数理解析研究所講究録
第609巻 1987年 1-13

加法的でないカテゴリーの Grothendieck環について.

北大理 吉田知行 (Tomoyuki Yoshida)

アーベル圏$\mathcal{C}$に対し，次のような生成元と関係式で定義されるアーベル群を，$\mathcal{C}$のGrothendieck群といい，$G_0(\mathcal{C})$と書く．

生成系．$\mathcal{C}$の各対象Mに対する$[M]$（Mの同型類）．

関係式．各完全系列$0 \to L \to M \to N \to 0$に対する$[M] = [L]+[N]$．

次に，Gを有限群，kを可換環，kG-$\underline{\underline{mod}}$によって，$k$上有限生成かつ射影的な$kG$-加群のカテゴリーを表わす．$R_k(G) := G_0(kG\text{-}\underline{\underline{mod}})$とおく．ふたつの$kG$-加群$M$, Nに対し，$M \otimes_k N$はkG-加群（$g\cdot(m \otimes n) := (gm) \otimes (gn)$）だから，積を$[M]\cdot[N] := [M \otimes_k N]$とすることによって$R_k(G)$は環となる．これがいわゆるGrothendieck環で，$k = \mathbb{C}$の場合はGの指標環と同型である．また，関係式として，$[M \oplus N] = [M]+[N]$

をとれば，表現環とかGreen環と呼ばれる $a_k(G)$ が得られる．

アーベルでなる加法的でさえないカテゴリーに対しても，Grothendieck環と呼びうる環が定義できることがある．具体例として以下のものが挙げられる．

a) 有限群のBurnside環．

b) 有限半順序集合のMöbius環．

c) Necklace環やWitt vectorの環．

d) トポスの K_0-環と G_0-環．

e) 有限カテゴリーの抽象Burnside環．

このうちBurnside環とMöbius環はL. Solomonによって1967年に導入された．その後Burnside環の方はDressやtom Dieckによって研究され，群の表現論や同変トポロジーの重要な道具になった．以下の議論はこの有限群のBurnside環の理論をモデルにしている．

§1．有限群のBurnside環．

以下，Gを有限群，$Set_f{}^G$ を有限G集合のカテゴリーとする．$X, Y \in Set_f{}^G$ に対し，2つのG-集合

$X + Y$: disjoint union

$X \times Y$: Cartesian product（作用 $g\cdot(x,y) := (gx, gy)$）

が定義される．明らかに

$$(A+B)\times X \cong A\times X + B\times X, \quad X\times Y \cong Y\times X,$$

などが成立するので，同型類の集合 $Set_f^G/\cong$ は semi-ring（環の公理から，加法＋についての逆元の存在を除いたもの）になる．このGrothendieck環を $B(G)$ と書き，G のBurnside環という．即ち，$B(G)$ は，同型類 $[X]$，$X\in Set_f^G$ を生成系とし，関係式 $[X+Y]=[X]+[Y]$ で定義される加法群で，積 $[X]\cdot[Y]:=[X\times Y]$ を乗法とするものである．

次はBurnside環の基本定理である．

定理．次のような完全系列がある：

$$0\to B(G)\xrightarrow{\varphi}\prod_{(H)\in C(G)}\mathbb{Z}\xrightarrow{\psi}\prod_{(H)\in C(G)}(\mathbb{Z}/|WH|\mathbb{Z})\to 0 \quad (\text{完全}).$$

ここで，$C(G)$ は G の部分群の G-共役類の集合，(H) は $H\leq G$ を含む共役類，$WH:=N_G(H)/H$ とおいた．さらに写像 φ と ψ は次のように定義される．

$$\varphi=(\varphi_H),\ \varphi_H:[X]\mapsto |X^H| \quad, X^H\text{は固定点集合},$$

$$\psi=(\psi_H),\ \psi_H:(x(H))_{H\leq G}\mapsto \sum_{gH\in WH} x(\langle g\rangle H) \mod |WH|.$$

この定理は本質的にはDressによる．この定理から，Burnside環に関する実に多くに事柄が従がう．例えば，素イデアルスペクトラム $Spec\,B(G)$，$B(G)_{(p)}:=\mathbb{Z}_{(p)}\otimes B(G)$ のの巾等元公式，

Dress の induction 定理，等々．次の結果もある：

定理．G が可換な Sylow 2 部分群をもつとする．このとき，単数群 $B(G)^*$ の位数（2のベキ）は，G の部分群 S で $S = O^{2'}(S)$ ($=\langle 2\text{-元}\rangle$) なる S の共役類と $N_G(S)$ の構造から計算できる．

§2．トポスの G_0- 及び K_0-ring.

