数理解析研究所講究録
第 609 巻 1987 年 76-94

Lie群のproper作用の同変Whitehead群

大阪市大理 荒木捷朗 (Shôrô Araki)

研究集会では「Whitehead群，同変Whitehead群，G-expansion圏」の表題で，代表者の要請によりexpositoryな話としてなされた講演であるが，やはり細かい点で正確さを期す必要もあり，時間的に不可能である．

そこで，講演中に含まれていた今迄より若干新しい部分についてのみ，表題を変えて報告することにした．

同変Whitehead群についての従来の理論は，コンパクトLie群の作用に関するもの([I1],[I2],[A])で，たゞその展開の最終段階にnonコンパクトLie群のproper作用の(ある制限を受けた)同変Whitehead群があらわれるので，proper作用について統一的に展開する方がよくないかとの髙井氏(都立大)等の御指摘もあり，その線に沿って[A]を再編成してみた．

1. proper作用の同変Whitehead群.

GをLie群とし，Gが作用する空間(G-空間)は常に

局所コンパクト，Hausdorff，とする．（Palais [P] は completely regular，Hausdorff，で論じているが，G-CW 複体等のためには上の若干強い條件の方が便利である．又，これが特に強い制限にならないことは，例えば G がコンパクトのときの有限 G-CW 複体はコンパクト Hausdorff 空間で，上の條件をみたしていることを指摘しておけば充分であろう）．

Lie 群 G が（上の條件を充す）空間 X に左から作用するとする．Palais [P] はこの作用が proper になるための 5 つの同値條件をのべている．その一つをもって proper G-空間を定義する．

$X \supset U$ に対し，$((U, U)) = \{ g \in G \mid gU \cap U \neq \phi \}$ とおく．$\overline{((U, U))}$ がコンパクトのとき，U を thin set という．

G-空間 X が proper（又は proper G-作用をもつ）とは，i) $X \ni {}^{\forall}x$，x は thin な近傍をもつ，ii) $G \backslash X$（orbit 空間）が Hausdorff，を充していること．

定義より，proper G-空間 X の各点 x での isotropy 群 G_x はすべてコンパクトになる．

勿論コンパクト Lie 群の作用はすべて proper である．

G のコンパクト Lie 部分群 H に対し，$G/H \times D^n$（D^n は $\mathbb{R}^n$ の単位 n-disk）は，勿論 proper G 空間で，これを (euclidean) proper n-G-cell という． $f : G/H \times S^{n-1} \to X$（$S^{n-1} = \partial D^n$）を

(連続な) G-写像とし,

$$Y = X \cup_f G/H \times D^n$$

をG空間Xにn次元 proper G-cell を attach した G-空間という。

<u>補題 1.1</u>　X, Y が proper G-空間で, $X = G \cdot C$, C は X のコンパクト集合, となっているとき, G-写像 $f: X \to Y$ は(局所コンパクト空間の間の連続写像として) proper 写像である。

この証明は proper G-作用の基本的性質より容易にわかる。この補題を用いると, 次の命題が示される。

<u>命題 1.2</u>　X は proper G-空間, $Y = X \cup_f G/H \times D^n$ を X に proper G-cell を attach した G-空間とすると, Y も proper G-空間になる。

特に有限個の proper n-G-cells を同時に proper G 空間 X に attach した G 空間 (X の <u>有限 proper n-G-cellular extension</u>) も proper G-空間である。

G-空間の列

$$X = V^{-1} \subset V^0 \subset V^1 \subset \cdots \subset V^{n-1} \subset V^n \subset \cdots$$

で, X は proper G-空間, V^n は V^{n-1} の有限 proper n-G-cellular extension となっているものを考える。各 V^n は proper G-空間である。$V = \operatorname{colim}_n V^n$ は一般にはわからないが, $\exists m > 0$, $V = V^m$ のときには V は proper G-空間で, このとき (V, X) を

有限相対 proper G-CW複体 という．通常のごとく，各

$$V^n - V^{n-1} = \coprod_i b_i^n, \quad b_i^n = G/H_i \times \mathrm{Int}\, D^n,$$

