法は、高次キュムラン

トからの寄与を，低次キュムラントの積として表現するもので，それによって，低次キュムラントに対する閉じた発展方程式を導く。この方程式は，エネルギー・スペクトルの発展方程式としてはマルコフ的でないにもかかわらず，エネルギー・スペクトルの正值性を保証している。また，高次キュムラントからの寄与は，形式的に，一種の乱流粘性として解釈することができる。以下，近似法の説明，方程式の導出と共に，数値結果について報告する。

## §2. キュムラント展開とキュムラントの因子化

非圧縮粘性流体における一様乱流の速度場  $u(x, t)$  の Fourier 変換を，

$$v(k, t) = (2\pi)^{-3} \int u(x, t) e^{-ik \cdot x} d\mathcal{X}, \quad (2.1)$$

で表す。Fourier 振幅  $v(k, t)$  の確率分布は，特性汎関数

$$\Phi[\mathcal{Z}, t] = \langle \exp[\int v^*(k, t) \cdot \mathcal{Z}(k) dk] \rangle, \quad (2.2)$$

$$\mathcal{Z}(-k) = \mathcal{Z}^*(k), \quad (2.3)$$

によって表現されるが，更に  $\Phi[\mathcal{Z}, t]$  は，次のようにキュムラント級数に展開することができる；

$$\Phi[\mathbb{Z}, t] = \exp\left[\sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left\{ \dots \left\{ C_{\ell_1 \dots \ell_n}^{(n)}(k_1, \dots, k_n; t) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \times \delta(k_1 + \dots + k_n) Z_{\ell_1}(k_1) \dots Z_{\ell_n}(k_n) dk_1 \dots dk_n \right\} \right. \right] \quad (2.4)$$

特性汎関数 \$\Phi\$ の時間的发展は, Hopf 方程式によつて一意的に決定される。従つて各々のキュムラント \$C^{(n)}\$ は, Hopf 方程式から導かれる次の式に従う (Tatsumi 1980)。

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \nu \sum_{m=1}^n k_m^2 \right) C_{\ell_1 \dots \ell_n}^{(n)}(k_1, \dots, k_n; t) = i \sum_{m=1}^n (k_m)_p \Delta_{\ell_m q}(k_m) \\ \times \int C_{\ell_1 \dots \ell_{m-1} p \ell_{m+1} \dots \ell_n q}^{(n+1)}(k_1, \dots, k_{m-1}, k_n - h, k_{m+1}, \dots, k_n, h; t) dh \\ - i \sum_{r=2}^{n-1} \frac{1}{(r-1)!(n-r+1)!} \sum_{\{1 \dots n\}} \sum_{m=r}^n (k_m)_p \Delta_{\ell_m q}(k_m) \\ \times C_{\ell_1 \dots \ell_{r-1} q}^{(r)}(k_1, \dots, k_{r-1}, -\sum_{s=1}^{r-1} k_s; t) \\ \times C_{\ell_r \dots \ell_{m-1} p \ell_{m+1} \dots \ell_n}^{(n-r+1)}(k_r, \dots, k_{m-1}, k_m + \sum_{s=1}^{r-1} k_s, k_{m+1}, \dots, k_n; t) \quad (2.5)$$

ただし, \$k\_1 + \dots + k\_n = 0\$, \$\Delta\_{pq}(k) = \delta\_{pq} - k\_p k\_q / k^2\$, \$\nu\$ は分子粘性, \$\sum\_{\{1 \dots n\}}\$ は \$(1, \dots, n)\$ の全ての置換についての和を表す。

この方程式 (2.5), \$n = 1, 2, \dots\$, は, これを有限の \$n = N\$ で打ち切つた場合, 未知数の数が方程式の数より常に1だけ大きく, 従つて閉じた方程式系を構成しない。そこで, この \$N\$ 個の方程式系を閉じさせるためには, 何らかの仮説が必要であり, そのような完結仮説の一つとして, \$C^{(n)} = 0\$ とおく。0-4次キュムラント近似が考えられ, また後に, マルコフ

化をほどこした修正0-4次キュムラント近似などが開発されたわけである。しかし、いくつかの厳密解の知られた方程式系にこれらの近似を適用した場合、近似理論の結果がいくつかの点で厳密解と定性的に一致しないことがわかり、その結果、四次キュムラント  $C^{(4)}$  をもと積極的に考慮する必要性が認められた (Takayasu 1985 ; Kaneda 1985)。

そこで我々は、任意の次数のキュムラント  $C^{(n+1)}$  からの寄与を低次のキュムラント  $C^{(2)}, C^{(3)}, C^{(n)}$  の積として表現する「因子化近似」を次のように導入する。まず、(2.5) 式中の  $C^{(n+1)}$  は次の形の積分形、

$$\overline{C}^{(n+1)} = \int C_{k_1 \dots k_{n-1} p_2}^{(n+1)}(k_1 \dots k_{n-1}, k_n - h, h; t) dh, \quad (2.6)$$

