数理解析研究所講究録
第611巻 1987年 99-121

逐次準線形化について

九大 経済 岩本誠一 (Seiichi Iwamoto)

1. はじめに

1957年にR.Bellmanが名著"Dynamic Programming"[1]を発表して以来，動的計画法について多くの研究がなされてきた。その本質は最適性の原理 Principle of Optimality をいわば自明のものとして認め，以後の研究はこの原理を直接適用して種々の具体的な問題を解決して行く方向で進められてきたように思われる。しかし，最適性の原理を理論的に把えると，2変数同時最適化は，可分性と単調性の下では，2段階逐次最適化によって保証されるということになる[8]。我々はこの2つの性質をひとつにまとめてより厳密に「非減少性をもつ再帰性」と言い換え[11]，簡単に「動的計画構造」と呼ぶことにする[11]。この構造が動的計画法に現われる目的関数と制約関数を生成することができるからである。

他方，準線形化はNewton法に見られるように数値計算法に欠かせないものである[2]。特に，凸関数に対する準線形化は，最適化の面では，理論的にはもちろん計算技法の上でも重要な役割りを果していることは言うまでもない。

本報告では準線形化を逐次適用して動的計画可能関数を生成し，その最適化を論じる．ここでは準線形化をBellman・Karush [3-7]の最大変換の一般化と考えている。与えられた微分可能な狭義増加凸関数 $f(x)$ に対して逆関数 $f^{-1}(y)$，共役関数 $f^{*}(y)$ および一次近似 $f(x;h)$ の反転関数 $f_{-1}(x;k)$ によってそれぞれ動的計画可能関数 $F(x;h)$，$F^{-1}(y;k)$，$F^{*}(y;k)$，$F_{-1}(y;k)$ が生成される。これらの最適化された値が合成関数 $f^{N}(h)$，$f^{-N}(k)$，$f^{*N}(k)$，$f^{-N}(k)$ になることを示す。反転関数はNewton法と密接に関係しているが，他方，最大変換の逆変換にもなっていることが分かる。

2. 問題

まず，次の有名な問題を考えよう [1, p.102 ; 8, p.121 ; 10, p.18]

$$\begin{aligned} &\mathrm{Max}\ e^{x_1}(1-x_1)+e^{x_1+x_2}(1-x_2)+\cdots+e^{x_1+x_2+\cdots+x_{N-1}}(1-x_N)+e^{x_1+x_2+\cdots+x_N}h \\ &\text{s.t.}\quad -\infty < x_n < \infty \qquad 1 \leqq n \leqq N \end{aligned} \tag{1}$$

ただし，Nは自然数，h は実定数。

この目的関数の再帰性に着目すると，目的関数は2変数関数

$$f(x;h) = e^{x}(1-x+h) \qquad -\infty < x, h < \infty \tag{2}$$

をN回合成した関数

$$f(x_1; f(x_2; \cdots; f(x_N; h)\cdots))$$
$$= e^{x_1}(1-x_1) + e^{x_1}[\, e^{x_2}(1-x_2) + e^{x_2}[\cdots [e^{x_N}(1-x_N) + e^{x_N}h]\cdots]] \tag{3}$$

になっていることが分かる（[11, p.278 ; 12]参照）。

次に，今度は逆に，例えば

$$f(x; h) = e^{x^2}(1-2x^2+2xh) \qquad 0 \leqq x,\ h < \infty \tag{4}$$

として，これを3回合成した関数

$$f(x_1; f(x_2; f(x_3; h)))$$
$$= e^{x_1^2}(1-2x_1^2) + 2x_1 e^{x_1^2}[\, e^{x_2^2}(1-2x_2^2) + 2x_2 e^{x_2^2}[\, e^{x_3^2}(1-2x_3^2) + 2x_3 e^{x_3^2}h]]] \tag{5}$$

を目的関数にもつ最大化問題

$$\text{Max} \quad e^{x_1^2}(1-2x_1^2) + 2x_1 e^{x_1^2+x_2^2}(1-2x_2^2) + 4x_1x_2 e^{x_1^2+x_2^2+x_3^2}(1-2x_3^2) + 8x_1x_2x_3 e^{x_1^2+x_2^2+x_3^2}h \tag{6}$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 \geqq 0$$

を考えよう。ただし $h \geqq 0$.

