数理解析研究所講究録
第609巻 1987年 14-21

Grothendieck 群のノルム写像

北大理学部　丹原大介（Daisuke Tambara）

L/K が体の有限次分離拡大のとき，L 加群 V の Corestriction とよばれる K 加群 $\mathrm{Cor}_{L/K} V$ がある．例えば L/K が G をガロア群とするガロア拡大のとき，$\mathrm{Cor}_{L/K} V$ は V の G による共役たちのテンソル積の G で固定される部分である．A が可換 K 代数なら同様に $\mathrm{Cor}_{L/K} : L\otimes A$ 加群 $\longrightarrow$ A 加群がある．これは $\otimes$ は保つが $\oplus$ は保たない．しかし（射影加群の）K_0 の間の写像 $K_0(L\otimes A) \longrightarrow K_0(A)$ を $L\otimes A$ 加群 V の類 [V] を $[\mathrm{Cor}_{L/K} V]$ にうつすように定義できる．このことの証明とそれに関連することがらについてのべる．

§1 K_0 の norm map

L/K は体の有限次分離拡大．$\tilde{K}/K$ は L を含む有限次ガロア拡大で，$G = \mathrm{Gal}(\tilde{K}/K)$，$H = \mathrm{Gal}(\tilde{K}/L)$．すると G/H は $\Phi = \mathrm{Hom}_{K\text{-alg}}(L, \tilde{K})$ と同一視される．L 加群 V に対し $\Phi \ni \phi : L \longrightarrow \tilde{K}$ による係数拡大 $\tilde{K} \otimes_{\phi} V$ を $\phi_* V$ で表わす．

$G \ni \sigma : \tilde{K} \longrightarrow \tilde{K}$ による係数拡大 $\tilde{K} \underset{\tilde{K}}{\otimes} (\ \ )$ も $\sigma_*(\ \ )$ で表わす.
L加群Vに対して$\tilde{K}$上のテンソル積 $\underset{\phi\in\Phi}{\otimes} \phi_* V$ をつくると，自然な同型 $\sigma_*(\otimes \phi_* V) \simeq \otimes(\sigma\phi)_* V \simeq \otimes \phi_* V$ は $\otimes\phi_* V$ 上にGの semi-linear action をさだめる. そこで

定義: $Cor_{L/K} V = (\otimes \phi_* V)^G$ (G不変元の全体)

とすると，$Cor_{L/K} V$ はK加群で $\tilde{K} \otimes Cor_{L/K} V \cong \otimes \phi_* V$.

注1. $f : X \longrightarrow Y$ が scheme の etale covering なら X上の locally free module F に対し，$Cor_{X/Y} F$ が同様に定義される.

注2. AがL上の (not neces. commutative) algebra なら $Cor_{L/K} A$ はK上の algebra で，$Cor_{L/K}$: A加群 $\longrightarrow$ $Cor_{L/K} A$ 加群も定義される.

注2'. XがL上の scheme なら Restriction of scalars $\prod_{L/K} X$ はK上の scheme で $Cor_{L/K}$: X加群 $\longrightarrow$ $\prod_{L/K} X$ 加群が定義される.

これらのそれぞれの場合にノルム写像 $K_0(X) \longrightarrow K_0(Y)$, $K_0(A) \longrightarrow K_0(Cor\,A)$, $K_0(X) \longrightarrow K_0(\prod_{L/K} X)$ がひきおこされる. 注1の場合の証明を与える.

一般にZが有限群Gの作用する scheme のとき有限G集合Aに対して $(P(X)^A, G)$ で次のようなものを対象とする圏をあらわす. $\{F_a\ (a \in A),\ \varphi_{\sigma,a}\ (\sigma \in G,\ a \in A)\}$. ここで

