数理解析研究所講究録
第609巻 1987年 138-146

解析環のゼータ関数とK群

東工大 理 黒川信重

次の問題を考える。

<u>問題</u> 「Aを解析環，$\zeta(s,A)$ を そのゼータ関数としたとき $\zeta(s,A)$ の特殊値を AのK群を用いて解釈する。」

ここで Aを数論環としたものが Quillen-Lichtenbaum (-Bloch-Beilinson-…) の問題であり，種々の結果が知られている。その解析的類似を考えるのが目的である。とくに $\zeta(s,A)$ が Selberg 型のゼータ関数（Artin-Mazur-Smale … による変形，一般化等）のときを扱う。また，これらの特殊値が 現在の素粒子論（超弦理論）で深く研究されている事に触れ，応用例を一つ述べる。 素粒子論の研究は素数論に対して大変示唆に富むと思われる。

なお，解析環と数論環のゼータ関数のここでの定義における差異に注意しておきたい。数論環（$\mathbb{Z}$上有限生成の可換環）Aに対しては $\zeta(s,A)$ が一意的に定まる。一方，解析環（C^*環，等）Aに対しては その上の力学系 X を与えることにより $\zeta(s,A,X)$ を定める。したがって，ここでは，“解析環”は “力学環” (A,X) を意味すると考えることになる。一般に解析環は“素元”が多すぎるため，

適切な同値類を（力学系によって）取り出す。

この文章では動機付に重点を置きましたので詳しい結果等に関しましては文献の[1]－[4]を参照して下さい。

§1. ゼータ関数

Aを解析環としたとき，そのゼータ関数 $\zeta(s, A)$ はどのように定義すべきだろうか？ それを見るために Selberg 型のゼータ関数に学ぶことにする。

いま，M を解析的なコンパクトリーマン面で種数 $g \geqq 2$ とする。Selberg [5] により M の本来の Selberg ゼータ関数 $Z_M(s)$ は次のように定義される：

$$Z_M(s) = \prod_{p} \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - N(p)^{-s-n}\right).$$

ここで，p は $\pi_1(M)$ $(\hookrightarrow SL(2,\mathbb{R}))$ の素な双曲型共役類全体 $P(M)$ を動く。ただし，$\gamma \in SL(2,\mathbb{R})$ が双曲型とは $|tr(\gamma)| > 2$ ということで，このとき

$$\gamma \sim \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \quad \alpha > 1 \text{ とすると } \quad N(\gamma) = \alpha/\alpha^{-1} = \alpha^2 \ (>1)$$

と"ノルム"を定義する。また $\gamma \in \pi_1(M)$ が素とは他の元の真のベキになっていないことを意味する。

なお，pの分布を調べるためには，上記の形のゼータ関数

は，余り都合が良くないので，次のゼータ関数が使われる：

$$\zeta(s, M) = \prod_{p \in \mathcal{P}(M)} \left(1 - N(p)^{-s}\right)^{-1}.$$

Selbergのゼータ関数は，その後 Smale [6] により力学系のゼータ関数として一般化された。次の２点に注意する。

① $$\{M\text{の素な閉測地線}\} \xrightarrow[\text{ホモトピー類}]{} \mathcal{P}(M)$$

は 1:1 であり同一視できる。このとき $N(p)$ は閉測地線 p の長さ $l(p)$ により $N(p) = e^{l(p)}$ と書ける。

② さらに $X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{Aut}(M)$ を M の測地流としたとき $\mathcal{P}(M)$ は $X = X^M$ の周期軌道全体 $\mathcal{P}er(X)$ と一致する。ただし，$\mathcal{P}er(X) = \{p = \mathbb{R}\cdot m \in \mathrm{Orb}(X);\ \mathbb{R}_m = l(p)\mathbb{Z} \text{ with } 0 < l(p) < \infty\}$.
ここで $\mathbb{R}_m = \mathbb{R}_p$ は m での固定化群。また，M の測地流は $M = {}_{\pi_1(M)}\backslash SL(2,\mathbb{R})/SO(2)$ と分解したとき $SL(2,\mathbb{R})$ の岩沢分解の "A−成分"（トーラス成分）$\left\{\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}\right\} \cong \mathbb{R}$ による自然な作用に他ならないことに注意する。

このようにして，$$\zeta(s, M) = \zeta(s, X^M) = \prod_{p \in \mathcal{P}er(X^M)} \left(1 - N(p)^{-s}\right)^{-1}$$

と書けることがわかった。そこで，いま，M上の複素数値連続関数環を $C(M) = A$ とすると，②の測地流

$X: \mathbb{R} \longrightarrow Aut(M)$ は C^* 力学系 $X: \mathbb{R} \to Aut(A)$ と同一視できる。(ここで，$C(M)$ は M の種数のみにしかよらないことに注意する必要がある。この意味では X がより本質的である。) したがって，一般の解析環 (話を固定するために C^*環とする) A に対して，その上の (C^*-) 力学系 $X: \mathbb{R} \longrightarrow Aut(A)$ が与えられれば同様にして，ゼータ関数を次のように構成することができる。