以下，$\mathcal{E}$ は small なカテゴリーで，始対象 ϕ，直和 $A+B$，さらに push out をもつとする．

$K_0(\mathcal{E})$ を直和 $+$ に関する $\mathcal{E}/\cong$ の Grothendieck 群とする．また，$K_0(\mathcal{E})$ の部分群 $M(\mathcal{E})$ を，

$$M(\mathcal{E}) := \left\langle \begin{matrix} [A]-[B] \\ \quad [C]+[D] \end{matrix} \;\middle|\; \begin{tikzcd} A \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] & B \arrow[d, tail] \\ C \arrow[r, tail] & D \end{tikzcd} \text{ は pushout} \right\rangle$$

で定義する．

もし $\mathcal{E}$ が十分な injective object をもつような abelian category なら，上の $G_0(\mathcal{E})$ は普通の G_0 群に同型である．

そこで次を考える．

<u>Question</u>．$\mathcal{E}$ が直積 $A \times B$ と終対象 $\mathbf{1}$ をもつとき，いかなる条件のもとで，$G_0(\mathcal{E})$ と $K_0(\mathcal{E})$ は $+$ と $\times$ によって環構造をもつか？

これは言い換えると，$^\forall X \in \mathcal{E}$ に対し functor $(-)\times X : \mathcal{E} \to \mathcal{E} ; A \mapsto A\times X$ が，直和と（mono の）pushout を保つための $\mathcal{E}$ の条件ということになる．良く知られているように，

(*) $^\forall X$ に対し，$(-)\times X : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ が右 adjoint $(-)^X : \mathcal{E} \to \mathcal{E} ; A \mapsto A^X$ を持つ．

をみたせば，$(-)\times X$ は colimit（とくに $+$, ϕ, pushout）を保つ．

<u>Def.</u> $\mathcal{E}$ が <u>Cartesian closed</u> $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\mathcal{E}$ が finite limit, finite colimit を持ち，(*) をみたす．

<u>Lemma.</u> $\mathcal{E}$ が small Cartesian closed なら，$K_0(\mathcal{E})$ と $G_0(\mathcal{E})$ は環になる．

<u>Example.</u> $\mathcal{E} = \mathcal{S}et_f{}^G$，$G$：有限群 $\Rightarrow K_0(\mathcal{E}) = G_0(\mathcal{E}) = B(G)$.
この場合，$Y^X = \{f : X \to Y$（単なる写像）$\}$，$\sigma f : x \mapsto \sigma f(\sigma^{-1}x)$ $(\sigma \in G,\ f \in Y^X)$ である．

有限群の Burnside 環は，G-functor という特徴的な性質を持っており，それによって多くの結果が示された．$G_0(\mathcal{E})$ と $K_0(\mathcal{E})$ についても同様のことが言えればありがたい．そのためにコンマカテゴリーの概念を導入する．

<u>Def.</u> カテゴリー$\mathcal{E}$とobject Xに対し，コンマカテゴリー$\mathcal{E}/X$を次で定義する．

object は $\alpha : A \to X$ の形の($\mathcal{E}$の) morphism.

morphism $f : (A \xrightarrow{\alpha} X) \to (B \xrightarrow{\beta} Y)$ は，$\mathcal{E}$の morphism $f : A \to B$ で
$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\alpha"'] & \circlearrowleft & B \arrow[dl, "\beta"] \\ & X & \end{tikzcd}$$
なるもの．