この2つの目的関数は N 次元ユークリッド空間 R^N（または3次元正象限 R^3_+）上の狭義増加性をもつ再帰型関数と呼ばれている[10]。これらの最大化はどうなるのであろうか。実は，2つの問題では，$f(x)=e^x$，$f(x)=e^{x^2}$ とすると，$f(x;h)$ は $f(x)$ の h における1次近似（線形化）

$$f(x;h)=f(x)+f'(x)(h-x) \tag{7}$$

になっている。

3. 主な結果

まず次の基本的な補題を準備しよう。

X, Yを空でない集合とし，$X \ni$各xに対し$Y(x)$をYの空でない部分集合とする。すなわち $Y(\cdot): X \to 2^Y$ を点対集合値写像とする。ただし 2^Y は集合Yの空でない部分集合の全体とする。集合値写像 $Y(\cdot)$ のグラフを

$$Gr(Y)=\{(x,y) \mid y \in Y(x),\ x \in X\} \subset X \times Y \tag{8}$$

で定義する。

補題 1 (マクシマックス定理 [11; P.268]) 関数 $f: X \times R^1 \to R^1$ は各 $x \in X$ に対して $f(x;\cdot): R^1 \to R^1$ が非減少とする。関数 g は $g: Gr(Y) \to R^1$ とする。このとき，$\operatorname*{Max}_{x \in X} f(x; \operatorname*{Max}_{y \in Y(x)} g(x,y))$ が存在すれば，$\operatorname*{Max}_{(x,y) \in Gr(Y)} f(x; g(x,y))$ も存在して，両者は等しい。

$$\operatorname*{Max}_{x \in X} f(x; \operatorname*{Max}_{y \in Y(x)} g(x,y)) = \operatorname*{Max}_{(x,y) \in Gr(Y)} f(x; g(x,y)). \tag{9}$$

注. この等号は，Max を min に替えても，この条件のままで

成り立つ。さらに，特別な場合には

$$\operatorname*{Max}_{x\in R^1} f(x; \operatorname*{Max}_{y\in R^1} g(y)) = \operatorname*{Max}_{x,y\in R^1} f(x; g(y)) \tag{10}$$

になる。

一般に，任意の微分可能な凸関数

$f: R^1 \longrightarrow R^1$ に対して

$$\begin{aligned} f(h) &= \operatorname*{Max}_{x\in R^1} [f(x) + (h-x)f'(x)] \\ &= \operatorname*{Max}_{x\in R^1} [F(x) + f'(x)h] \qquad (11) \\ &= \operatorname*{Max}_{x\in R^1} f(x; h) \end{aligned}$$

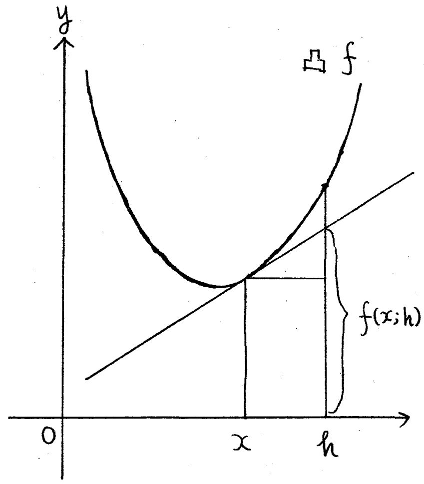


図1

が成り立つ(図1)。ただし

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x) - xf'(x) \\ f(x;h) &= F(x) + f'(x)h. \end{aligned} \tag{12}$$

表現(11)は関数 $f(h)$ の<u>準線形化</u>である([1; p.135])。さらに，補題1より， $f'(x) \geq 0 \quad x\in R^1$ の下では

$$\begin{aligned} f(f(h)) &= \operatorname*{Max}_{x_1\in R^1} [F(x_1) + f'(x_1)f(h)] \\ &= \operatorname*{Max}_{x_1\in R^1} [F(x_1) + f'(x_1)[\operatorname*{Max}_{x_2\in R^1} [F(x_2) + f'(x_2)h]]] \\ &= \operatorname*{Max}_{x_1,x_2\in R^1} [F(x_1) + f'(x_1)F(x_2) + f'(x_1)f'(x_2)h] \end{aligned} \tag{13}$$

$$= \operatorname*{Max}_{x_1, x_2 \in R^1} f(x_1; f(x_2; h))$$

が成り立つ。したがって，関数 $f: R^1 \to R^1$ と自然数 N に対して

$$\begin{aligned} &F(\boldsymbol{x}; h) = f(x_1; f(x_2; \cdots; f(x_N; h)\cdots)) \\ &\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_N) \in R^N \end{aligned} \tag{14}$$

とすれば，次の定理を得る。

<u>定理 1</u> (i) 関数 $f: R^1 \to R^1$ が微分可能な増加凸ならば，各 $h \in R^1$ に対して

$$f^N(h) = \operatorname*{Max}_{\boldsymbol{x} \in R^N} F(\boldsymbol{x}; h) \tag{15}$$

