数理解析研究所講究録
第609巻 1987年 39-51

OrderのPicard群について

国士舘大 工 関口勝右 (Katsusuke Sekiguchi)

Fröhlich([2])によって導入されたlocally free Picard groupの概念は整域におけるideal class groupの概念の非可換環への拡張と考えられ，それ自体が興味深いものであるが，最近この理論の1つの重要な応用として整係数群環の同型問題の解法が考えられるようになりこの問題に大きな進展をもたらした。

今回の報告では，まず[2],[3]で得られたlocally free Picard groupに関するいくつかの基本的な性質について述べ次にそれらの同型問題への応用について述べる。

§1. Picard group と Automorphism group

RをDedekind domain Kをその商体，Aをseparable K-algebra，ΛをAのR-orderとする。

(Λ,Λ)-bimodule M が R 上の bimodule であるとは，任意の $r\in R$ と任意の $m\in M$ に対して $rm=mr$ が成り立つことである。以後このことを記号で M/R と書く。

<u>定義(1,1)</u>　(Λ,Λ)-bimodule M/R が R 上 invertible であるとは，(Λ,Λ)-bimodule N/R と bimodule isomorphisms $\lambda: M\otimes_\Lambda N \cong \Lambda$，$\mu: N\otimes_\Lambda M \cong \Lambda$ が存在して次の diagram を可換にすることである。

$$\begin{tikzcd}
M\otimes N\otimes M \arrow[r, "\lambda\otimes 1"] \arrow[d, "1\otimes\mu"'] & \Lambda\otimes M \arrow[d] \\
M\otimes\Lambda \arrow[r] & M
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
N\otimes M\otimes N \arrow[r, "\mu\otimes 1"] \arrow[d, "1\otimes\lambda"'] & \Lambda\otimes N \arrow[d] \\
N\otimes\Lambda \arrow[r] & \Lambda
\end{tikzcd}$$

Invertible (Λ,Λ)-bimodule M/R の bimodule isomorphism class を (M) と書き，これらの同型類全体の集合に積を $(M)(M')=(M\otimes_\Lambda M')$ で定めたものは群になる。これを

$$Pic_R(\Lambda) = \{(M) \mid M \text{ は invertible } (\Lambda,\Lambda)\text{-bimodule}/R\}$$

と書く。特に $R=$ center of Λ としたとき $Pic_{cent(\Lambda)}(\Lambda)$ を $Picent(\Lambda)$ と書く。また，$Picent(\Lambda)$ の部分群 $LFP(\Lambda)$ を

$LFP(\Lambda) = \{(M)\in Picent(\Lambda) \mid M$ は left Λ-module としては locally free $\}$ と定める。また次の記号を用いる。

$Aut_R(\Lambda)$: Λ の R-automorphisms 全体のなす群

$In(\Lambda)$: Λ の inner automorphisms 全体のなす群

$Autcent(\Lambda)$: Λ の central automorphisms 全体のなす群

(i.e. $f(c) = c$ for ${}^\forall c \in cent(\Lambda)$)

すると $Aut_R(\Lambda) \triangleright In(\Lambda)$ なので

$$Out_R(\Lambda) = Aut_R(\Lambda)/In(\Lambda)$$

$$Outcent(\Lambda) = Autcent(\Lambda)/In(\Lambda)$$

と定める。

(Λ, Λ)-bimodule M と Λ の R-automorphisms f, g に対し ${}_fM_g$ を加群としては M と同じで M の左右の作用を $\lambda \circ m \circ \gamma \equiv f(\lambda) m g(\gamma)$ ($\lambda, \gamma \in \Lambda$, $m \in M$) で定めた (Λ, Λ)-bimodule とする。$Pic_R(\Lambda)$ と $Out_R(\Lambda)$ の関係は次の結果より出る。

<u>定理 (1, 2)</u> ([2])

$\omega_0 : Aut_R(\Lambda) \longrightarrow Pic_R(\Lambda)$ を $\omega_0(f) = ({}_1\Lambda_f)$ で定める ($f \in Aut_R(\Lambda)$) と ω_0 は group homomorphism で $Ker\, \omega_0 = In(\Lambda)$ となる。よって