ここでは，A は C^* 環とする。$\hat{A}$ で A のスペクトル (A の既約表現のユニタリー同値類全体) を表わす。$X: \mathbb{R} \longrightarrow Aut(A)$ から自然に $\hat{X}: \mathbb{R} \longrightarrow Aut(\hat{A})$ が得られる。そこで $Per(\hat{X})$ で $\hat{X}$ の周期軌道全体を表わす：

$Per(\hat{X}) = \{ p = \mathbb{R} \cdot m \in Orb(\hat{X})\ ;\ \mathbb{R}_m = l(p)\mathbb{Z}$ with $0 < l(p) < \infty \}$。

さらに $N(p) = e^{l(p)}$ とおき，$\zeta(s, X) = \zeta(s, A, X)$ を

$$\zeta(s, X) = \prod_{p \in Per(\hat{X})} (1 - N(p)^{-s})^{-1}$$

と定義する。(なお，これを C^* 接合積 $C^*(X) = \mathbb{R} \ltimes_X A$ のゼータ関数と見なすことも可能であろう。すると Connes の Thom 同型により $C^*(X)$ の K 群は A の K 群の指数を 1 つずらしたものと同型となる。) 離散力学系 $X^\circ: \mathbb{Z} \longrightarrow Aut(A^\circ)$ から誘導された連続力学系 $X: \mathbb{R} \longrightarrow Aut(A)$ のとき

は，通常 このゼータ関数は e^{-s} の有理関数に書けてしまい，その特殊値（とくに $s\to 0$）をK群を用いて書くことができる（cf.「数学辞典（第3版）」岩波書店 1985 の「力学系」の項）。要点は C をある種の $n\times n$ 次の整数行列としたとき，ゼータ関数の本質的部分は

$$\frac{1}{\det(1-Ce^{-s})}=\frac{1}{\# K_{0,tors}}s^{-\mathrm{rank}\,K_0}+\cdots$$

となることです。なお，右辺の 1 は $\# K_{1,tors}$ と解釈することもできます。ただし，$K_0=\mathbb{Z}^n/(1-C)\mathbb{Z}^n$，$K_1=\mathrm{Ker}(1-C)$ on $\mathbb{Z}^n$ が代表的な形。他の例は [1]–[4] を参照して下さい。

§2. 超弦理論の応用

M を種数 2 のコンパクトリーマン面，τ_M をその周期行列（τ_M は 2 次の Siegel 上半空間の点），χ_{10} を重さ 10 の 2 次の Siegel 尖点形式とする（テータで書くと $\chi_{10}=\prod_{m:\text{偶}}\vartheta_m^2$）。すると

<u>定理</u> $$Z_M'(1)^{13}Z_M(2)^{-1}=|\chi_{10}(\tau_M)|^2(\det \mathrm{Im}\,\tau_M)^{10}$$

が成立する。ただし，定数倍（Mによらない）は省いてある。

(χ_{12} の定義を調節してもよい。) これは超弦理論の最近の研究 [7] − [12] から得られる。(Cf. Manin [13].)

まず D'Hoker − Phong [7] (cf. Baranov − Švarc [8]) により

$$左辺 = (\det \Delta_M)^{13} (\det \Delta_M^{1,+})^{-1}.$$

ここで，Δ_M は M のラプラス作用素で，$\Delta_M^{1,+}$ は次の空間 $S^1(1)$ に作用するラプラス作用素：

$$S^1(1) = \left\{ f: H \longrightarrow \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{l} ① \; f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{cz+d}{c\bar{z}+d} f(z) \\ \quad \text{for all } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma = \pi_1(M) \\ ② \; \int_{\Gamma\backslash H} |f(z)|^2 \frac{dx\,dy}{y^2} < \infty \end{array} \right\}$$

$$\Delta_M^{1,+} = -y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - 2iy \frac{\partial}{\partial x} + 2.$$