でのみ現れることに注意する。この積分は、 $(n+1)$  個の波数  $(k_1, \dots, k_{n-1}, k_n - h, h)$  によって作られる  $(n+1)$  角形の二つの辺  $k_n - h, h$  に関するものであることを考慮して (図1),  $(n+1)$  角形を  $(k_1, \dots, k_n)$  が作る  $n$  角形と、 $(-k_n, k_n - h, h)$  が作る三角形

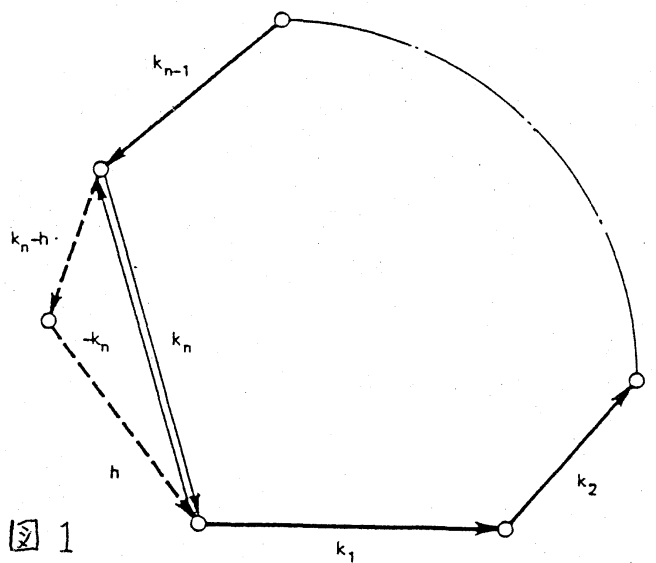


図1

に分割する。そして、 $(n+1)$  角形を構成する  $(n+1)$  個の波数に関する速度の結合確率分布を、上述の  $n$  角形と三角形に伴うそれぞれの結合確率分布の積で近似すると、 $\bar{C}^{(n+1)}$  に対する次のような表現を得る：

$$\bar{C}^{(n+1)} = \frac{\int C_{rpg}^{(3)}(-k_n, k_n-h, h) dh}{\frac{1}{2} C_{ss}^{(2)}(-k_n, k_n)} C_{s_1 \dots s_{n-1} r}^{(n)}(k_1, \dots, k_n; t). \quad (2.7)$$

ここで、分母の  $C^{(2)}$  は両辺のキュムラントの次数をそろえるために導入されている。また、因子  $1/2$  は、(2.7) 式が  $n=2$  の時に厳密に成立するための定数である。この近似 (2.7) を、以下、因子化キュムラント近似という。特に、一様等方性乱流の場合には、 $C^{(2)}$  及び  $\bar{C}^{(3)}$  が、エネルギー・スペクトル密度  $\phi(k, t)$  及びエネルギー伝達密度  $\psi(k, t)$  を用いて、

$$C_{ij}^{(2)}(k, -k; t) = \phi(k, t) \Delta_{ij}(k), \quad (2.8)$$

$$\int C_{ijk}^{(3)}(k, -k-h, h; t) dh = \frac{i}{2k^2} \psi(k, t) [k_j \Delta_{ik}(k) + k_k \Delta_{ij}(k)], \quad (2.9)$$

と表されるため、(2.7) 式は、

$$\begin{aligned} \bar{C}^{(n+1)} = \frac{i}{2k_n^2} \frac{\psi(k_n, t)}{\phi(k_n, t)} & [ (-k_n)_p C_{j_1 \dots j_{n-1}, 2}^{(n)}(k_1 \dots k_n; t) \\ & + (-k_n)_2 C_{j_1 \dots j_{n-1}, p}^{(n)}(k_1 \dots k_n; t) ] \end{aligned} \quad (2.10)$$

と書ける。以上の近似法の良否は、(2.7)式又は(2.10)式がどの程度(2.5)式と両立するかによって判断されるが、その詳細は別の論文にゆずって、ここでは、因子化キュムラント近似を  $n=3$  の場合に対して適用した結果 (Tatsumi, Yamada & Takei 1986) について報告する。

### §3. 因子化四次キュムラント近似

四次キュムラント  $C^{(4)}$  に対して因子化近似を適用すると、キュムラント方程式(2.5)から、 $C^{(3)}$  に対する発展方程式が次のように得られる：

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \gamma(k, k', k''; t) \right] C_{ijk}^{(3)}(k, k', k''; t) \\ & = -i \sum_{\substack{[i, j, k] \\ [k, k', k'']}} k_p \Delta_{i2}(k) C_{pj}^{(2)}(-k', k'; t) C_{k2}^{(2)}(k'', -k''; t). \end{aligned} \quad (3.1)$$