と有限個の proper (開) n-G-cells の disjoint union に分解される．共軛類 (H_i) を G-cell b_i^n の (isotropy) type という．このことより，有限相対 proper G-CW複体 (V, X) においては，$V - X$ は有限個の proper G-cells の disjoint union に分解されている．

上にのべたことの一部をまとめると，

命題 1.3．(V, X) を有限相対 proper G-CW 複体とすると，V は proper G空間である．

elementary G-expansion を通常のごとく定義する ([I 1], [A])．$(W, X) \subset (V, X)$ を有限相対 proper G-CW複体の包含 (即ち，$W-X$ の G-cells は $V-X$ の G-cells の一部よりなる) で，これが

$$(W, X) \nearrow (V, X), \quad \text{elementary G-expansion rel } X,$$

であるとは，

$$V - W = b^{n-1} \sqcup b^n$$

と二つの G-cells よりなり，G-写像

$$f: G/H \times D^n \to V$$

で，$\partial D^n = S^{n-1} = D_+^{n-1} \cup D_-^{n-1}$，$D_+^{n-1} \cap D_-^{n-1} = S^{n-2}$ とおいて

$$f \mid G/H \times \mathrm{Int}\, D^n : G/H \times \mathrm{Int}\, D^n \approx b^n, \text{ G-同相},$$

$$f \mid G/H \times \mathrm{Int}\, D_+^{n-1} : G/H \times \mathrm{Int}\, D_+^{n-1} \approx b^{n-1}, \text{ G-同相},$$

となるものが存在すること。このとき b^{n-1}, b^n は同じ type

(H) とよび, 特に type (H) の elementary G-expansion ということがある.

有限相対 proper G-CW 複体の elementary G-expansions と包含写像とみて, その有限個の合成を <u>formal G-expansion</u> といい, $(W, X) \nearrow (V, X)$ 等と記す.

G の Lie 部分群よりなる集合 $\mathcal{F}$ で次の条件をみたすものを考える: i) $\mathcal{F} \ni {}^{\forall}H$ はコンパクト. ii) $\mathcal{F} \ni H$, $H \sim H'$ (共軛) $\Rightarrow$ $H' \in \mathcal{F}$. このような $\mathcal{F}$ を G の <u>コンパクト部分群の族</u> という. $\mathcal{F}$ は G の compact 部分群のいくつかの共軛類の union としてあらわされる.

X を proper G 空間, $\mathcal{F}$ を G の compact 部分群の族とし, 次の圏 $\mathcal{E}_G(X, \mathcal{F})$ を考える. Obj $\mathcal{E}_G(X, \mathcal{F})$ は有限相対 proper G-CW 複体 (V, X) で, i) $i: X \subset V$ が G-ホモトピー同値, ii) $V-X$ の各 G-cells の type $\subset \mathcal{F}$, をみたすものよりなる. Hom $\mathcal{E}_G(X, \mathcal{F})$ は上の objects 間の formal G-expansions よりなる. 同じ構成で作られた有限相対 proper G-CW 複体は同じとみなせば, この圏は小圏になる. $\mathcal{F} = \{all\} = \{$all compact subgroups$\}$ のとき, $\mathcal{E}_G(X) = \mathcal{E}_G(X, \{all\})$ と書く.

$\mathcal{E}_G(X, \mathcal{F})$ の objects について, $(V, X) \nearrow (W, X)$ のとき, これを同値とみて, この関係で generate された同値関係 $\sim$ を考える.

$$Wh_G(X, \mathcal{F}) = \mathrm{Obj}\, \mathcal{E}_G(X, \mathcal{F}) / \sim$$

$$Wh_G(X) = \mathcal{O}bj\ \mathcal{E}_G(X)/\sim$$

とおく.