$F_a \in P(Z)$ i.e. Z 上の locally free module, $\varphi_{\sigma,a} : \sigma^* F_{\sigma(a)} \xrightarrow{\sim} F_a$ s.t. $\varphi_{\sigma,a}$ たちは結合法則をみたす。これは完全圏でその $K_0 = K_0(P(Z)^A, G)$ がある。$Z \longrightarrow Y$ が etale Galois covering のときは，$(P(Z)^{\{1点\}}, G) \simeq P(Y)$，$(P(Z)^G, G) \simeq P(Z)$ で $\mathrm{Cor} : P(Z) \longrightarrow P(Y)$ は $\{F_\sigma\}_{\sigma\in G} \longmapsto \bigotimes_{\sigma\in G} F_\sigma$ に対応する。一般の場合に G 集合の射 $f : A \longrightarrow A'$ があれば，$f^* : K_0(P(Z)^{A'}, G) \longrightarrow K_0(P(Z)^A, G)$，$f_* : K_0(P(Z)^A, G) \longrightarrow K_0(P(Z)^{A'}, G)$ がひきおこされる。さて G 集合 Φ が与えられたとして，$S = 2^\Phi = \{\Phi$ の部分集合$\}$，$S' = \{(U, U') \in S \times S \mid U \cap U' = \phi\}$ とおく。G 写像 $j : S' \hookrightarrow S \times S$，$u : S' \longrightarrow S$ $(U, U') \longmapsto U \cup U'$ がある。$K_0(P(Z)^S, G)$ 上に演算 $\cup$ を

$$\cup : K_0(P(Z)^S, G) \times K_0(P(Z)^S, G) \xrightarrow[\boxtimes]{} K_0(P(Z)^{S\times S}, G)$$
$$\xrightarrow[j^*]{} K_0(P(Z)^{S'}, G) \xrightarrow[u_*]{} K_0(P(Z)^S, G)$$

で定義する。また $F = \{F_\phi\}_{\phi\in\Phi} \in (P(Z)^\Phi, G)$ に対して $\{\bigotimes_{\phi\in U} F_\phi\}_{U\subset\Phi}$ の $K_0(P(Z)^S, G)$ での類を $\rho(F)$ とおく。次の二点が示される。

- $+$, $\cup$ に関し $K_0(P(Z)^S, G)$ は graded ring
- $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$ (exact) ならば $\rho(F) = \rho(F') \cup \rho(F'')$

また $\rho(F) = 1 + (\text{degree} > 0)$ の形でとくに $K_0(P(Z)^S, G)$ の可逆元。

これでabel群の準同型 $K_0(P(Z)^\Phi, G) \longrightarrow K_0(P(Z)^S, G)^*$ s.t. $[F] \longmapsto \wp(F)$ が定まる． $\{\Phi\} \subset S$ への制限をとれば $K_0(P(Z)^\Phi, G) \longrightarrow K_0(P(Z), G)$ $[\{F_\phi\}] \longmapsto [\otimes F_\phi]$ がえられる．注1の場合，$Z \longrightarrow Y$ を etale Galois として $X = Z/H$, $H \leqq G$, $\Phi = G/H$ とすれば，これが $Cor_{X/Y} : K_0(X) \longrightarrow K_0(Y)$ を与える．

注4．affine の場合には $K_0(X)$ の relation は直和によるものであり，このような場合に⊕を保たないある種の関手を K_0 上の operation に拡張する方法として，Dress の多項式写像の方法がある．これは有限群の表現環上で乗法的 induction を定義するのに使われた（[2]）．上のやり方は relation が完全列による場合にも使えるので，[2] で扱われた relative な表現環上で乗法的 induction を定義することができる．

注5．$Y \longrightarrow Z$ が n 次の etale covering で Y, Z は体上の non-singular variety とする．Y, Z の K_0 は coherent sheaf の K_0 と同一視され，$Fil^k K_0$ を codim Supp $F \geqq k$ なる coherent F の類で生成される K_0 の部分群とする．norm map $K_0(Y) \longrightarrow K_0(Z)$ は $Fil^k K_0(Y)$ を $Fil^{kn} K_0(Z)$ にうつす．また rational equivalence ring についても norm map $A^k(Y) \longrightarrow A^{kn}(Z)$ が定義できる

注6. L/K が n 次のガロア拡大のとき，写像 $K_{2i}(L) \longrightarrow K_{2ni}(K)$ で $K_{2ni}(K) \longrightarrow K_{2ni}(L)$ を合成すると $x \longmapsto \prod_{\sigma \in G} x^{\sigma}$ となるものはあるか？