ただし，H は上半平面，$M = \Gamma\backslash H$。 なお，

$$\Delta_M = -y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right).$$

次に，Belavin − Knizhnik [9] (cf. Belavin − Knizhnik − Morozov − Perelomov [10], Kato − Matsuo − Odake [11], Moore [12]) により

$$右辺 = (\det \Delta_M)^{13} (\det \Delta_M^{1,+})^{-1}。$$

なお，素粒子論と素数論との比較については［4］を参照下さい。

§3．多重ゼータ関数

M を種数 $g \geqq 2$ のコンパクト リーマン面，$X : \mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(M)$ を M の測地流とすると，自然に力学系 $\tilde{X} : \mathbb{R}^2 \to \mathrm{Aut}(M \times M)$ が定まる。ここで，$\tilde{X}_{t_1, t_2}(m_1, m_2) = (X_{t_1}(m_1), X_{t_2}(m_2))$。いま，$\tilde{X}$ の軌道 $p = \mathbb{R}^2 \cdot (m_1, m_2)$ が周期的とは固定化群 $\mathbb{R}^2_p$ が $\mathbb{Z}^2$ と同型のときと定義し $N(p) = \exp(\mathrm{vol}(\mathbb{R}^2/\mathbb{R}^2_p))$ とおく。さらに“多重ゼータ関数” $\zeta(s, \tilde{X}) = \prod_{p \in \mathrm{Per}(\tilde{X})} (1 - N(p)^{-s})^{-1}$ を定義する。これは解析環 $(C(M \times M), \tilde{X})$ のゼータ関数と見なせる。ここで $\mathrm{Per}(\tilde{X}) = \mathrm{Per}(X) \times \mathrm{Per}(X)$，$N(p_1, p_2) = \exp(\log N(p_1) \log N(p_2))$ に注意する。M の閉測地線の長さの最小値を $l(M)$ とする。次が成り立つ：

<u>定理</u>　$\zeta(s, \tilde{X})$ は $\mathrm{Re}(s) > 0$ で有理型で $\mathrm{Re}(s) = 0$ を自然境界にもつ。さらに $\zeta(s, \tilde{X})$ は $\mathrm{Re}(s) \geqq 1/l(M)$ で非零正則 —— $s = 1/l(M)$ における 2 位の極を除いて ——，したがって

$$\#\{(p_1, p_2) ; p_i \in \mathrm{Per}(X),\ N(p_1, p_2) \leqq t\} \sim 2\, l(M) \frac{t^{1/l(M)}}{\log t}$$

as $t \to \infty$.

これは階数2のリー群 $SL(2,\mathbb{R})\times SL(2,\mathbb{R})$ の離散部分群 $\pi_1(M)\times\pi_1(M)$ の Selberg 型ゼータ関数の例りであり、証明は [3] の簡単な変形である。同様なことはさらに一般に成立する。例えば：

<u>定理</u> 素数全体を $P(\mathbb{Z})$ とおくと

$$\zeta(s, P(\mathbb{Z})\times P(\mathbb{Z})) = \prod_{p_1,p_2\in P(\mathbb{Z})} \left(1 - e^{-s\log(p_1)\log(p_2)}\right)^{-1}$$

は $\mathrm{Re}(s)>0$ で有理型で $\mathrm{Re}(s)=0$ を自然境界にもつ。さらに $s=1/\log 2$ での2位の極を除いては $\mathrm{Re}(s)\geqq 1/\log 2$ で非零正則。とくに

$$\#\{(p_1,p_2) ; p_i\in P(\mathbb{Z}), e^{\log(p_1)\log(p_2)}\leqq t\} \sim 2\log 2\cdot\frac{t^{1/\log 2}}{\log t} \quad \text{as } t\to\infty.$$

文 献

全般 [1] N.Kurokawa: Zeta functions of analytic rings via Euler products. Proc.Japan Acad. 62A (1986)193-196.

[2] ——: Special values of Euler products and Hardy-Littlewood constants. Proc.Japan Acad. 62A (1986) 25-28.

[3] ——: On the meromorphy of Euler products. Proc.London Math.Soc. 53 (1986)1-47.

[4] ——: 素粒子と素数. 数理科学 No.281 (1986).

§1 [5] A.Selberg: Harmonic analysis and discontinuous groups on weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series. J.Indian Math.Soc. 20 (1956)47-87.

[6] S.Smale: Differentiable dynamical systems. Bull.Amer. Math.Soc. 73(1967)747-817.

§2 [7] E.D'Hoker and D.H.Phong: Multiloop amplitudes for the bosonic Polyakov string. Nucl.Phys.B269(1986)205-234.

[8] M.A.Baranov and A.S.Svarc: Multiloop contribution to string theory.JETP Lett.42(1985)419-421.

[9] A.Belavin, and V.Knizhnik: Complex geometry and theory of quantum strings. Landau Institute preprint (1986).

[10] A.Belavin, V.Knizhnik, A.Morozov, and A.Perelomov: Two and three loop amplitudes in bosonic string theory. JETP Lett.43(1986)319-321.

[11] A.Kato, Y.Matsuo, and S.Odake: Modular invariance and two-loop bosonic string vacuum amplitude. Univ.Tokyo preprint (1986).

[12] G.Moore: Modular forms and two-loop string physics. Phys.Lett. 176(1986)369-379.

[13] Yu.I.Manin: Quantum strings and algebraic curves. Proc. ICM-86, Berkley (Sec. 13).