$\mathcal{E}_G(X,\mathcal{F})$ の object (V, X) が代表する $Wh_G(X,\mathcal{F})$ の元を $[V, X]$ と書く. $i: X \subset V$ は G-homotopy 同値で i は G-cofibration であるから X は V の (strong) G-deformation retract である. 二つの objects (V_1, X), (V_2, X) に対し

$$(V_1, X) + (V_2, X) = (V_1 \cup_X V_2, X)$$

とおく. V_1, V_2 の X への G-deformation retractions の和により, X は $V_1 \cup_X V_2$ の G-deformation retract. よって $(V_1, X) + (V_2, X)$ は $\mathcal{E}_G(X,\mathcal{F})$ の object になる. この objects の和は morphism を保つから $\mathcal{E}_G(X,\mathcal{F})$ は "category with sum" になる. この和は $Wh_G(X,\mathcal{F})$ の和を導き, $Wh_G(X,\mathcal{F})$ は abelian monoid ($[X, X]$ を 0 元とする) になる. 実は abel 群になるのであるが, それはあとで論ずる.

$f: X \to Y$ を proper G空間の間の G写像とする. $\mathcal{E}_G(X,\mathcal{F})$ の object (V, X) に対し, $(V \cup_f Y, Y)$ は $\mathcal{E}_G(Y,\mathcal{F})$ の object になる. 対応 "$(V, X) \mapsto (V \cup_f Y, Y)$" は morphism と和を保存し, 和を保つ functor

$$f_\#: \mathcal{E}_G(X,\mathcal{F}) \to \mathcal{E}_G(Y,\mathcal{F})$$

となり, 準同型

$$f_*: Wh_G(X,\mathcal{F}) \to Wh_G(Y,\mathcal{F})$$

を誘導する。$f, g: X \to Y$ が G-ホモトープのとき，その G-ホモトピー $F: f \simeq_G g$ を用い，$\mathcal{E}_G(X, \mathcal{F})$ の object (V, X) に対して $(V \times I \cup_F Y, Y)$ なる $\mathcal{E}_G(Y, \mathcal{F})$ の object を考える。$V - X$ の各 G-cell とその上の cylinder とが elementary G-expansion を構成するから，skeleton-wise, G-cell-wise に

$$(V \cup_f Y, Y) \nearrow (V \times I \cup_F Y, Y) \nwarrow (V \cup_g Y, Y)$$

が通常の論法で示され，特に

$$f_*[V, X] = g_*[V, X].$$

つまり，f_* は G-homotopy functor になる。

<u>定理 1.4.</u> $\mathcal{E}_G(X, \mathcal{F})$ の objects の包含 $(X, V) \subset (X, W)$（部分複体）が与えられたとする。（このとき G-retraction $r: V \to X$ が存在し，(W, V) は $\mathcal{E}_G(V, \mathcal{F})$ の object になる）。このとき

$$[W, X] = r_*[W, V] + [V, X] \in Wh_G(X, \mathcal{F}).$$

この定理の証明は [I1], Chap. II, Lemma 2.2，と全く同じであるから省略するが，この定理は同変 Whitehead 群の理論でかなりの重要性をもつ。

<u>定理 1.5.</u> $Wh_G(X, \mathcal{F})$ はアーベル群になる。

証明の概略。(V, X) を $\mathcal{E}_G(X, \mathcal{F})$ の object とする。X は V の G-deformation retract だから，G-retraction $r: V \to X$ が存在する。このとき，M_r を r の mapping cylinder，$\bar{M}_r = M_r/\sim$,

$\sim$ は $pr_1: X\times I \to X$ で $X\times I$ と X とを同一視する同値関係, とおくと $(\bar{M}_r, X)$ は $\mathcal{E}_G(X,\mathcal{F})$ の object で $(X, X)\nearrow(\bar{M}_r, X)$. よって

$$[\bar{M}_r, X] = 0 \in Wh_G(X,\mathcal{F}).$$

包含 $(V, X)\subset(\bar{M}_r, X)$ に対して上の定理1.4を適用すると,

$$0 = [\bar{M}_r, X] = r_*[\bar{M}_r, V] + [V, X].$$

即ち $r_*[\bar{M}_r, X]$ が $[V, X]$ の加法逆元で, $Wh_G(X,\mathcal{F})$ のすべての元は加法逆元をもつ。(3).

