数理解析研究所講究録
第608巻 1987年 70-76

Witt群 W_n の変形について

中央大 理工　関口 力（Tsutomu Sekiguchi）

我々の目的は、Witt-Artin-Schreier の完全系列 $0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p^n \longrightarrow W_n \longrightarrow W_n \longrightarrow 0$ から、Kummer type の完全系列 $1 \longrightarrow \mu_{p^n} \longrightarrow (\mathbb{G}_m)^n \longrightarrow (\mathbb{G}_m)^n \longrightarrow 1$ への変形を作ることにあり、その為に Witt群 W_n から torus $(\mathbb{G}_m)^n$ への変形を統制する必要がある。ここでは、現在得られている W_n から $(\mathbb{G}_m)^n$ への変形の作り方、また、それらの代表的と思われる例を構成する。以下、$(A,\underline{M})$: DVR, $\lambda\in\underline{M}$, $S = \mathrm{Spec}\ A$ とし、S-group scheme $\underline{G}^{(\lambda)} = \mathrm{Spec}\ A[x,1/(\lambda x+1)]$ を群構造 $x\cdot y = \lambda xy+x+y$ で定義する。明らかに、$\lambda\neq 0$ のとき、$\underline{G}^{(\lambda)}$ は $\mathbb{G}_a$ から $\mathbb{G}_m$ への変形を与え、また逆も成り立つ。

<u>定理</u>I. $\underline{G}\longrightarrow S$: flat S-group scheme with $\underline{G}_0 \simeq \mathbb{G}_a$, $\underline{G}_\eta \simeq \mathbb{G}_m \Longrightarrow \underline{G} \simeq \underline{G}^{(\lambda)}$.

この $\underline{G}^{(\lambda)}$ と [2] の変形の作り方は、次の定理で一般化される。

<u>定理</u>II. $X\longrightarrow S$: smooth irreducible commutative S-

ring scheme, $\lambda \in \underline{X}(S)$ とし、h_X の subfunctor $(h_X)^\times$, $(h_X)^{(\lambda)}$ を各々、$Y \longmapsto h_X(Y)^\times$, $Y \longmapsto \{x \in h_X(Y) \mid \lambda x + 1 \in h_X(Y)^\times\}$ (Y: S-schemes) で定義すれば、これらは X の open subschemes $X^\times$, $X^{(\lambda)}$ で表現される。

<u>証明の概略</u>.

$\pi: X \longrightarrow S$: structure morphism

$m: X \times_S X \longrightarrow X$: ring scheme X の積法則

$0: S \longrightarrow X$: ring scheme X の 0-section

$e: S \longrightarrow X$: ring scheme X の 1-section

とし、

$\Psi: X \times_S X \longrightarrow X \times_S X$

とおく。Ψ は、$X \times_S X$ を projection p_2 を通して、X 上の additive group scheme として見た時の準同型写像となっており、S の各 geometric point s 上の Ψ の fibre

$\Psi_s: X_s \times X_s \longrightarrow X_s \times X_s$

は $(0(s), e(s))$ で etale 、かつ $\Psi|_{X^\times(s)} = id$ より、$\deg \Psi_s = 1$。従って、Ψ_s: birational。ここで、Cartesian 積

$$\begin{tikzcd} E = \mathrm{Ker}(\Psi) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & X \arrow[d, "0_X:=(0\circ\pi, id)"] \\ X \times_S X \arrow[r, "\Psi"] & X \times_S X \end{tikzcd}$$

をとる。E は additive geoup scheme over X であるから、各 geometric point $x \in X$ に対し、E_x の $0(x)$ における連結成分 E_x° は既約である。従って、写像

$$x \longmapsto \dim(E_x^\circ)$$

は upper semi-continuous on X となり、X の部分集合

$$U := \{x \in X \mid \dim(E_x^\circ) = 0\}$$

は $e(S)$ を含む Zariski open をなす。更に、

$$\phi = \phi|_{E^\circ} : E^\circ := \phi^{-1}(U) \longrightarrow U$$

は quasi-finite となる。一方、ϕ は明らかに equidimensional であるから、Chevalley の判定定理により ϕ は univerally open となる。従って、写像