かつ $x_1^* = f^{N-1}(h)$, $x_2^* = f^{N-2}(h)$, $\cdots$, $x_{N-1}^* = f(h)$, $x_N^* = h$ が最大値に到達する。

(ii) 関数 $g: R^1 \to R^1$ が微分可能な増加凹ならば，各 $k \in R^1$ に対して

$$g^N(k) = \min_{\boldsymbol{y} \in R^N} G(\boldsymbol{y}; k) \tag{16}$$

かつ $\hat{y}_1 = g^{N-1}(k)$, $\hat{y}_2 = g^{N-2}(k)$, $\cdots$, $\hat{y}_{N-1} = g(k)$, $\hat{y}_N = k$ が最小値に到達する。ただし

$$f^n(x) = f(f(\cdots f(x)\cdots))$$

$$\begin{aligned} &G(\boldsymbol{y}; k) = g(y_1; g(y_2; \cdots; g(y_N; k)\cdots)) \\ &g(y; k) = G(y) + g'(y)k \\ &G(y) = g(y) - y g'(y) \end{aligned} \tag{17}$$

$$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_N).$$

注. 定理1の目的関数はそれぞれ

$$F(\boldsymbol{x}; h) = F(x_1) + f'(x_1)F(x_2) + \cdots + f'(x_1)f'(x_2)\cdots f'(x_{N-1})F(x_N) + f'(x_1)f'(x_2)\cdots f'(x_N)h, \tag{18}$$

$$G(\boldsymbol{y}; k) = G(y_1) + g'(y_1)G(y_2) + \cdots + g'(y_1)g'(y_2)\cdots g'(y_{N-1})G(y_N) + g'(y_1)g'(y_2)\cdots g'(y_N)k \tag{19}$$

で表される。

4. 逆と反転と共役と

まず逆を考えよう。関数 $f: R^1 \to R^1$ が上への微分可能な狭義増加凸であるための必要十分条件は，逆関数 $f^{-1}: R^1 \to R^1$ が上への微分可能な狭義増加凹であるから，次の系が得られる。

系 (i) 関数 $f: R^1 \to R^1$ が上への微分可能な狭義増加凸ならば，各 $k \in R^1$ に対して

$$f^{-N}(k) = \min_{\boldsymbol{y} \in R^N} F^{-1}(\boldsymbol{y}; k) \tag{20}$$

かつ $\hat{y}_1 = f^{-N+1}(k)$, $\hat{y}_2 = f^{-N+2}(k)$, $\cdots$, $\hat{y}_{N-1} = f^{-1}(k)$, $\hat{y}_N = k$ が最小点である。ただし

$$f^{-n}(y) = f^{-1}(f^{-1}(\cdots f^{-1}(y)\cdots))$$

$$\begin{aligned}
F^{-1}(y) &= f^{-1}(y) - y f^{-1\prime}(y) \\
f^{-1}(y; k) &= F^{-1}(y) + f^{-1\prime}(y) k \\
F^{-1}(\boldsymbol{y}; k) &= f^{-1}(y_1; f^{-1}(y_2; \cdots; f^{-1}(y_N; k)\cdots))
\end{aligned} \tag{21}$$

(ii) 関数 $g : R^1 \to R^1$ が上への微分可能な狭義増加凹ならば，各 $h \in R^1$ に対して

$$g^{-N}(h) = \underset{\boldsymbol{x} \in R^N}{\mathrm{Max}}\ G^{-1}(\boldsymbol{x}; h) \tag{22}$$

かつ　$x_1^* = g^{-N+1}(h)$，$x_2^* = g^{-N+2}(h)$，$\cdots$，$x_{N-1}^* = g^{-1}(h)$，$x_N^* = h$ が最大点である。ただし

$$\begin{aligned}
G^{-1}(x) &= g^{-1}(x) - x g^{-1\prime}(x) \\
g^{-1}(x; h) &= G^{-1}(x) + g^{-1\prime}(x) h \\
G^{-1}(\boldsymbol{x}; h) &= g^{-1}(x_1; g^{-1}(x_2; \cdots; g^{-1}(x_N; h)\cdots)).
\end{aligned} \tag{23}$$

注．系の中の目的関数は次のようになる。

$$\begin{aligned}
F^{-1}(\boldsymbol{y}; k) = {} & F^{-1}(y_1) + f^{-1\prime}(y_1) F^{-1}(y_2) + \cdots + f^{-1\prime}(y_1) f^{-1\prime}(y_2) \cdots f^{-1\prime}(y_{N-1}) F^{-1}(y_N) \\
& + f^{-1\prime}(y_1) f^{-1\prime}(y_2) \cdots f^{-1\prime}(y_N) k
\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
G^{-1}(\boldsymbol{x}; h) = {} & G^{-1}(x_1) + g^{-1\prime}(x_1) G^{-1}(x_2) + \cdots + g^{-1\prime}(x_1) g^{-1\prime}(x_2) \cdots g^{-1\prime}(x_{N-1}) G^{-1}(x_N) \\
& + g^{-1\prime}(x_1) g^{-1\prime}(x_2) \cdots g^{-1\prime}(x_N) h
\end{aligned} \tag{25}$$