特に, $p\text{-}Top_G$ を proper G 空間とその G 写像の圏とすると, 対応:「$X \mapsto Wh_G(X,\mathcal{F})$, "$f: X\to Y$" $\mapsto f_*$」により G-ホモトピー関手

$$Wh_G(\ ;\mathcal{F}) : p\text{-}Top_G \longrightarrow \mathcal{A}b$$

が得られたことになる。

(proper 作用の) 単純ホモトピー理論とは, $Wh_G(X)$ を上の関手としての naturality まで考慮しながら, 直和分解し, その直和因子をより単純なものに帰着させ, 更に直和分解し, …の過程を通って, 最終的にはいくつかの discrete 群の古典的な Whitehead 群の直和との同型を得るもの と理解してよい。

2. 同変単純ホモトピー理論

前節の記号をつづけて使用する。

<u>定理 2.1</u>. (Hauschild) Xについてnaturalな次の直和分解が成立つ.

$$Wh_G(X,\mathcal{F}) \cong \coprod_{(H)\subset\mathcal{F}} Wh_G(X,(H))$$

$$Wh_G(X) \cong \coprod_{(H)} Wh_G(X,(H)).$$

但し、第一の分解での直和は$\mathcal{F}$に含まれるすべての共軛類にわたり、第二の分解では(直和は)Gのすべてのコンパクト部分群の共軛類をわたる.

証明の方針. 第二の直和分解は第一のそれの$\mathcal{F}=\{\text{all}\}$となる特別の場合であるから、第一の直和分解を示せばよい. 先ず特別の場合として、$\mathcal{F}$が<u>有限</u>($\mathcal{F}$に含まれる共軛類の数が有限)の場合に示す. Gのコンパクト部分群の共軛類については「$(H)\leq(K) \Leftrightarrow \exists g\in G,\ gHg^{-1}\subset K$」により順序が入る. $\mathcal{F}$は有限と仮定したから、この順序で極大な元$(H)\in\mathcal{F}$が定まる. $\mathcal{F}'=\mathcal{F}-(H)$とおく. (H)の代表元Hを一つ選び、$\mathcal{E}_G(X,\mathcal{F})$のobject (V,X)に対し、$(G\cdot V^H\cup X, X)$を考える. VのXへのG-deformation retractionを$G\cdot V^H\cup X$に制限すると、(H)の極大性より、これは$G\cdot V^H\cup X$のXへのG-deformation retractionになる. morphismについても同じ考察をすると、和を保つ関手

$$a:\ \mathcal{E}_G(X,\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{E}_G(X,(H))$$
$$\big(\ (V,X) \longmapsto (G\cdot V^H\cup X, X)\big)$$

が得られ、Xについてnaturalな準同型

$$a_* : Wh_G(X, \mathcal{F}) \longrightarrow Wh_G(X, (H))$$

を誘導する。$r : G\cdot V^H \cup X \to X$ を G-retraction とする。maplis についても考察して，準同型

$$b_* : Wh_G(X, \mathcal{F}) \longrightarrow Wh_G(X, \mathcal{F}')$$

$$([V, X] \longmapsto r_*[V, G\cdot V^H \cup X])$$

を得る。r は $i : X \subset G\cdot V^H \cup X$ の G-homotopy inverse であるから，上の対応は r のとり方に寄らず well-defined. 準同型

$$c : Wh_G(X, (H)) \oplus Wh_G(X, \mathcal{F}') \to Wh_G(X, \mathcal{F})$$

を　$c([V_1, X], [V_2, X]) = [V_1 \cup_X V_2, X]$ により与える。定義より

$$(a_* \oplus b_*) \circ c = 1$$

は明らか。

$$c \circ (a_* + b_*) = 1$$

は定理 1.4 より得られる。よって直和分解

$$Wh_G(X, \mathcal{F}) \cong Wh_G(X, (H)) \oplus Wh_G(X, \mathcal{F}')$$

が得られた。$\mathcal{F}$ は有限としたから，あとは $\mathcal{F}'$ について同じ論法をくりかえし，$\mathcal{F}$ が有限のときの直和分解

$$Wh_G(X, \mathcal{F}) \cong \coprod_{(H_i) \subset \mathcal{F}} Wh_G(X, (H_i))$$