$\mathcal{E}$が Cartesian closed とする．このとき，$\forall f : X \to Y$ に対し，adjoint pair $\Sigma_f \dashv f^*$ がある (i.e. Σ_f は f^* の左 adjoint)：

$$\mathcal{E}/X \underset{f^*}{\overset{\Sigma_f}{\rightleftarrows}} \mathcal{E}/Y \qquad \begin{array}{l} \Sigma_f : (A \xrightarrow{\alpha} X) \longmapsto (A \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{f} Y) \\ f^* : (B \xrightarrow{\beta} Y) \longmapsto (B \times_Y X \xrightarrow{pr} X) \end{array}$$

Σ_f は pullback，したがって mono を保つ．もちろん colimit も保つから，Σ_f は G_0 と K_0 の加法的準同型写像を誘導する．f^* の方は一般に直和や push out を保たないのでこうはいかない．しかし次の条件

(**) $\forall X \in \mathcal{E}$ に対し $\mathcal{E}/X$ が Cartesian closed,

$\Rightarrow$ Σ_f と f^* は写像

$$K_0(\mathcal{E}/X) \underset{f^*}{\overset{\Sigma_f}{\rightleftarrows}} K_0(\mathcal{E}/Y),$$
$$G_0(\mathcal{E}/X) \underset{f^*}{\overset{\Sigma_f}{\rightleftarrows}} G_0(\mathcal{E}/Y)$$

を誘導する．Σ_f は加法的であり，f^* は環準同型である．

条件(**)が成立するには, $\forall f: X \to Y$ に対し, f^* が右 adjoint $\Pi_f : \mathcal{E}/X \to \mathcal{E}/Y$ を持てばよいが, そのようなカテゴリーとしてトポスがある:

<u>Def.</u> $\mathcal{E}$ がトポス

$\underset{def}{\Leftrightarrow}$ 1) $\mathcal{E}$ は Cartesian closed,

2) subobject classifier $x : \mathbb{1} \to \Omega$ がある. 即ち,

$\forall \begin{tikzcd} A \arrow[d, tail] \\ B \end{tikzcd}$ に対し, $\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, tail] & \mathbb{1} \arrow[d, "x"] \\ B \arrow[r, "\chi_A"'] & \Omega \end{tikzcd}$ が pull-back.

2) の条件は, $Sub(B) \cong Hom(B, \Omega)$ を示している. 集合のカテゴリーの場合, Ω は2点集合で χ_A は特性写像である.

<u>Example.</u> $\mathcal{E} = Set_f{}^G$ (G は有限群) はトポス. $H \leq G$ に対し,

$$Set_f{}^G/(G/H) \cong Set_f{}^H$$
$$(\alpha : A \to G/H) \mapsto \alpha^{-1}(H/H)$$

$$\therefore K_0(Set_f{}^G/(G/H)) \cong K_0(Set_f{}^H) \cong B(H).$$

$\Sigma_{G/H \to \mathbb{1}}$, $(G/H \to 1)^*$, $\Pi_{G/H \to \mathbb{1}}$ はそれぞれ, induction, restriction, 乗法的 induction を与える:

$$\begin{tikzcd} Set_f{}^H \arrow[r, bend left, "Ind"] \arrow[r, phantom, shift left=2, "\perp"] \arrow[r, phantom, shift right=2, "\perp"] \arrow[r, bend right, "Ind"'] & Set_f{}^G \arrow[l, "Res"'] \end{tikzcd}. \qquad \begin{array}{l} X \longmapsto G \times_H X \\ Y \longleftarrow\!\!\!\shortmid\ Y \\ X \longmapsto Map_H(G, X). \end{array}$$

これらは Burnside 環の間の写像をひきおこす.

<u>Example</u>. $\mathcal{E} = Set_f^{\Gamma^{op}}$ は small トポス.

$\mathcal{E}_{\mathbb{P}} = \{A \to B \mid A, B \in Set_f\}$ も small トポス.

$K_0(\mathcal{E}_{\mathbb{P}}) \cong \mathbb{Z}[X_1, X_2, \cdots]$ (無限変数多項式環).

後者は分割数の理論と関係が深い.

$\mathcal{E}$ が locally finite $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $|Hom(A, B)| < \infty$ $\forall A, B \in \mathcal{E}$.