$$n : U \longrightarrow Z;\ z \longmapsto n(z) = \# \phi^{-1}(z)$$

は lower semi-continuous となる。従って U の部分集合

$$V := \{z \in U \mid n(z) = 1\}$$

は Zariski closed である。一方、Ψ_s が birational であったから、V は U の generic point を含んでおり、従って $U = V$ を得る。即ち、U の各点 z に対し、E_z° の base space は1点よりなることが分かる。ここで、ϕ が flat となるような U の点全体 U_0 は $\phi^{-1}(z)$ が geometrically reduced となる U の点 z を含んでいることを注意する。特に、$U_0 \supset e(S)$ である。今、$\phi^{-1}(U_0)_{red} \simeq U_0$ に注意すれ

ば、$\phi^{-1}(U_0) \longrightarrow U_0$ は proper なることが分かる。従って、U_0 の部分集合

$$W := \{z \in U_0 \mid \phi^{-1}(z)\text{: geometrically reduced}\}$$

は open をなす。更に、点 $z \in X$ に対し、

$$z \cdot 1_X : X \longrightarrow X \text{ :automorphism}$$

$$\Longleftrightarrow \quad z \cdot 1_X : X \longrightarrow X \text{ :monomorphism}$$

$$\Longleftrightarrow \quad E_z = \{0\} \quad \Longleftrightarrow \quad z \in W.$$

従って、$W = X^{\times}$ を得る。

更に、$\lambda \in \underline{X}(S)$ に対し、morphism $\alpha : X \longrightarrow X$ を $x \longmapsto \lambda x + e$ で定義すれば、$X^{(\lambda)} = X^{\times} \times_X (X, \alpha)$ となり、$F^{(\lambda)} = h_X(\lambda)$ である。

この定理を用いて、次のような例が作られる。

<u>例 1</u>. A: 環、$S = \mathrm{Spec}\ A$, $X = W_{1A} = \mathrm{Spec}\ A[x]$ とおき、X を普通の A 上の ring scheme とみる。この時、$\lambda \in \underline{X}(S) = \mathrm{Hom}_{A\text{-}alg}(A[x], A) = A$ に対し、

$$X^{\times} = \mathbb{G}_{m,A}、\quad X^{(\lambda)} = \underline{G}^{(\lambda)}$$

となる。

<u>例 2</u>. A: 環、$X = W_{n,A}$ を A 上の長さ n の Witt vector ring scheme とする。この時、$\mu = (\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_{n-1}) \in \underline{X}(A) = A^n$ に対し、

$$(W_{n,A})^{\times} = \mathrm{Spec}\ A[x_0, \cdots, x_{n-1}, 1/W_0(x), \cdots, 1/W_{n-1}(x)],$$

$$W_{n,A}^{(\mu)} = \mathrm{Spec}\ A[x_0, \cdots, x_{n-1}, 1/(W_0(\mu)W_0(x)+1), \cdots$$
$$\cdots, 1/(W_{n-1}(\mu)W_{n-1}(x)+1)],$$

但し、$W_i(x) = x_0^{p^i} + p x_1^{p^{i-1}} + \cdots + p^i x_i$: Witt 多項式とする。この $W_{n,A}^{(\mu)}$ は[2]で与えた group scheme と同じものである。

<u>例3</u>. A: DVR　$\underline{M}$: 極大イデアル; $\underline{M} \ni \lambda_1, \cdots, \lambda_r$ ($\lambda_i \neq \lambda_j$); $\lambda := (0, \lambda_1, \cdots, \lambda_r)$; $H^{(\lambda)} := \mathrm{Spec}\ A[x_0, \cdots, x_r]$ とおく。ここで、$x = (x_0, \cdots, x_r) \in H^{(\lambda)}$ に対し、

$$x_0 + x_1 t + x_2 t(t-\lambda_1) + \cdots + x_r t(t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_{r-1})$$
$$\in A[t]/t(t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_r)$$

と考え、$A[x]/t(t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_r)$ の環構造で $H^{(\lambda)}$ に ring scheme の構造を導入する。明らかに、$H^{(\lambda)}$ は、A-代数の圏から環の圏への関手

$$B \longmapsto B[t]/t(t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_{r-1})$$