ただし、 $\gamma(k, k', k''; t) = \gamma(k, t) + \gamma(k', t) + \gamma(k'', t)$ ,

$$\gamma(k, t) = \nu k^2 - \psi(k, t)/2\phi(k, t), \quad (3.2)$$

$$k + k' + k'' = 0 .$$

この表現において、 $\gamma(k, k', k''; t)$  を分子粘性  $\nu(k^2 + k'^2 + k''^2)$  で置き換えたものは、従来の0-4次キュムラント近似と一致する。すなわち、我々の近似 ( $n=4$  において適用した場合) では、四次キュムラントの寄与を実効的な“粘性”として考慮している (この事情は、一般の  $n$  に対して因子化キュムラント近似を適用した場合にも同様である)。

キュムラントの等方形 (2.8) (2.9) を (2.5) 及び (3.1) に用いて整理すると、次の方程式が得られる:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + 2\gamma(k, t) \right] \phi(k, t) = 0, \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \psi(k, t) = & 4\pi \int_0^t dt' \int_0^\infty dk' \int_{-1}^1 d\mu \\ & \times \exp \left[ - \int_{t'}^t \gamma(k, k', k''; t'') dt'' \right] \\ & \times \left[ \phi(k', t') - \phi(k, t') \right] \phi(k'', t') \\ & \times \left( \frac{k k''}{k'^2} + \mu k k' \right) k'^2 (1 - \mu^2), \quad (3.4) \end{aligned}$$

ただし、 $k''^2 = k^2 + k'^2 + 2\mu k k'$ 、 $\psi(k, 0) = 0$ 。

ここで、エネルギー・スペクトル  $E(k, t)$  及びエネルギー・伝達スペクトル  $T(k, t)$  を導入して、

$$\begin{bmatrix} E(k, t) \\ T(k, t) \end{bmatrix} = 4\pi k^2 \begin{bmatrix} \phi(k, t) \\ \psi(k, t) \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

と書くと、(3.3) (3.4) は、 $E(k, t)$ 、 $T(k, t)$  に対する方程式、



$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\nu k^2\right) E(k, t) = T(k, t), \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} T(k, t) = & \int_0^t dt' \int_0^\infty dk' \int_{-1}^1 d\mu \sqrt{\frac{E(k, t) E(k', t) E(k'', t)}{E(k, t') E(k', t') E(k'', t')}} \\ & \times [k^2 E(k', t') - k'^2 E(k, t')] E(k'', t') \\ & \times \left(\frac{k k'}{k''^2} + \mu\right) \frac{k k'}{k''^2} (1 - \mu^2), \quad (3.7) \end{aligned}$$

のように書ける。

スペクトル方程式 (3.6), (3.7) は、本来の 0-4 次キュムラント近似と同様、マルコフ的ではないが エネルギー・スペクトルの正値性は次のように保証されている。エネルギー・スペクトル  $E(k, t)$  が、 $t = t_1$ ,  $k = k_1$  において初めて 0 になったとすると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} E(k, t) \Big|_{t=t_1} = & \lim_{t \rightarrow t_1 - 0} \frac{1}{16k_1} \int_0^t dt' \iint_{\Delta} dk' dk'' \sqrt{\frac{E(k, t)}{E(k, t')}} \\ & \times \sqrt{E(k', t) E(k', t') E(k'', t) E(k'', t')} \\ & \times [k_1^2 (k' + k'')^2 + (k' - k'')^2] [(k' + k'')^2 - k_1^2] \\ & \times [k_1^2 - (k' - k'')^2] (k' k'')^{-3}, \quad (3.8) \end{aligned}$$

ただし、 $\iint_{\Delta} dk' dk''$  は、 $k + k' + k'' = 0$  を満たす領域における積分を表す。ここで右辺の被積分関数が非負であることに注意すれば、

$$\frac{\partial}{\partial t} E(k, t) \Big|_{t=t_1} \geq 0 \quad (3.9)$$

を得る。従って、 $E(\kappa, t)$  は負になり得ない。

#### §4. 数値計算

ここでは、スペクトル方程式 (3.6), (3.7) を初期条件,

$$E(\kappa, 0)/E_0 = 4\pi(\kappa/\kappa_0)^4 / [1 + (\kappa/\kappa_0)^8] \quad (4.1)$$

の下で数値的に積分する。ここに、 $\kappa_0$  と  $E_0$  はそれぞれ代表的な波数とエネルギーの強さであり、これらを用いて全ての量を無次元化する。例えば、波数、時間、Reynolds 数はそれぞれ、

$$\kappa = \kappa/\kappa_0, \quad \tau = E_0^{1/2} \kappa_0^{3/2} t, \quad R = (E_0/\kappa_0)^{1/2} / \nu, \quad (4.2)$$

となる。数値計算は  $R = 100$  の場合について行い、積分は  $\kappa$  方向には  $\kappa' = ab^n$  ( $a = 0.1$ ,  $b = 1.115$ ,  $n = 1, 2, \dots, 70$ ) の 70 点を用いた台形公式、 $\mu$  方向には 40 点 Gauss-Legendre 積分法、さらに  $\tau$  方向には  $\Delta\tau = 0.001$  の前進差分法を用いて行った。