次に，2変数関数 $f(x; h)$ の反転を考えよう。任意の微分

可能な狭義増加凸関数 $f: R^1 \to R^1$ に対して

$$f(x;h) = f(x) + (h-x)f'(x) \qquad (26)$$
$$= F(x) + f'(x)h$$

で定義された2変数関数 $f(x;h)$ は、各 $x \in R^1$ を固定すると h の連続狭義増加関数だから、その逆関数 $f_{-1}(x;\cdot)$ が

$$f_{-1}(x;k) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} + \frac{k}{f'(x)} \qquad (27)$$
$$= F_{-1}(x) + \frac{k}{f'(x)}$$

として定義される。ただし

$$F_{-1}(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}. \qquad (28)$$

$f_{-1}(x;k)$ を $f(x;h)$ の反転関数(reverse function)という。

準線形化技法によれば、微分可能な狭義増加凸 f に対して

$$f(h) = \operatorname*{Max}_{x \in R^1} f(x;h)$$
$$= \operatorname*{Max}_{x \in R^1} [F(x) + f'(x)h] \qquad h \in R^1 \qquad (29)$$
$$= \operatorname*{Max}_{x \in R^1} [f(x) - xf'(x) + f'(x)h]$$

かつ $x^* = h$ が最大点であった。これはまた次に同値である。

$$f^{-1}(k) = \min_{x \in R^1} f_{-1}(x;k)$$
$$= \min_{x \in R^1} \left[F_{-1}(x) + \frac{k}{f'(x)}\right] \qquad (30)$$

$$= \min_{x \in R^1} \left[x - \frac{f(x)}{f'(x)} + \frac{k}{f'(x)} \right]$$

かつ　$\hat{x} = f^{-1}(k)$ が最小点である（図2）。この事実は, Newton

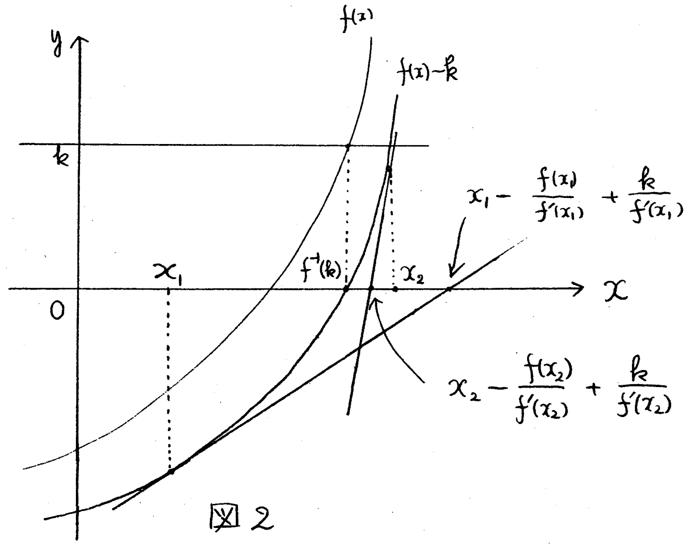


図2

法の考え方を最適化の立場から見直したことになっている。

定理2 (i) 関数 $f: R^1 \to R^1$ が微分可能な狭義増加凸ならば, 各 $k \in R^1$ に対して

$$f^{-N}(k) = \min_{\boldsymbol{x} \in R^N} F_{-1}(\boldsymbol{x}; k) \tag{31}$$

かつ　$\hat{x}_1 = f^{-N}(k),\ \hat{x}_2 = f^{-N+1}(k), \cdots, \hat{x}_{N-1} = f^{-2}(k),\ \hat{x}_N = f^{-1}(k)$ は最小点である。ただし

$$F_{-1}(\boldsymbol{x}; k) = f_{-1}(x_1; f_{-1}(x_2; \cdots; f_{-1}(x_N; k)\cdots)). \tag{32}$$

(ii) 関数 $g: R^1 \to R^1$ が微分可能な狭義増加凹ならば, 各 $h \in R^1$ に対して

$$g^{-N}(h) = \operatorname{Max}_{\boldsymbol{y} \in R^N} G_{-1}(\boldsymbol{y}; h) \tag{33}$$