§2. Mackey λ-ring

vector bundle の exterior power $F \mapsto \Lambda^i F$ は $K_0(X)$ 上の operation $\lambda^i : [F] \longmapsto [\Lambda^i F]$ をひきおこす．λ^i たちの $K_0(X)$ への作用の仕方を抽象化して operation の環 $\mathcal{U} = \mathbb{Z}[\lambda^1, \lambda^2, \cdots]$ を考え $\mathcal{U}$ が同じような仕方で作用する環を λ-ring という．$\mathcal{U}$ はいろいろな構造をもち，任意の可換環 S に対して $\mathrm{Hom}_{ring}(\mathcal{U}, S)$ は可換環になる．$\mathcal{U}$ または $\mathrm{Hom}_{ring}(\mathcal{U}, -)$ は universal ring とよばれる．$X \longrightarrow Y$ が G をガロア群とする etale covering のとき，各部分群 $H \leqslant G$ ごとに operation $\lambda^i : K_0(X/H) \longrightarrow K_0(X/H)$ があるが，この他に $H \leqslant H' \leqslant G$ のとき，pull back $K_0(X/H') \longrightarrow K_0(X/H)$, trace $K_0(X/H) \longrightarrow K_0(X/H')$, norm $K_0(X/H) \longrightarrow K_0(X/H')$, H の基礎体 K 上の指標環 $R(H)$ の作用 $R(H) \otimes K_0(X/H) \longrightarrow K_0(X/H)$ がある．これらの operation たちから universal ring に相当するものを定義する．以下有限群 G と体 K を固定する．

定義：M が Mackey functor とは有限 G 集合 A に対し abel 群 $M(A)$ が対応し，G-map $f : A \longrightarrow A'$ に対し 2 つの準同型 $f^*: M(A') \longrightarrow M(A)$, $f_* : M(A) \longrightarrow M(A')$ が対応し，次をみたすこ

とをいう．

(i) $f \mapsto f^*$, $f \mapsto f_*$ は関手．

(ii) M は直和をたもつ．

(iii)
$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "g"] \\
A' \arrow[r, "h'"] & B'
\end{tikzcd}
$$
が pull back diagram なら $g^* h'_* = h_* f^*$．

G集合 G/H に対し K[H] の Gro. group を R(G/H) として Mackey functor $R : G/H \mapsto R(G/H)$ がえられる．以下 R はこれを表わす．2つの Mackey functor M，N から Mackey functor $M \otimes N$ をつくれるので，Mackey functor としての ring（R はそう），R-algebra が自然に定義される．可換な R-algebra のみ考える．R-algebras から R-algebras へのある関手 Λ と自然変換 $w : \Lambda \longrightarrow \Lambda \circ \Lambda$ が定義され，さらに Mackey λ-ring とは R-algebra S で次の可換性をみたす R-algebra homomorphism $\lambda : S \longrightarrow \Lambda(S)$ のあたえられたものをいう．

$$
\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\lambda"'] & \Lambda(S) \arrow[d, "\Lambda(\lambda)"] \\
\Lambda(S) \arrow[r, "w(S)"] & \Lambda \circ \Lambda(S)
\end{tikzcd}
$$
．

普通の λ-ring では $\Lambda(S) = \mathrm{Hom}_{ring}(u, S) = 1 + S[[t]]^+$ である．（初項が1の形式巾級数の環）　Λ, w の定義は講演で詳

しくのべた． $\Lambda(S)$ の G 集合 A での値はある Mackey functor (R-algebra) u_A により $\Lambda(S)(A) = \mathrm{Hom}_{R\text{-alg}}(u_A, S)$ と表現される． u_A が universal ring に相当するもので，大ざっぱに言って $(\underbrace{GL\times\cdots\times GL}_{\#A\,\text{コ}})\rtimes G$ の多項式表現の Grothendieck 環からえられる． X が G の作用する K 上の scheme のとき， $G/H \longmapsto K_0(\{X\text{上の}H\text{-bundle}\})$ は Mackey λ-ring になる． これはこの section のはじめにあげた operation たちの formal な関係をひとまとめに表わしている．

§3. Polynomial functors

§2 のはじめにのべた operations の K_0 への作用は polynomial functor の X 上の module への作用からきている． $\mathcal{U} = \mathbb{Z}[\lambda^1, \lambda^2, \cdots]$ は K 加群から K 加群への polynomial functors の Gro. ring であるが，我々の場合は，体拡大 L/K に対して L 加群から K 加群への K 上の polynomial functors を考えることになる．（[3] では K が標数 0 の閉体のとき K 上有限次の algebra A 上の射影加群の圏から K 加群の圏への polynomial functor があつかわれている） D が K 上有限次の斜体で中心が K 上分離的のとき， D 加群から K 加群への K 上の polynomial functors の Gro. ring が求まるが複雑な形をしている．

REFERENCES

1. P. Berthelot, Généralités sur les λ-Anneaux, SGA 6

2. A.W.M. Dress, Operations in representation rings, Proc. Symposia in Pure Math. XXI (1971)

3. I.G. Macdonald, Polynomial functors and wreath products, Journal of Pure and Applied Algebra 18 (1980)