が得られる。上の証明の議論より，この右から左への対応は

$$\coprod_i (V_i, X) \longmapsto (\cup_X V_i, X)$$

で与えられていることがわかる。

一般の場合は $\mathcal{F}$ に含まれる有限族 $\mathcal{F}_\alpha$ をすべて考えると，包含について $\mathcal{F} = \operatorname{colim}_\alpha \mathcal{F}_\alpha$ となっている。よって直和

分解と colim との可換性より一般の場合の連結分解が得られる。

注意. 一般の場合でも左辺から右辺への写像は

$$\coprod_{\alpha} [V_\alpha, X] \longmapsto [\bigcup_X V_\alpha, X]$$

になっている。ただし、$\{[V_\alpha, X]\}$ は有限個を除き 0 であるから そこでは代表元を $[X, X)$ でおきかえると $(\bigcup_X V_\alpha, X)$ が well-defined で、そのようになっている。X についての自然性はこの対応から明らかである。

上の証明のやり方は Hauschild [H] のそれとかなり異る。Hauschild の証明は、あまり簡単に書きすぎていて理解しにくい。

H を G のコンパクト部分群とし、NH を H の G における normalizer とすると、NH は G の閉部分群になり、X^H は proper NH-空間になる。H は X^H 上に自明に作用するから、$WH = NH/H$ とおいて、X^H は proper WH-空間になる。

定理 2.2 (Hauschild). X についての自然な同型

$$Wh_G(X, (H)) \cong Wh_{WH}(X^H, (1))$$

が成立つ。

対応は、左から右へは "$[V, X] \mapsto [V^H, X^H]$"、右から左へは "$[W, X^H] \mapsto [G \times_{NH} W \cup_f X, X]$"、$f: G \times_{NH} X^H \to G \cdot X^H \subset X$、で与えられる。この X についての自然性はすぐ

わかる。

ここで注意すべきことは，X が proper 有限 G-CW 複体として $\mathcal{E}_G(X,(H))$ の object (V,X) が proper 有限 G-CW 複体と部分複体の対（Illman 流のやり方）としても，$V-X$ の G-cells と V^H-X^H の G-cells は 1:1 に対応するから V^H-X^H の有限性は保障されるが，X^H は有限 WH-CW 複体には必ずしもならない。相対 G-CW 複体で定義することの利点が proper 作用の同変単純ホモトピー理論で初めてあらわれたと云えるかも知れない。

次に $Wh_{WH}(X^H,(1))$ を更に分解する。

<u>定義</u> proper G-空間 X が<u>局所 G-0-連結</u>とは，$G>^{\forall}H$，コンパクト部分群，に対し X^H が局所弧状連結であること。更に<u>局所 G-1-連結</u>とは，i) X は局所 G-0-連結，ii) $G>^{\forall}H$，コンパクト部分群，に対して X^H の各弧状連結成分が半局所 1-連結（普遍被覆空間をもつ条件）であること。

X は局所 G-0-連結であるとする．X^H を弧状連結成分に分解し，その WH-orbits をまとめると，

$$X^H=\coprod_{\alpha} WH\cdot X^H_{\alpha} \quad (X^H_{\alpha}\text{ はある弧状連結成分})$$

と proper WH-部分空間の位相和に分解される．各 $WH\cdot X^H_{\alpha}$ を X^H の <u>WH-成分</u> という．

<u>定理 2.3</u>. X が局所 G-0-連結のとき，直和分解

$$Wh_{WH}(X^H,(1))\cong\coprod_{\alpha} Wh_{WH}(WH\cdot X^H_{\alpha},(1))$$

が成立つ.