$\omega : Out_R(\Lambda) \longrightarrow Pic_R(\Lambda)$ が導かれる。特にこの時 $Outcent(\Lambda) \longrightarrow LFP(\Lambda) \subset Picent(\Lambda)$ となる。

R の prime ideal $\mathfrak{z}$ に対して $\mathfrak{z}$-adic completion を $R_{\mathfrak{z}}$ とかく。また $\Lambda_{\mathfrak{z}} = R_{\mathfrak{z}} \otimes_R \Lambda$ と書く。$C(\Lambda)$ で Λ の locally free class group を表す。次の結果が知られている。

<u>定理(1.3)([3])</u>

Λ : commutative $\Longrightarrow LFP(\Lambda) \cong C(\Lambda)$

<u>定理(1.4)([2])</u>

$$\mathrm{Outcent}(\Lambda_{\mathfrak{z}}) \cong LFP(\Lambda_{\mathfrak{z}})$$

<u>定理(1.5)([2])</u>

(1) R の有限個の prime $\mathfrak{z}$ を除いて $LFP(\Lambda_{\mathfrak{z}}) = 1$.

(2) 次の sequence は exact

$$1 \longrightarrow LFP(\mathrm{cent}(\Lambda)) \xrightarrow{\tau} LFP(\Lambda) \longrightarrow \prod_{\mathfrak{z}:\text{prime ideal}} LFP(\Lambda_{\mathfrak{z}}) \to 1$$

但し、$\tau((L)) = (L \otimes_{\mathrm{cent}(\Lambda)} \Lambda)$.

後半で $\mathrm{Outcent}(\Lambda)$ の決定が同型問題への応用に重要な役割をはたすことが示されるのでここではこの群を具体的に決定するさいに有用な補題を述べる。

R-algebras の pullback diagram

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{g_2} & \Lambda_2 \\ {\scriptstyle g_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h_2} \\ \Lambda_1 & \xrightarrow{h_1} & \bar{\Lambda} \end{array}$$

を考えよう。但し，g_1, g_2, h_1, h_2 は surjection で Λ と $\Lambda_1 \times \Lambda_2$ は（同一の）separable K-algebra A の R-orders とする。この diagram より次の commutative diagram が導かれる。

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Outcent}(\Lambda) & \xrightarrow{g_2^\circ} & \mathrm{Outcent}(\Lambda_2) \\ {\scriptstyle g_1^\circ}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h_2^\circ} \\ \mathrm{Outcent}(\Lambda_1) & \xrightarrow{h_1^\circ} & \mathrm{Out}(\bar{\Lambda}) = \mathrm{Aut}(\bar{\Lambda})/\mathrm{In}(\bar{\Lambda}) \end{array}$$

但し，g_1°, g_2°, h_1°, h_2° は各々 g_1, g_2, h_1, h_2 より自然に導かれる写像である。このとき，写像 $\mathrm{Outcent}(\Lambda) \xrightarrow{g_1^\circ \oplus g_2^\circ} \mathrm{Outcent}(\Lambda_1) \oplus \mathrm{Outcent}(\Lambda_2)$ に対して次が成り立つ。

<u>補題 (1.6) ([1])</u>

$$\mathrm{Ker}(g_1^\circ \oplus g_2^\circ) \cong \frac{\{h_1(U(\Lambda_1)) \cdot h_2(U(\Lambda_2))\} \cap U(\mathrm{cent}(\bar{\Lambda}))}{h_1(U(\mathrm{cent}(\Lambda_1))) \cdot h_2(U(\mathrm{cent}(\Lambda_2)))}$$

§2. 同型問題

Sを可換環($\ni 1$)，G，Hを有限群とする。(この報告ではつねに有限群を考える)。次の問題を考える。

<u>問題(同型問題)</u>

$SG \cong SH$ (as S-algebras) のとき $G \cong H$ (as groups) か？

この問題に関してはSをどのような環にするかが本質的な意味をもつ。

<u>例(2.1)</u>　$S=\mathbb{C}$：複素数体，G：abelian group とすると $\mathbb{C}G \cong \underbrace{\mathbb{C}\oplus\cdots\oplus\mathbb{C}}_{|G|}$ となる。よって $|G|=|H|$ となる任意の abelian group H に対して $\mathbb{C}G \cong \mathbb{C}H$ となり，反例はいくらでも作れる。