#### 1. エネルギー・スペクトル

エネルギー・スペクトル  $E(\kappa, t)$  とエネルギー伝達スペク

トル  $T(\kappa, t)$  の変化を、図2及び図3に示す。スペクトルの相似性を明らかにするために、面対数座標で表示したものが図4及び図5である。これらのスペクトルは、共に、初期 ( $0 \leq \tau \leq 1$ ) に急速な変化を行、た後、比較的緩やかに、かつ相似的に変化する。

十分小さい波数領域 ( $\kappa < 1$ ) においては、エネルギー・スペクトルは、

$$E(\kappa, t) = A(t) \kappa^4 \quad (\kappa \sim 0) \quad (4.3)$$

の形をとる。ここに  $A(t)$  は緩やかな増加関数である。この結果は、修正  $O-4$  次キュムラント理論の結果と一致している。これに対して、 $\kappa \sim 1$  の波数領域においては、スペクトルの変化は自己相似的ではない。これは、今の近似では、 $T(\kappa, t)$  の表現が異なる二つの時間  $t$  と  $t'$  を含んでいるため ((2.7) 式)、単一の相似変数で表すことができないことに対応している。

より大きな波数領域 ( $1 < \kappa < 100$ ) においては、エネルギー・スペクトルは、

$$E(\kappa, t) \sim \kappa^{-2} \quad (4.4)$$

に従い、自己相似的に変化する事がわかる。しかし、修正

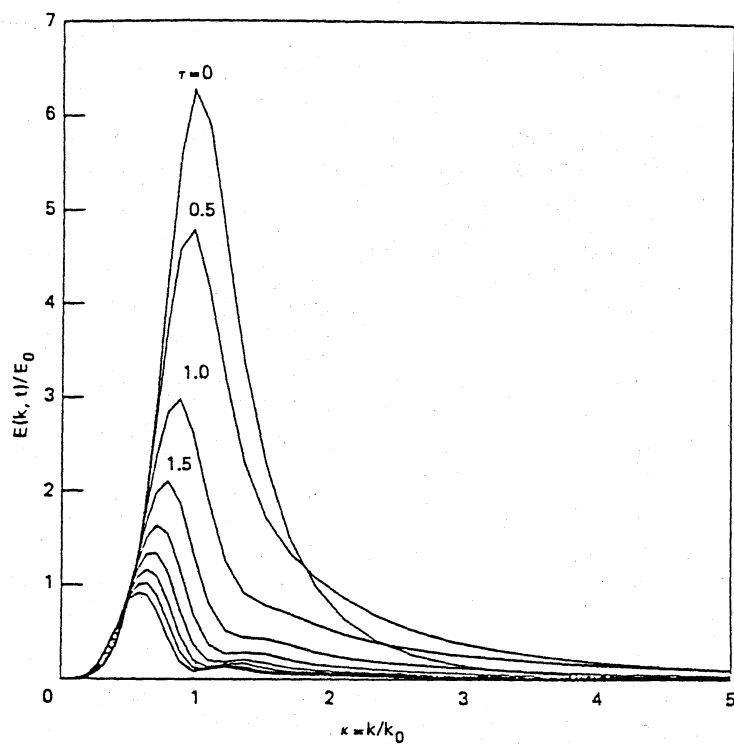


图 2

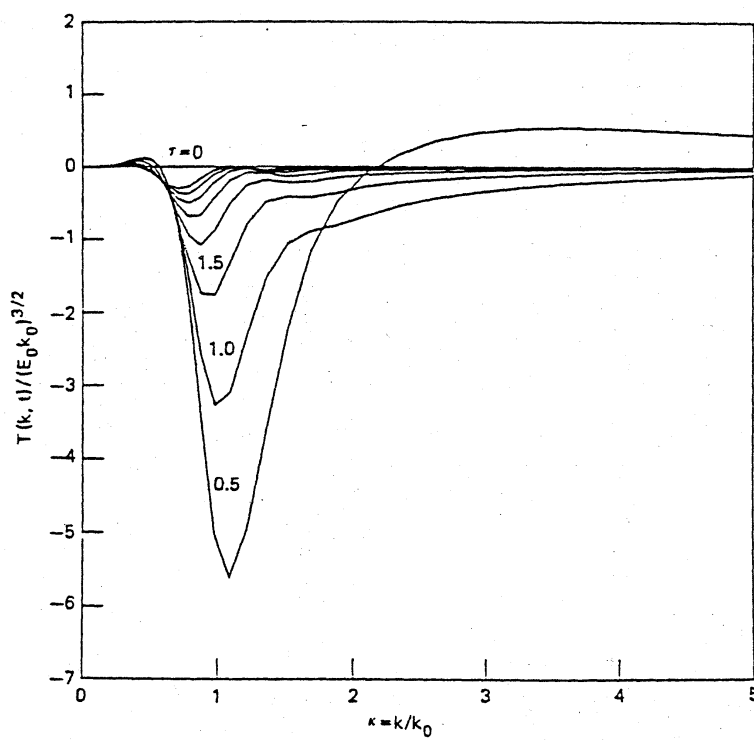


图 3

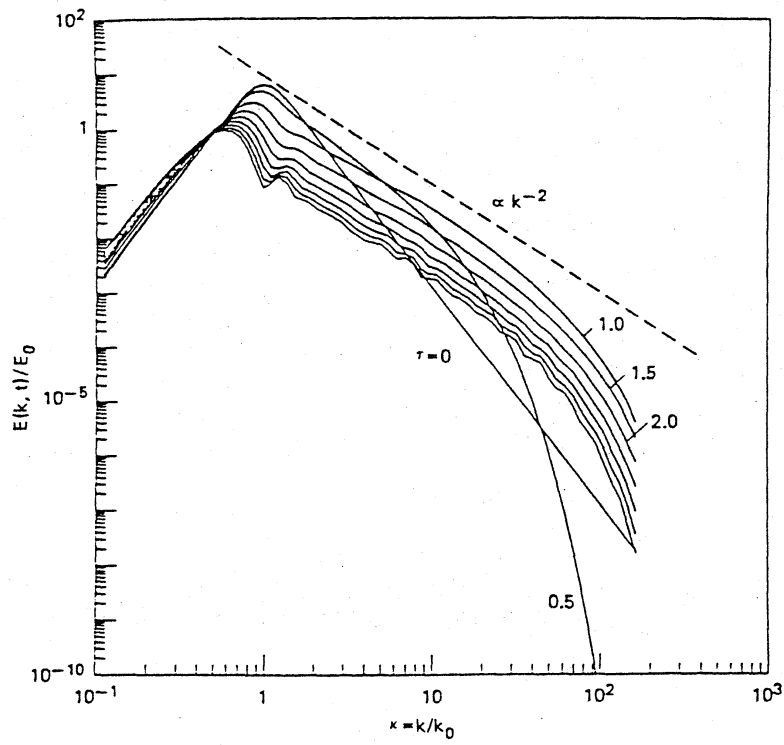


图 4

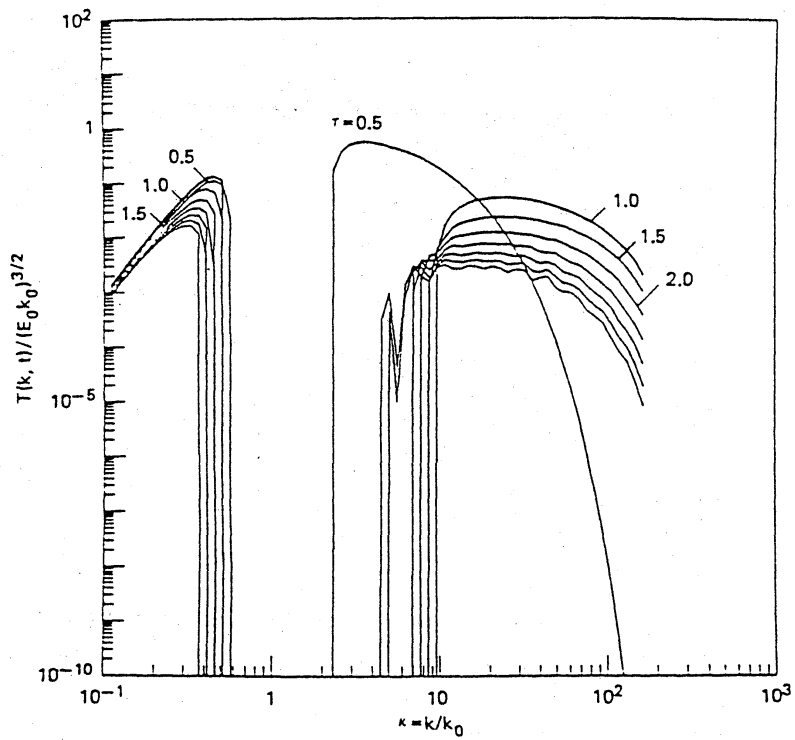


图 5

0-4次キュムラント近似の場合とは異なり、 $k^{-2}$ 領域に引き続く $k^{-1}$ 領域は見られない。 $k^{-2}$ 領域より大きな波数の領域では、

$$E(k,t) \propto \exp(-bk) \quad (b \text{ は正の定数}) \quad (4.5)$$

の指数型のスペクトルが見られる。

スペクトルの関数型(4.4)は、乱流散逸率 $\gamma(k,t)$ が、対応する波数領域で $k$ に依存しないこと(図6)に注意すれば、解析的にも得ることができる。すなわち、

$$\gamma(k,t) = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} E(k,t) / E(k,t) = \gamma_0(t) \quad (4.6)$$