この分解は $[V, X^H] \in Wh_{WH}(X^H, (1))$ に対し, $r: V \to X^H$ を WH-retraction として, $V_\alpha = r^{-1}(WH\cdot X^H_\alpha)$ とおき, 対応

$$[V, X^H] \longmapsto \coprod_\alpha [V_\alpha, WH\cdot X^H_\alpha]$$

により得られる.

上の定理の X についての naturality については, $f: X \to Y$ が局所 G-0-連結 proper G-空間の G-写像で, $f^H: X^H \to Y^H$ が弧状連結成分の bijection (従って WH-成分の bijection) を与えるものについて, 次の diagram が可換という意味で naturality が成立つ

$$\begin{array}{ccc} Wh_{WH}(X^H, (1)) & \cong & \coprod_\alpha Wh_{WH}(WH\cdot X^H_\alpha, (1)) \\ \downarrow f^H_* & & \downarrow \coprod \bar{f}^H_{\alpha *} \\ Wh_{WH}(Y^H, (1)) & \cong & \coprod_\alpha Wh_{WH}(WH\cdot Y^H_\alpha, (1)). \end{array}$$

但し, $f^H(X^H_\alpha) \subset Y^H_\alpha$ とし, $\bar{f}^H_\alpha: WH\cdot X^H_\alpha \to WH\cdot Y^H_\alpha$ (f^H の制限で得られる WH-写像) とする.

次に $Wh_{WH}(WH\cdot X^H_\alpha, (1))$ を reduce する. $WH\cdot X^H_\alpha$ の一つの連結成分 X^H_α を選び

$$W_\alpha H = \{w \in WH \mid w\cdot X^H_\alpha \subset X^H_\alpha\}$$

とおく. 明らかに

$$W_\alpha H \supset (WH)_0, \quad WH \text{ の } 1\text{-成分}$$

よって $WH/W_\alpha H$ は discrete, 特に $W_\alpha H$ は WH の閉部分群. よって

$WH\cdot X^H_\alpha$, X^H_α は proper $W_\alpha H$-空間になる。

定理 2.4. 次の同型が成立つ

$$Wh_{WH}(WH\cdot X^H_\alpha, (1)) \cong Wh_{W_\alpha H}(X^H_\alpha, (1)).$$

この同型は，G-写像 $f: X \to Y$ が定理 2.3 の下の naturality についての条件をみたすものに対して natural である。

上の定理の対応は "$[V, WH\cdot X^H_\alpha] \longmapsto [V_\alpha, X^H_\alpha]$", 但し V_α は V の X^H_α を含む連結成分，によって得られる。

次に，X が G-1-連結とする。$\tilde{X}^H_\alpha$ を X^H_α の普遍被覆空間とする。$\tilde{X}^H_\alpha$ は局所コンパクト，Hausdorff 空間である。

Illman [I2] に従い，$\tilde{X}^H_\alpha$ には次の Lie 群 $\Gamma_{H,\alpha}$ が proper に作用する。2段階に分けて構成する。

i) $W_\alpha H$ が X^H_α に effective に作用しているとき，

$$\mathrm{Homeo}(\tilde{X}^H_\alpha) \supset \Gamma_{H,\alpha} = \{f: \tilde{X}^H_\alpha \to \tilde{X}^H_\alpha,\ f \text{ は } W_\alpha H \text{ のある作用を cover している}\}$$

Prfs. $\exists w \in W_\alpha H$,
$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}^H_\alpha & \xrightarrow{f} & \tilde{X}^H_\alpha \\ p\downarrow & & \downarrow p \\ X^H_\alpha & \xrightarrow{w} & X^H_\alpha \end{array}$$
が可換。

$\pi_{H,\alpha} = \pi_1(X^H_\alpha)$ を $\tilde{X}^H_\alpha$ 上に被覆変換群として作用させると，短完全列

$$\{1\} \longrightarrow \pi_{H,\alpha} \longrightarrow \Gamma_{H,\alpha} \longrightarrow W_\alpha H \longrightarrow \{1\}$$