かつ $y_1^* = g^{-N}(h),\ y_2^* = g^{-N+1}(h),\ \cdots,\ y_{N-1}^* = g^{-2}(h),\ y_N^* = g^{-1}(h)$ は最大点である。ただし

$$
\begin{aligned}
G_{-1}(y) &= y - \frac{g(y)}{g'(y)} \\
g_{-1}(y;h) &= G_{-1}(y) + \frac{h}{g'(y)} \qquad (34) \\
G_{-1}(\boldsymbol{y};h) &= g_{-1}(y_1;\ g_{-1}(y_2;\ \cdots;\ g_{-1}(y_N;h)\cdots)).
\end{aligned}
$$

注. 定理 2 の目的関数は次になっている。

$$
F_{-1}(\boldsymbol{x};k) = F_{-1}(x_1) + \frac{F_{-1}(x_2)}{f'(x_1)} + \cdots + \frac{F_{-1}(x_N)}{f'(x_1)f'(x_2)\cdots f'(x_{N-1})} + \frac{k}{f'(x_1)f'(x_2)\cdots f'(x_N)} \qquad (35)
$$

$$
G_{-1}(\boldsymbol{y};h) = G_{-1}(y_1) + \frac{G_{-1}(y_2)}{g'(y_1)} + \cdots + \frac{G_{-1}(y_N)}{g'(y_1)g'(y_2)\cdots g'(y_{N-1})} + \frac{h}{g'(y_1)g'(y_2)\cdots g'(y_N)}. \qquad (36)
$$

定理 3 (i) 関数 $f: R^1 \to R^1$ は上への微分可能な狭義増加凸とすると，単調変換 $y = f(x)$ によって $F^{-1}(y;k)$ は $F_{-1}(x;k)$ になる。また，単調変換 $y_n = f(x_n)\ 1 \leqq n \leqq N$ によって $F^{-1}(\boldsymbol{y};k)$ は $F_{-1}(\boldsymbol{x};k)$ になる。

(ii) 関数 $g: R^1 \to R^1$ は上への微分可能な狭義増加凹とす

ると，単調変換 $x=g(y)$ によって $G^{-1}(x;h)$ は $G_{-1}(y;h)$ になる。また，単調変換 $x_n=g(y_n)$ $1\leq n\leq N$ によって $G^{-1}(\boldsymbol{x};h)$ は $G_{-1}(\boldsymbol{y};h)$ になる。

最後に，共役作用素 * と ^ を考えよう。一般に，任意の凸関数 $f:R^1\to R^1$ にその共役関数 f^* を

$$f^*(y)=\sup_{x\in R^1}[xy-f(x)] \qquad y\in R^1 \tag{37}$$

で定義し，凹関数 $g:R^1\to R^1$ に対してはその共役関数 $\hat{f}$ を

$$\hat{g}(x)=\inf_{y\in R^1}[yx-g(y)] \qquad x\in R^1 \tag{38}$$

で定める．作用 * と ^ は次の意味で双対をなしている。

$$\widehat{(-f)}(y)=-f^*(-y) \qquad y\in R^1 \tag{39}$$

<u>補題 2</u>　関数 $f:R^1\to R^1$ は 2回微分可能で狭義増加 狭義凸とする。このとき，$f'(-\infty)<y<f'(\infty)$ に対して次が成り立つ．

$$\begin{aligned}
&\text{(i)}\quad f^*(y)=xy-f(x)\\
&\text{(ii)}\quad f^{*\prime}(y)=x\ ,\ \text{特に}\ f^{*\prime}(y)>0\ (\,f'(0)<y<f'(\infty)\ \text{のとき})\\
&\text{(iii)}\quad f^{*\prime\prime}(y)=\frac{1}{f''(x)}>0
\end{aligned} \tag{40}$$

ただし x は $f'(x)=y$ を満たす(唯一の実数)。

したがって，$f^*:(f'(0),f'(\infty))\to R^1$ は狭義増加・狭義凸でなるから，次の定理が得られる。

<u>定理 4</u>　関数 $f: R^1 \to R^1$ は２回微分可能で狭義増加・狭義凸とすると，　$f'(0) < f^{*n}(h) < f'(\infty)$　$n=1,2,\cdots, N-1$　なる h に対して

$$f^{*N}(h) = \underset{\substack{f'(0) < y_n < f'(\infty) \\ 1 \leqq n \leqq N}}{\mathrm{Max}} \ F^*(\boldsymbol{y}\,; h) \tag{41}$$