<u>例(2.2)(Berman)</u>　$S=\mathbb{Q}$：有理数体，p：奇素数，位数 p^3 の non-abelian groups(同型を除いて2種類しかない)を G_1，G_2 とする。

$G_1 = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^{p^2} = 1,\ \tau^p = 1,\ \tau^{-1}\sigma\tau = \sigma^{p+1} \rangle$

$G_2 = \langle \sigma, \tau, \rho \mid \sigma^p = \tau^p = \rho^p = 1,\ \sigma\tau = \tau\sigma\rho,\ \sigma\rho = \rho\sigma,\ \tau\rho = \rho\tau \rangle$

このとき，$G_1 \neq G_2$　だが $\mathbb{Q}G_1 \cong \mathbb{Q}G_2$．

例1，2 でわかるように $S = \mathbb{C}$，$\mathbb{Q}$ のときは反例がある。興味深いのは $S = \mathbb{Z}$（有理整数環）の場合である。この場合は肯定的にも否定的にも解かれていない。以下では $S = \mathbb{Z}$ の場合の同型問題（同型問題/$\mathbb{Z}$　と書く）のみを考える。この場合については次の各々の cases について肯定的に解かれている。

(1)（G. Higman）　G : abelian group

(2)（Obayashi, Whitcomb）　G : metabelian group

本論に入るためにまず次の記号を用意しよう。

$\mathrm{Aut}_S(SG) \ni f$ が normalized であるとは $\varepsilon \circ f(g) = 1$（$\forall g \in G$）が成立することである。但し，$\varepsilon : SG \longrightarrow S$ は augmentation map.

$N\text{-}\mathrm{Aut}_S(SG) = \{$ normalized automorphisms of SG $\}$

とすると $N\text{-}\mathrm{Aut}_S(SG) \supset \mathrm{Autcent}(SG)\mathrm{Aut}(G) \supset \mathrm{In}(SG)\mathrm{Aut}(G)$ が容易にわかる。

<u>定理(2.3)([6])</u>　$\mathbb{Z}_p$を the ring of p-adic integers, Gをp-群とする。また $N\text{-}Aut_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Z}_pG)=In(\mathbb{Z}_pG)Aut(G)$ が成り立つとする。この時Gについての同型問題$/\mathbb{Z}$は肯定的に解かれる。

特にpが奇素数のときは $Aut(\mathbb{Z}_pG)=N\text{-}Aut_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Z}_pG)$ となることが容易にわかるので条件 $N\text{-}Aut_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Z}_pG)=In(\mathbb{Z}_pG)Aut(G)$ は条件 $Out_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Z}_pG)\cong Aut(G)/In(\mathbb{Z}_pG)\cap Aut(G)$ と等しいことが容易にわかる。よってこの場合定理(2.3)は次のように言い換えられる。

<u>定理(2.3)′</u>　$\mathbb{Z}_p$, Gは定理(2.3)と同じ。但しpは奇素数とする。また $Out_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Z}_pG)\cong Aut(G)/In(\mathbb{Z}_pG)\cap Aut(G)$ が成り立つとする。この時Gについての同型問題$/\mathbb{Z}$は肯定的に解かれる。

この定理より $Out_S(SG)$の決定の重要性がわかる。以下ではこの群に関するいくつかの結果を述べよう。まずその subgroup $Outcent(SG)$ について考えよう。次の記号を用意する。任意の有限群Gに対して $Aut_c(G)=\{f\in Aut(G)\mid f(g)\sim(g)$ (conjugate in G) for ${}^{\forall}g\in G\}$,

$In(G)$: G の inner automorphisms 全体のなす群とし，
$Out_c(G) = Aut_c(G)/In(G)$ と定める。すると一般に自然な group homomorphism $\varphi_S : Out_c(G) \longrightarrow Outcent(SG)$ が定まる。次が言える。