$X \in \mathcal{E}$ が連結 $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $X \cong A + B$ なら $A = \phi$ or $B = \phi$.

$X \in \mathcal{E}$ が既約 $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $X \cong A \cup B$ なら $A = X$ or $B = X$. (ここで $A \cup B$ は subobject $A, B \leq X$ の union).

$Con(\mathcal{E}) := \{$連結な object$\}$

$Irr(\mathcal{E}) := \{$既約な object$\}$.

Burnside 環の基本定理がある.

<u>定理</u>. $\mathcal{E}$: locally finite topos.

(i) $K_0(\mathcal{E}) \xrightarrow{\varphi} \prod_{C \in Con(\mathcal{E})/\cong} \mathbb{Z}$ は injective ring hom.

$$[X] \longmapsto (|Hom(C, X)|)_C$$

(ii) $X \cong Y$ in $\mathcal{E}$ $\Leftrightarrow$ $|Hom(C, X)| = |Hom(C, Y)|$ $\forall C \in Con(\mathcal{E})$.

(iii) $G_0(\mathcal{E}) \xrightarrow{\varphi} \prod_{I \in \mathrm{Irr}(\mathcal{E})/\cong} \mathbb{Z}$ は injective ring hom.

$$[X] \longmapsto (|\mathrm{Hom}(I, X)|)_I$$

これらの定理の証明には，次の抽象 Burnside ring の理論を使う．

§3. 抽象 Burnside ring (= ABR)

A をカテゴリーとする．

$\mathbb{Z}A$ は $\mathrm{Obj}(A)/\cong$ で生成された自由アーベル群．

$\varphi : \mathbb{Z}A \to \mathbb{Z}^A$; $a (\in A) \mapsto (|\mathrm{Hom}(i, a)|)_{i \in A/\cong}$.

ここで，$\mathbb{Z}^A := \{\chi : \mathrm{Obj}(A) \to \mathbb{Z} \mid \chi(a) = \chi(b) \text{ if } a \cong b\}$.

<u>Def.</u> $\mathbb{Z}A$ が <u>ABR</u>

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ φ が injective で，$\mathrm{Im}\,\varphi$ が $\mathbb{Z}^A$ の部分環．

<u>Example.</u> $\mathcal{E}$ が locally finite topos とする．

a) $A := \mathrm{Con}(\mathcal{E})/\cong \overset{\text{full}}{\hookrightarrow} \mathcal{E}$ とすれば $\mathbb{Z}A$ は ABR で，

$\mathbb{Z}A \cong K_0(\mathcal{E})$.

b) $A := \mathrm{Irr}(\mathcal{E})/\cong \overset{\text{full}}{\hookrightarrow} \mathcal{E}$ とすれば $\mathbb{Z}A$ は ABR で，

$\mathbb{Z}A \cong G_0(\mathcal{E})$.

以下，$\mathcal{A}$ は skeletal な有限カテゴリーとする．即ち，

$$a \cong b \text{ in } \mathcal{A} \Rightarrow a = b \quad \text{かつ} \quad |\mathrm{Mor}(\mathcal{A})| < \infty .$$

仮定I. $E \subseteq \mathrm{Epi}(\mathcal{A})$, $M \subseteq \mathrm{Mon}(\mathcal{A})$ で $\mathcal{A}$ は，unique (E, M)-factorization property をもつ．即ち

(i) $E \cap M = \mathrm{Iso}(\mathcal{A})$,

(ii) $EE = E$, $MM = M$,

(iii) $\forall f : a \to b$ in $\mathcal{A}$ $\exists! e, m$ s.t.
$$\begin{tikzcd} a \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "e"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & b \\ & \mathrm{im}(f) \arrow[ur, "m"'] & \end{tikzcd}$$

仮定II. $\forall a \in \mathcal{A}$ $\forall \sigma \in \mathrm{Aut}(a)$ に対し，coequalizer

$$a \underset{\sigma}{\overset{}{\rightrightarrows}} a \twoheadrightarrow a/\sigma \qquad (\mathrm{coeq})$$

が存在する．

$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}et_f$ というような場合には，a/σ は $\langle\sigma\rangle$-orbit の集合 $a/\langle\sigma\rangle$ になる．

Proposition 1. $\mathcal{A}$ が仮定I をみたすとする．

$H := (|\mathrm{Hom}(a, b)|)_{a, b \in \mathcal{A}}$, $D := (|\mathrm{Aut}(a)|\delta_{ab})$,

$L := (|M(a, b)|)$, $U := (|E(a, b)|)$

$\Rightarrow H = LDU$, $\det H = \prod_{a \in \mathcal{A}} |\mathrm{Aut}(a)| \neq 0$.