が得られる。特に，Lie 群 $W_\alpha H$ の discrete 部分群 $\pi_{H,\alpha}$ による

拡大として，$\Gamma_{H,\alpha}$ は Lie 群である．そして，$\Gamma_{H,\alpha}$ の $\tilde{X}^H_\alpha$ 上の作用が proper であることもすぐわかる．

ii) $W_\alpha H$ の X^H_α 上の作用が effective でないとき，

X^H_α に free elementary $W_\alpha H$-expansion を一つ attach すると，その上での $W_\alpha H$ の作用は effective になる．その上で $\Gamma_{H,\alpha}$ を構成し，これを $\tilde{X}^H_\alpha$ 上に制限する．この action は free elementary $W_\alpha H$-expansion の attach の仕方によらないことも示される．

このようにして一般に $\tilde{X}^H_\alpha$ を proper $\Gamma_{H,\alpha}$-空間に出来る．

<u>定理 2.5.</u> X が局所 G-1-連結のとき，同型

$$Wh_{W_\alpha H}(X^H,(1)) \cong Wh_{\Gamma_{H,\alpha}}(\tilde{X}^H_\alpha,(1))$$

が成立つ．この同型は次の意味で natural である．局所 G-1-連結な proper G-空間の G-写像 $f: X \to Y$ が $G > {}^\forall H$, compact, に対して $f^H: X^H \to Y^H$ が連結成分の bijection を与え，更に各成分について π_1 の同型を与えているとき，

$$\begin{array}{ccc} Wh_{W_\alpha H}(X^H_\alpha,(1)) & \cong & Wh_{\Gamma_{H,\alpha}}(\tilde{X}^H_\alpha,(1)) \\ \downarrow f^H_{\alpha *} & & \downarrow f^H_{\alpha *} \\ Wh_{W_\alpha H}(Y^H_{\alpha *},(1)) & \cong & Wh_{\Gamma_{H,\alpha}}(\tilde{Y}^H_\alpha,(1)) \end{array}$$

が可換．

最後に，

<u>定理 2.6.</u> X が局所 G-1-連結のとき，同型

$$Wh_{\Gamma_{H,\alpha}}(\tilde{X}^H_\alpha, (1)) \cong Wh(\pi_0(\Gamma_{H,\alpha}))$$

が成り立つ。この同型の右辺は discrete 群 $\pi_0(\Gamma_{H,\alpha})$ の代数的な Whitehead 群。更に定理 2.5 の naturality の條件の下で

$$\begin{tikzcd}
Wh_{\Gamma_{H,\alpha}}(\tilde{X}^H_\alpha, (1)) \arrow[d, "\tilde{f}^H_{\alpha *}"] \arrow[dr, phantom, "\cong"] & \\
 & Wh(\pi_0(\Gamma_{H,\alpha})) \\
Wh_{\Gamma_{H,\alpha}}(\tilde{Y}^H_\alpha, (1)) \arrow[ur, phantom, "\cong"] &
\end{tikzcd}$$

が可換になる。

上の定理の同型は [I 2] の証明と同様に行えばよい。

定理 2.6，定理 2.5，定理 2.4，定理 2.3，定理 2.2 の naturality を逆にたどると次の定理を得る。

<u>定理 2.7.</u> $f: X \to Y$ を proper G 空間の間の G-写像とし，X, Y は局所 G-1-連結で，$f^H: X^H \to Y^H$ が連結成分の bijection と，各連結成分での π_1 の同型を与えるとすると，

$$f_*: Wh_G(X, (H)) \cong Wh_G(Y, (H)), \text{ 同型.}$$

この定理は同変 s-コボルディズム定理の証明に利用される。

3. <u>同変 s-コボルディズム定理</u>

こゝでは G は<u>コンパクト</u> Lie 群とする。(W, X, Y) が<u>G-h-コボルディズム</u>であるというのは，W はコンパクト C^∞-G-多様体で $\partial W = X \amalg Y$ と 2 つの成分にわかれ，更に包含 $i_X: X \subset W$，$i_Y: Y \subset W$ が G-ホモトピー同値になっているとき。