を表現する ring scheme である。このとき、group scheme $L^{(\lambda)}$ を同型

$$(H^{(\lambda)})^\times \simeq G_m \times L^{(\lambda)};\ f(t) \longmapsto (f(0), f(t)/f(0))$$

で定義するとき、これが A 上の特異代数曲線の generalized Jacobian の affine 部分として現れる基本的なものである。

このように、この定理IIによりかなりの Witt 群の変形の例が作れるが、しかし乍ら、残念なことに意味のある ring scheme を作ることは group scheme を作る以上に簡単とはいえない。そこで考えられるもう一つの方法は、Witt group W_n が次の extension

$$0 \longrightarrow \mathbb{G}_a \longrightarrow W_n \longrightarrow W_{n-1} \longrightarrow 0$$

で与えられることを利用し、この extension の変形を考えることである。しかし、現在の所この考え方で、意味のある変形が得られているのは $n=2$ の場合であるが、これを次ぎに説明する。

<u>定理</u>III. $\mu \in \underline{M} \setminus \{0\}$ に対し、$A_\mu = A/\mu$ とおくとき、S 上の étale 位相に関する群層の完全系列 $0 \longrightarrow \underline{G}^{(\mu)} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{G}_{m,A} \xrightarrow{r} \mathbb{G}_{m,A_\mu} \longrightarrow 0$（但し、$\alpha : x \longmapsto \mu x+1$）が得られ、これから smooth affine S-group scheme L に対し、同型 $\mathrm{Ext}^1(L,\underline{G}^{(\mu)}) \simeq \mathrm{Hom}(L,\mathbb{G}_{m,A_\mu})/r(\mathrm{Hom}(L,\mathbb{G}_{m,A}))$ を得る。

実際、定理IIIの完全系列より、完全系列

$$\mathrm{Hom}(L,\mathbb{G}_{m,A}) \xrightarrow{r} \mathrm{Hom}(L,\mathbb{G}_{m,A_\mu}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(L,\underline{G}^{(\mu)}) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Ext}^1(L,\mathbb{G}_{m,A})$$

を得るが、ここで群構造を無視することにより1対1写像

$$\mathrm{Ext}^1(L,\mathbb{G}_{m,A}) \longrightarrow H^1_{et}(L,\mathbb{G}_{m,A})$$

を得る。更に、Hilbert の定理90により、$H^1_{et}(L,\mathbb{G}_{m,A}) \simeq \mathrm{Pic}(L/A)$ となり、L は affine かつ UFD であるから、

$$\mathrm{Pic}(L/A) = (0)$$

を得、定理IIIの結果を得る。

この定理IIIを用いて、上の例にない新しい W_2 の torus への変形を与えることが出来る。実際、$\underline{M}\setminus\{0\} \ni \lambda_1, \lambda$ ($\lambda_1 \neq i\lambda$ $(i=1,\cdots,p-1)$) に対し、

$$\mu = \lambda_1(\lambda_1-\lambda)\cdots(\lambda_1-(p-1)\lambda),$$

$$\lambda_i=(1/i!)\lambda_1(\lambda_1-\lambda)\cdots(\lambda_1-(i-1)\lambda) \quad (i=1,\cdots,p-1),$$

$$\phi(x) = 1+\lambda_1 x+\cdots+\lambda_{p-1}x^{p-1} = (1+\lambda x)^{\lambda_1/\lambda} \pmod{\mu}$$

とおくとき、ϕ は準同型

$$\phi : \underline{G} \longrightarrow \mathbb{G}_{m,A}$$

を与え、次の定理を得る。

<u>定理</u>IV. $\mathrm{char}(A/\underline{M}) = p$ (>0) とし、

$$L^{(\lambda,\mu)} = \mathrm{Spec}\ A[x_1,x_2,1/(\lambda x_1+1),1/(\phi(x_1)+\mu x_2)]$$

は W_2 から $(\mathbb{G}_m)^2$ への変形を与える。

[文献]

[1] T. Sekiguchi & F. Oort, On the deformation of Artin-Schreier to Kummer. Utrecht Univ. Preprint Series Nr.369, 1985.

[2] ———, On the deformations of Witt groups to tori. In Alg. & Top. theories, Kinikuniya Co. Ltd., 283-298 (1985).