<u>Proposition 2.</u> Hypothesis I, II $\Rightarrow$

$$0 \to \mathbb{Z}A \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}^A \xrightarrow{\psi} \prod_{i\in A} (\mathbb{Z}/|\mathrm{Aut}\, i|\mathbb{Z}) \to 0 \quad \text{(exact)}$$

$$\varphi : a(\in A) \longmapsto (|\mathrm{Hom}(i, a)|)_i$$

$$\psi : (x(i))_i \longmapsto \Big(\sum_{\sigma \in \mathrm{Aut}(i)} x(i/\sigma) \mod |\mathrm{Aut}\, i| \Big)_i$$

<u>Theorem.</u> Hyp I, II $\Rightarrow$ $\mathbb{Z}A$: ABR.

<u>Example.</u> $A = \mathrm{Con}(\mathcal{S}et_f{}^G)/\cong \ \ni G/H \Rightarrow \mathrm{Aut}(G/H) \cong WH := N_G(H)/H$. よってこの場合上の定理はBurnside環の基本定理を与える. $A = \{[G/H] \mid (H) \in C(G)\}$ に注意.

仮定I, IIをみたすカテゴリーについて, Mackey functorが定義され, ある種のtransfer定理も成立する. Hecke環もある.

§4. Möbius環.

Pを有限半順序集合とする. Pをカテゴリーとみなし, $\hat{P} := \mathcal{S}ets_f{}^{P^{op}}$ とおくと, $\hat{P}$はトポス. $K_0(\hat{P})$は大きすぎるが, $G_0(\hat{P})$はMöbius環 $\mathrm{M\ddot{o}b}(P)$ に同型になる. ここで $\mathrm{M\ddot{o}b}(P)$ は P を基底とする自由アーベル群に,

$$p\cdot q := \sum_{r\in P}\Bigl(\sum_{x\le p,q}\mu(r,x)\Bigr)r \qquad p,q\in P$$

によって積を定義したもの。μ は Möbius 関数である。

$\mathbb{Z}P$ は ABR になる:

$$\varphi : \mathbb{Z}P \rightarrowtail \mathbb{Z}^{P} \ ;\ p(\in P) \longmapsto (\zeta(i,p))_i$$

$$\zeta(i,p) := \begin{cases} 1 & i\le p \\ 0 & i\not\le p. \end{cases}$$

しかも、

$$\begin{array}{ccccc} G_0(\hat{P}) & \cong & \mathrm{M\ddot{o}b}(P) & \cong & \mathbb{Z}P. \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & & & \\ [h_p] & \leftrightarrow & p & \leftrightarrow & p. \end{array}$$

References.

1. T. tom Dieck, "Transformation Groups and Representation Theory", Springer LN 766 (1979).

2. N. Metropolis-G.C.Rota, Witt vectors and the algebra of necklaces, Adv. Math. 50 (1983), 95-125.

3. T. Yoshida, Idempotents of Burnside rings and Dress induction theorem, J. Algebra 80 (1983), 90-105.

4. T. Yoshida, The Moebius algebra as a Burnside ring, Hokkaido Math. J. 13 (1984), 362-376.

5. T. Yoshida, On the unit groups of Burnside rings, to appear.

6. Johnstone, "Topos Theory", Academic Press (1978).

7. T. Yoshida, Idempotents and transfer theorems of Burnside rings, character rings and span rings, in "Algebraic and Topological Theories", 589-615, Kinokuniya, Tokyo, 1985.

8. T. Yoshida, On the Burnside rings of finite groups and finite categories, to appear.