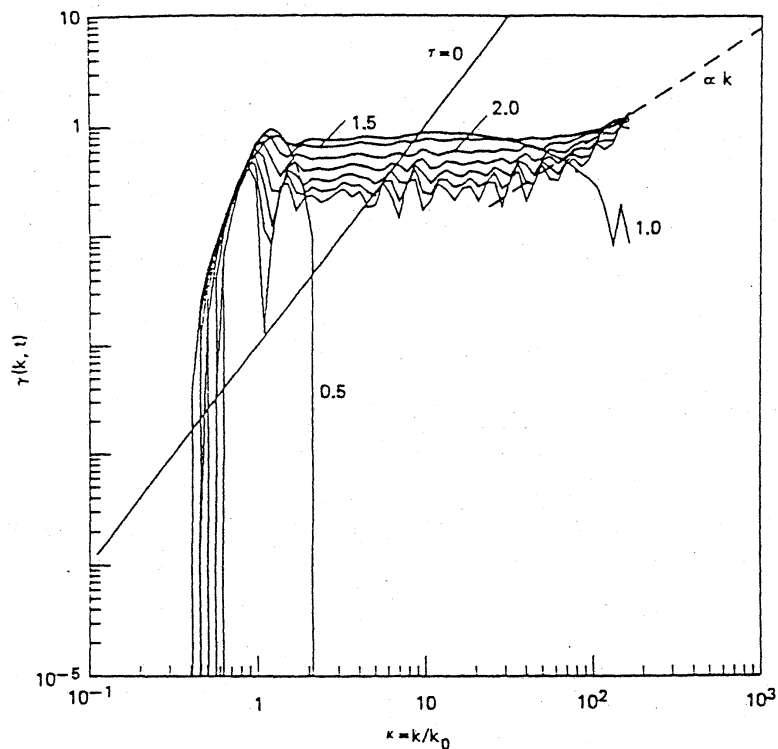


図 6

とおけば,  $E(k, t)$  は,

$$E(k, t) = E(k, 0) \exp \left[ -2 \int_0^t \gamma_0(t') dt' \right] \quad (4.7)$$

となり, これを (3.7) に代入すれば,

$$\begin{aligned} 0 = T(k, t) = & \int_0^t \exp \left[ -3 \int_t^{t'} \gamma_0(t'') dt'' \right] dt' \\ & \times \int_0^\infty dk' \int_{-1}^1 d\mu \left[ k^2 E(k', t) - k'^2 E(k, t') \right] \\ & \times E(k'', t) \left( \frac{k k'}{k''^2} + \mu \right) \frac{k k'}{k''^2} (1 - \mu^2) \end{aligned} \quad (4.8)$$

の解として (Tatsumi 1960 : Kida 1981 参照),

$$E(k, t) = A k^{-2} \quad (4.9)$$

が得られる。これは, 数値的結果 (4.4) と一致している。

また, スペクトルの関数形 (4.5) は, 対応する波数領域において,

$$\gamma(k, t) = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} E(k, t) / E(k, t) = c k \quad (4.10)$$

となることを示しているが, 数値的結果 (図6) もまた, (4.10) と合致している。

## 2. 統計量

エネルギー,

$$\mathcal{E}(\tau) = \int_0^{\infty} E(k, \tau) dk \quad (4.11)$$

は、初期 ( $\tau \leq 1$ ) にはほぼ一定であるが、その後 ( $\tau \geq 1$ ) は概ね時間について相似的に減衰し、その減衰則は次のように表される (図7) :

$$\mathcal{E}(\tau) \propto \tau^{-1.4} \quad (4.12)$$

インストロフィー

$$Q(t) = \int_0^{\infty} k^2 E(k, t) dk \quad (4.13)$$

は、初期の時間において急激な増加を示し、 $\tau \sim 1$  の付近で最大値に達した後、ほぼ、

$$Q(t) \propto t^{-2.4} \quad (4.14)$$

に従って減衰する (図8)。

Taylor のマイクロスケール,

$$\lambda(t) = \sqrt{\frac{\langle u_i^2 \rangle}{\langle (\partial u_i / \partial x_i)^2 \rangle}} = \sqrt{\frac{5\mathcal{E}(t)}{Q(t)}} \quad (4.15)$$

は初期の時間において急激に減少し、 $\tau \sim 1$  の付近で最小値



に達した後，ほぼ，

$$\lambda(t) \propto t^{\frac{1}{2}} \quad (4.16)$$

に従って増加する(図9)。

ひずみ度，

$$S(t) = -\frac{3\sqrt{30}}{14} \int_0^{\infty} k^2 T(k,t) dk / \left[ \int_0^{\infty} k^2 E(k,t) dk \right]^{\frac{3}{2}} \quad (4.17)$$

は，時間と共に単調に増加し， $\tau=6$ において $S=15$ に達する。この値は，従来の修正0-4次キュムラント理論による値とは大きくかけ離れており(図10)， $S(t)$ がより後の時間に，より小さな漸近値にまで減少するのか，あるいは，現在の大きな数値自身が数値計算の不正確さによるものであるかは，今のところ明らかではない。図10において，細い実線は，定常乱流に対して成立する関係式，

$$S(t) = -\frac{3\sqrt{30}}{7} \nu \int_0^{\infty} k^4 E(k,t) dk / \left[ \int_0^{\infty} k^2 E(k,t) dk \right]^{\frac{3}{2}}$$