かつ　$y_1^* = f^{*(N-1)}(h)$,　$y_2^* = f^{*(N-2)}(h)$, $\cdots$, $y_{N-1}^* = f^*(h)$, $y_N^* = h$　は最大点である。ただし

$$\begin{aligned} F^*(y) &= f^*(y) - y f^{*\prime}(y) \\ f^*(y\,; h) &= F^*(y) + f^{*\prime}(y) h \\ F^*(\boldsymbol{y}\,; h) &= f^*(y_1\,; f^*(y_2\,; \cdots\,; f^*(y_N\,; h)\cdots)). \end{aligned} \tag{42}$$

注. この目的関数は

$$\begin{aligned} F^*(\boldsymbol{y}\,; h) = {} & F^*(y_1) + f^{*\prime}(y_1) F^*(y_2) + \cdots + f^{*\prime}(y_1) f^{*\prime}(y_2) \cdots f^{*\prime}(y_{N-1}) F^*(y_N) \\ & + f^{*\prime}(y_1) f^{*\prime}(y_2) \cdots f^{*\prime}(y_N) h. \end{aligned} \tag{43}$$

同様に凹関数については次のとおり。

<u>補題 3</u>　関数 $g: R^1 \to R^1$ は２回微分可能で狭義増加・狭義凹とする。このとき，　$g'(\infty) < x < g'(-\infty)$　なる x に対して次が成り立つ。

(i)　$\hat{g}'(x) = yx - g(y)$

(ii)　$\hat{g}'(x) = y$，特に　$\hat{g}'(x) > 0$　（$g'(\infty) < x < g'(0)$ のとき）(44)

(iii) $\hat{g}''(x) = \dfrac{1}{g''(y)} < 0$

ただし y は一意に $g'(y) = x$ を満たすもの。

<u>定理5</u> 関数 $g : R^1 \to R^1$ は2回微分可能で狭義増加・狭義凹とすると、 $g'(\infty) < \hat{g}^n(k) < g'(0)$ $n=1,2,\cdots,N-1$ なる k に対して

$$\hat{g}^N(k) = \min_{\substack{g'(\infty) < x_n < g'(0) \\ 1 \leqq n \leqq N}} \hat{G}(\boldsymbol{x}; k) \tag{45}$$

かつ $\hat{x}_1 = \hat{g}^{N-1}(k)$, $\hat{x}_2 = \hat{g}^{N-2}(k)$, $\cdots$, $\hat{x}_{N-1} = \hat{g}(k)$, $\hat{x}_N = k$ は最小点である。ただし

$$\begin{aligned} \hat{G}(x) &= \hat{g}(x) - x\hat{g}'(x) \\ \hat{g}(x; k) &= \hat{G}(x) + \hat{g}'(x)k \\ \hat{G}(\boldsymbol{x}; k) &= \hat{g}(x_1; \hat{g}(x_2; \cdots; \hat{g}(x_N; k)\cdots)). \end{aligned} \tag{46}$$

注. 目的関数は次のように表される。

$$\hat{G}(\boldsymbol{x}; k) = \hat{G}(x_1) + \hat{g}'(x_1)\hat{G}(x_2) + \cdots + \hat{g}'(x_1)\hat{g}'(x_2)\cdots\hat{g}'(x_{N-1})\hat{G}(x_N) + \hat{g}'(x_1)\hat{g}'(x_2)\cdots\hat{g}'(x_N)k. \tag{47}$$

5. 例題

5.1 $f(x) = e^x : (-\infty, \infty) \to (0, \infty)$

この場合は次のようになる。

$$f(x;h) = (1-x+h)e^{x} \qquad -\infty < x, h < \infty$$

$$F(\boldsymbol{x};h) = e^{x_1}(1-x_1) + e^{x_1+x_2}(1-x_2) + \cdots + e^{x_1+x_2+\cdots+x_{N-1}}(1-x_N) \tag{48}$$

$$+ e^{x_1+x_2+\cdots+x_N} h$$

$$-\infty < x_n, h < \infty .$$

これは第2節冒頭の問題 (1), (2) である。逆については

$$g(y) = f^{-1}(y) = \log y \ : (0,\infty) \to (-\infty,\infty)$$

$$g(y;k) = f^{-1}(y;k) = -1 + \log y + \frac{k}{y} \qquad 0 < y, k < \infty \tag{49}$$

$$G(\boldsymbol{y};k) = F^{-1}(\boldsymbol{y};k) = -1 + \log y_1 + \frac{-1+\log y_2}{y_1} + \cdots + \frac{-1+\log y_N}{y_1 y_2 \cdots y_{N-1}}$$

$$+ \frac{k}{y_1 y_2 \cdots y_N}$$

$$0 < y_n < \infty, \quad k \gg 0$$

になる。ただし $k \gg 0$ は k が十分大きな正数であることを示す。ここでは $\log\log\cdots\log k$ ((N−1)回のlog作用) が well-defined になる程の正数。すなわち $k > e^{e^{\cdots^{e}}}$ ((N−1)個のe)。反転は