命題(2,4)([1]) G を有限 p-群とすると次の group homomorphisms はいずれも injective である。

(1) $Out_c(G) \longrightarrow Outcent(\mathbb{Z}G)$

(2) $Out_c(G) \longrightarrow Outcent(\mathbb{Z}_p G)$

この φ_S がどのような群 G と S (特に $S = \mathbb{Z}_p$) に対して surjection になるかが大きな問題である。

定理(2,5)([6]) G を有限 p-群とすると $N\text{-}Aut_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Z}_p G) = In(\mathbb{Z}_p G) Aut(G)$ が成り立つ。特に p が奇素数のときは $Out_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Z}_p G) \cong Aut(G)/In(\mathbb{Z}_p G) \cap Aut(G)$ が成り立つ。

定理(2,3)と(2.5)より次が成り立つ。

定理(2,6)([6]) G を有限 p-群とする。この時
$\mathbb{Z}G \cong \mathbb{Z}H$ (as $\mathbb{Z}$-algebras) $\Longrightarrow$ $G \cong H$ (as groups).

<u>定理(2.7)([1],[9])</u>　次の各々の群 G に対して $\mathrm{Outcent}(\mathbb{Z}_pG)=1$　(for ${}^{\forall}p$：素数) が成り立つ。

(1)　$G=C_n \rtimes C_m$　, C_n：位数 n の cyclic group , $(m,n)=1$

(2)　D_n：位数 $2n$ の dihedral group

(3)　H_n：位数 $4n$ の quaternion group

(4)　metacyclic p-group , p: odd

次に、定理(2.3) と同 type の次の結果を紹介しよう。

<u>定理(2.8)([8])</u>

$G=A \rtimes B$ とする。但し，A は abelian group , $(|A|,|B|)=1$ また，群 B に対して同型問題/$\mathbb{Z}$ は肯定的に解け，$N\text{-}\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}B)=\mathrm{Autcent}(\mathbb{Z}B)\cdot \mathrm{Aut}(B)$ が成り立つとする。このとき，G についての同型問題/$\mathbb{Z}$ は肯定的に解かれる。

この結果より次の問題の重要性がわかる。

<u>問題(2.9)</u>

$N\text{-}\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G)=\mathrm{Autcent}(\mathbb{Z}G)\mathrm{Aut}(G)$ となる有限群を決定せよ。

この問題に対しては次の結果がある。

定理(2.10)([4],[5],[7])

次の群Gに対して $N\text{-}Aut_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G) = Autcent(\mathbb{Z}G)Aut(G)$ が成立する。

(1) $G = \langle a \rangle B$, ここで $\langle a \rangle$ は cyclic normal subgroup of G かつ B は abelian subgroup of G.

(2) $G = S_n$: n 次対称群

(3) class 2 nilpotent group

References

[1] S. Endo, T. Miyata and K. Sekiguchi, Picard groups and automorphism groups of integral group rings of metacyclic groups, J. Algebra 77 (1982), 286–310.

[2] A. Fröhlich, The Picard groups of non-commutative rings, in particular of orders, Trans. Amer. Math. Soc. 180 (1973), 1–45.

[3] A. Fröhlich, I. Reiner and S. Ullom, Class groups and Picard groups of orders, Proc. London Math. Soc. (3) 29 (1974), 405–434.

[4] G. Peterson, Automorphisms of the integral group ring of S_n, Proc. Amer. Math. Soc. 59 (1976), 14–18.

[5] ———, On the automorphism group of an integral group ring II, Illinois J. Math. 21 (1977), 836–844.

[6] K. Roggenkamp and L. Scott, Isomorphisms of p-adic group rings, Preprint.

[7] S. K. Sehgal, On the isomorphism of integral group rings I, Canad. J. Math. 21 (1969), 410–413.

[8] S. K. Sehgal, S. K. Sehgal and H. J. Zassenhaus, Isomorphism of integral group rings of abelian by nilpotent class two groups, Communications in Algebra, 12(19), (1984), 2401–2407.

[9] K. Sekiguchi, On the automorphism group of the p-adic group ring of a metacyclic p-group, J. Algebra 82 (1983), 488–507 : II, ibid 100 (1986), 191–213.