を用いて計算した値を示す。

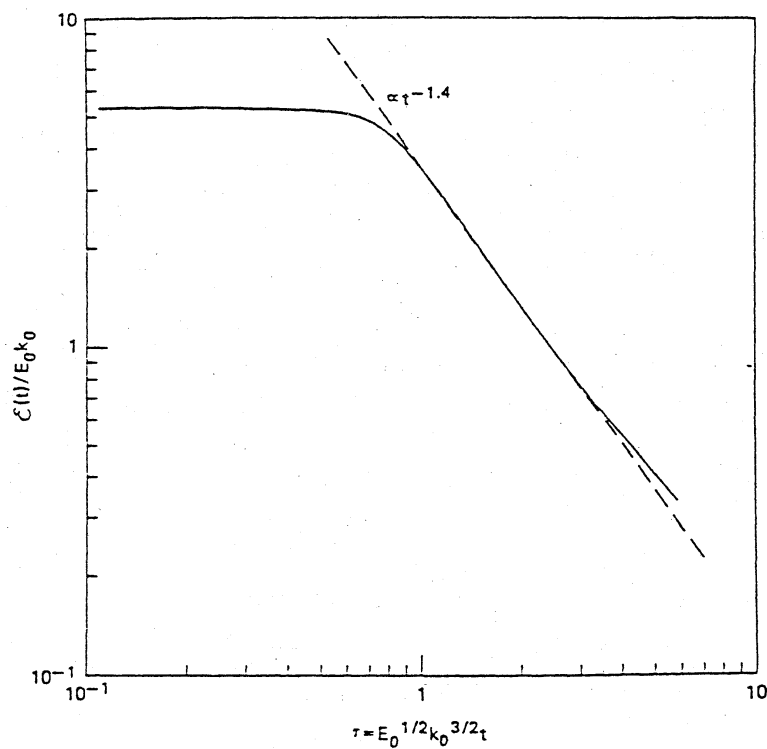


图 7

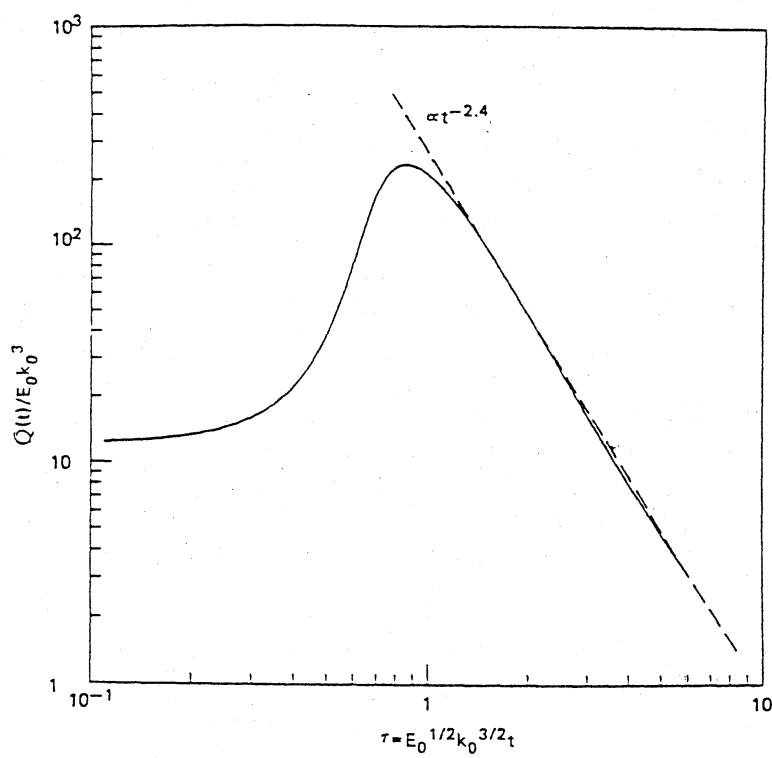
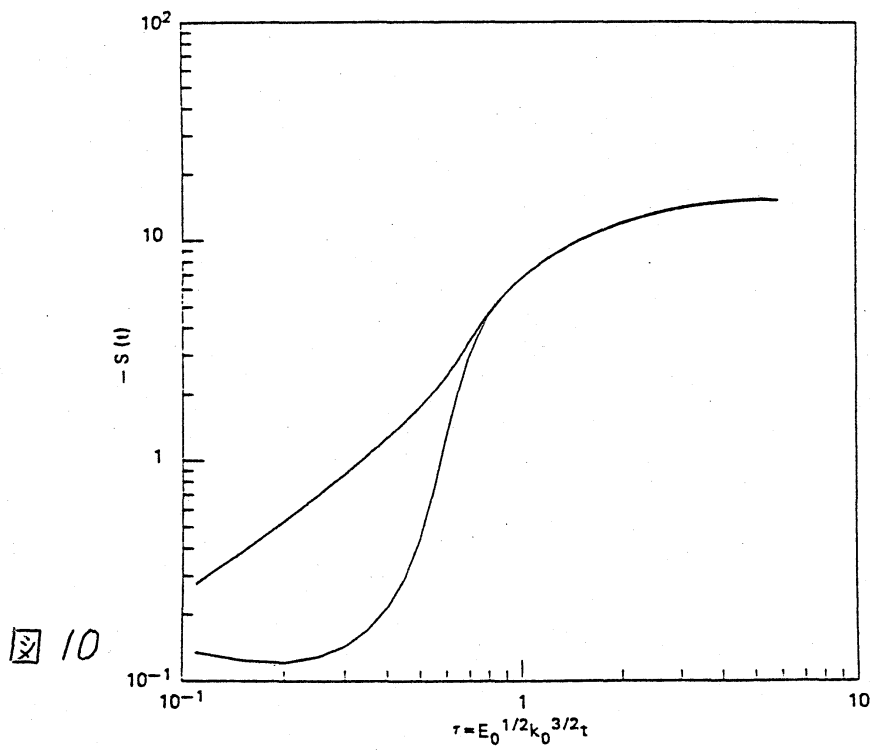
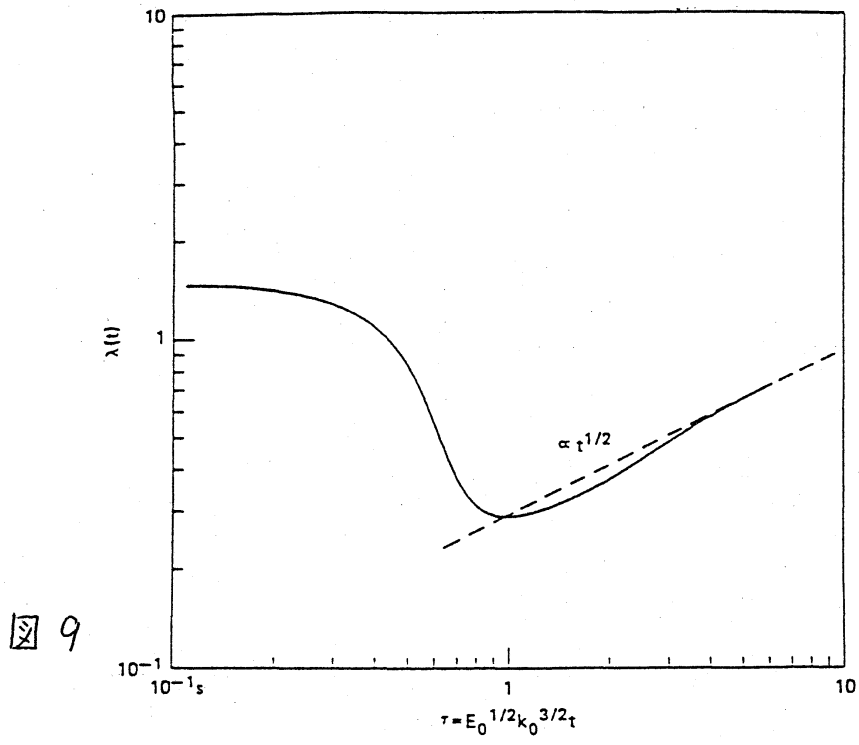


图 8



## 参考文献

- Kaneda, Y. (1985) Attempts at statistical theories of turbulence, in: T. Tatsumi, H. Maruo and H. Takami eds, Recent Studies on Turbulent Phenomena (Association for Science Documents Information, Tokyo, 1985) 79.
- Kida, S. (1981) Similar solutions in modified cumulant expansion, Phys. Fluids 24, 604.
- Orszag, S.A. (1970) Analytical theories of turbulence, J. Fluid Mech. 41, 363.
- Proudman, I. and Reid, W.H. (1954) On the decay of normally distributed and homogeneous turbulent velocity fields, Phil. Trans. Roy. Soc. London, A247, 163.
- Takayasu, H. (1985) Statistical properties of a 3-wave system, J. Phys. Soc. Jpn. 54, 1317.
- Tatsumi, T. (1955) Theory of isotropic turbulence with the normal joint-probability distribution of velocity, Proc. 4th Jpn. Natl. Congr. Appl. Mech. 1954, 307.
- Tatsumi, T. (1957) The theory of decay process of incompressible isotropic turbulence, Proc. Roy. Soc. London, A239, 16.
- Tatsumi, T. (1960) Energy spectra in magneto-fluid dynamic turbulence, Rev. Mod. Phys. 32, 307.
- Tatsumi, T., Kida, S. and Mizushima, J. (1978) The multiple-scale cumulant expansion for isotropic turbulence, J. Fluid Mech. 85, 97.
- Tatsumi, T. (1980) Theory of homogeneous turbulence, Adv. in Appl. Mech. 20, 39.
- Tatsumi, T., Yamada, M. and Takei, T. (1986) Factorized cumulant expansion for homogeneous turbulence, Fluid Dyn. Res. (in the press).