$$f_{-1}(x;k) = x - 1 + e^{-x}k \qquad -\infty < x < \infty, \ 0 < k < \infty$$

$$F_{-1}(\boldsymbol{x};k) = x_1 - 1 + e^{-x_1}(x_2-1) + \cdots + e^{-x_1-x_2-\cdots-x_{N-1}}(x_N - 1) \tag{50}$$

$$+ e^{-x_1-x_2-\cdots-x_N}k \qquad -\infty < x_n < \infty$$

$$k \gg 0.$$

さらに共役については

$$f^{*}(y) = (-1+\log y)y \ : (0,\infty) \to [-1,\infty)$$

$$f^{*\prime}(y) = \log y > 0 \qquad 1 < y < \infty \tag{51}$$

$$f^{*\prime\prime}(y) = 1/y > 0$$

$$f^*(y;k) = -y + k\log y \qquad y>1,\ k>1$$

$$F^*(\boldsymbol{y};k) = -y_1 - y_2\log y_1 - \cdots - y_N \log y_1 \log y_2 \cdots \log y_{N-1} \tag{52}$$

$$+ k \log y_1 \log y_2 \cdots \log y_N \qquad y_n > 1$$

$$k > e^2$$

$$\hat{g}(x) = 1 + \log x \quad : (0,\infty) \to (-\infty,\infty)$$

$$\hat{g}(x;h) = \log x + \frac{h}{x} \qquad 0 < x, h < \infty \tag{53}$$

$$\hat{G}(\boldsymbol{x};h) = \log x_1 + \frac{\log x_2}{x_1} + \cdots + \frac{\log x_N}{x_1 x_2 \cdots x_{N-1}} + \frac{h}{x_1 x_2 \cdots x_N}$$

$$x_n > 0, \qquad h > e^{-1+e^{-1+e^{\cdots^{-1+e^{-1}}}}} \quad (N\text{個の}e)$$

になる。

関数 $f(x)$ の逆関数 $g(y) = f^{-1}(y)$ から生成された $g(y;k)$ の反転は

$$g_{-1}(x;h) = y(1-\log y) + yh \qquad y>0,\ -\infty < h < \infty \tag{54}$$

$$G_{-1}(\boldsymbol{x};h) = y_1(1-\log y_1) + y_1 y_2 (1-\log y_2) + \cdots + y_1 y_2 \cdots y_N (1-\log y_N)$$

$$+ y_1 y_2 \cdots y_N h$$

$$y_n > 0,\ -\infty < h < \infty.$$

また $\hat{g}(x;h)$ の反転は

$$\hat{g}_{-1}(x;k) = -x\log x + xk \qquad x>0,$$

$$\hat{G}_{-1}(\boldsymbol{x};k) = -x_1\log x_1 - x_1 x_2 \log x_2 - \cdots - x_1 x_2 \cdots x_N \log x_N \tag{55}$$

$$+ x_1 x_2 \cdots x_N k, \qquad x_n > 0,\ -\infty < k < \infty.$$

5.2 $f(x) = x^2 : [0,\infty) \to [0,\infty)$

この場合は

$$f(x;h) = -x^2 + 2xh \qquad x, h \geqq 0$$

$$F(\boldsymbol{x};h) = -x_1^2 - 2x_1x_2^2 - \cdots - 2^{N-1}x_1x_2\cdots x_{N-1}x_N^2 + 2^N x_1x_2\cdots x_N h \qquad x_n \geqq 0,\ h \geqq 0 \tag{56}$$

になり，特に $N=1$ のとき定理1は

$$\underset{-\infty<x<\infty}{\mathrm{Max}}\left[2xh - x^2\right] = h^2 \qquad -\infty<h<\infty \tag{57}$$

を主張している。これは最も簡単な準線形化([1;p.134])である。逆は次のようになる。

$$g(y) = f^{-1}(y) = \sqrt{y} : (0,\infty) \to (0,\infty)$$

$$g(y;k) = f^{-1}(y;k) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{y} + \frac{k}{\sqrt{y}}\right) \qquad y, k>0 \tag{58}$$

$$G(\boldsymbol{y};k) = F^{-1}(\boldsymbol{y};k) = \frac{1}{2}\sqrt{y_1} + \frac{1}{2^2}\sqrt{\frac{y_2}{y_1}} + \cdots \frac{1}{2^N}\sqrt{\frac{y_N}{y_1y_2\cdots y_{N-1}}} + \frac{k}{2^N\sqrt{y_1y_2\cdots y_N}}, \qquad y_n>0,\ k>0$$