Wにあらわれるisotropy群H, Kに対し，夫々H-, K-不動点多様体を

$$W^H = \coprod_\lambda W^H_\lambda, \quad W^K = \coprod_\mu W^H_\mu$$

と連結成分に分解する。次の2つの条件を考える．

(＊1) すべての組(K, H), (μ, λ)について

$$W^K_\mu \supsetneqq W^H_\lambda \Rightarrow \dim W^K_\mu - \dim W^H_\lambda \geqq \dim G + 3.$$

(＊2) Hが極大isotropy群のとき，すべてのλについて

$$\dim W^H_\lambda \geqq \dim G + 6.$$

同変s-コボルディズム定理が次の形で成立つ．

定理3.1.（荒木－川久保）G-h-コボルディズム(W, X, Y)が次の条件をみたすとする．

(i) $\tau_G(i_X) = [W, X] = 0$ （$Wh_G(X)$において）

(ii) (W, X, Y)は条件(＊1), (＊2)をみたす．

$\Rightarrow$ $(W, X) \cong (X \times I, X \times \{0\})$：$G$-微分同相 rel X.

この定理の証明には松本－塩田[MS]のコンパクトG-微分多様体に対する同変Whitehead torsionのwell-definednessを利用し，上の定理2.7及び川久保[K]の論法を用いる．松本－塩田の論法は，実解析的G-多様体に帰着するので，かってなG-CW-分割ではいけないから，それを用いる証明にはかなりの注意を要する．

最近，青木－加藤は上の条件(＊1), (＊2)を次の形に変え

ている

(＊3) すべての組 (K, H), (μ, λ) について

$$W^K_\mu \neq W^H_\lambda \Rightarrow \dim W^K_\mu - \dim (W^K_\mu \cap G \cdot W^H_\lambda) \geq 3,$$

(＊4) H が極大 isotropy 群のとき，すべての λ に対して

$$\dim (W_\lambda H \setminus W^H_\lambda) \geq 6 .$$

そして，上の定理3.1で條件(ii)を次の條件

(ii′) (W, X, Y) は條件(＊3), (＊4) をみたす

でおきかえ，この形でも定理3.1と同じ結論が得られるとしている．

証明は，荒木－川久保[AK]と同じとしているが，この形の方がより一般性をもつと考えられる．更に G-h-コボルディズムの実現性定理，一意性定理も得られているようである．

一般の Lie 群 G の proper 作用についての G-h-コボルディズム (W, X, Y) を考える．このときは W がコンパクトと仮定出来ないが，"$G \backslash W$ がコンパクト"なる仮定を入れると，同変 s-コボルディズム定理が成り立つだろうと云われているが，証明があるのか，ないのか，小生にはまだわからない．

(以上)

文献

[A] S. Araki, Equivariant Whitehead groups and G-expansion categories, Advanced Studies in Pure Math, vol. 9 (to appear).

[AK] S. Araki – K. Kawakubo, Equivariant s-cobordism theorems (to appear).

[H] H. Hauschild, Äquivariante Whiteheadtorsion, Manuscripta math. 26 (1978), 63–82.

[I1] S. Illman, Whitehead torsion and group actions, Ann. Acad. Sci., Fenn., Ser. AI, 558 (1974), 1–45.

[I2] S. Illman, Actions of compact Lie groups and the equivariant Whitehead group, Osaka J. Math. (to appear).

[K] K. Kawakubo, Compact Lie group actions and fibre homotopy type, J. Math. Soc. Japan, 33 (1981), 295–321.

[MS] T. Matumoto and M. Shiota, Unique triangulation of the orbit space of a differentiable transformation group and its applications, Advanced Studies in Pure Math., vol. 9 (to appear).

[P] R. S. Palais, On the existence of slices for actions of non-compact Lie groups, Ann. of Math., 73 (1961), 295–323.