$N=1$ のとき，系(ii)は

$$\min_{x>0}\left[\frac{1}{2}\sqrt{x} + \frac{k}{2\sqrt{x}}\right] = \sqrt{k} \qquad k>0 \tag{59}$$

になる([1;p.134])。反転については

$$f_{-1}(x;k) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{k}{x}\right) \qquad x, k>0$$

$$F_{-1}(\boldsymbol{x}\,;k) = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2^2}\frac{x_2}{x_1} + \cdots + \frac{1}{2^N}\frac{x_N}{x_1x_2\cdots x_{N-1}} + \frac{k}{2^N x_1x_2\cdots x_N} \tag{60}$$

$$x_n>0,\quad k>0.$$

共役は

$$f^*(y) = \frac{1}{4}y^2 : [0,\infty) \to [0,\infty)$$

$$f^*(y\,;k) = -\frac{1}{4}y^2 + yk \qquad y\geqq 0,\ k\geqq 0 \tag{61}$$

$$F^*(\boldsymbol{y}\,;k) = -\frac{1}{4}y_1^2 - \frac{1}{4\cdot 2}y_1y_2^2 - \cdots - \frac{1}{4\cdot 2^{N-1}}y_1y_2\cdots y_{N-1}y_N^2 + \frac{1}{2^N}y_1y_2\cdots y_N k,$$

$$y_n\geqq 0,\quad k\geqq 0$$

$$\hat{g}(x) = -\frac{1}{4x} : (0,\infty) \to (-\infty,0)$$

$$\hat{g}(x\,;h) = -\frac{1}{2x} + \frac{h}{4x^2} \qquad x>0,\ h>0 \tag{62}$$

になる。ここに

$$\hat{g}(h) = \min_{0<x<\infty} \hat{g}(x\,;h) \qquad h>0 \tag{63}$$

は成立するが, $N\geqq 2$ ならば

$$\hat{g}^N(h) = \min_{0<x_n<\infty} \hat{G}(\boldsymbol{x}\,;h) \qquad h>0 \tag{64}$$

は成立しない。なぜなら $\hat{g}(h)<0$ だから。

5.3 $f(x) = x+\sqrt{\varepsilon^2x^2+1} : (-\infty,\infty) \to (-\infty,\infty) \qquad 0<\varepsilon<1$

これは

$$f'(x) = 1 + \frac{\varepsilon^2 x}{\sqrt{\varepsilon^2x^2+1}} > 0 \tag{65}$$

$$f''(x) = \frac{\varepsilon^2}{(\varepsilon^2 x^2+1)^{3/2}} > 0$$

だから 狭義増加・狭義凸である。また

$$f(x;h) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2x^2+1}} + \left(1+\frac{\varepsilon^2 x}{\sqrt{\varepsilon^2x^2+1}}\right)h \qquad -\infty<x, h<\infty$$

(66)

$$g(y) = f^{-1}(y) = \frac{y-\sqrt{\varepsilon^2y^2+(1-\varepsilon^2)}}{1-\varepsilon^2} : (-\infty,\infty) \to (-\infty,\infty)$$

になる。 $F=F(x;h)$, $F^{-1}=G$, F_{-1} , G_{-1} , f^*, $\hat{g}$, F^*, $\hat{G}$ … は省略。

5.4 $g(y) = y-\sqrt{\varepsilon^2y^2+1} : (-\infty,\infty)\to(-\infty,\infty) \qquad 0<\varepsilon<1$

$$g'(y) = 1-\frac{\varepsilon^2 y}{\sqrt{\varepsilon^2y^2+1}} > 0$$

(67)

$$g''(y) = -\frac{\varepsilon^2}{(\varepsilon^2y^2+1)^{3/2}} < 0$$

だから，g は 狭義増加・狭義凹である。また

$$g(y;k) = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2y^2+1}} + \left(1-\frac{\varepsilon^2 y}{\sqrt{\varepsilon^2y^2+1}}\right)k \qquad -\infty<y, k<\infty$$

(68)

$$f(x) = g^{-1}(x) = \frac{x+\sqrt{\varepsilon^2x^2+(1-\varepsilon^2)}}{1-\varepsilon^2} : (-\infty,\infty)\to(-\infty,\infty).$$

他の関数は省略。

5.5 $p(x) = -f(-x)$ ただし $f'(x)>0$, $f''(x)>0$

関数 $f:(-\infty,\infty)\to(-\infty,\infty)$ は 2回微分可能な狭義増加・狭義凸とすると， $p(x) = -f(-x) : (-\infty,\infty)\to(-\infty,\infty)$ は，

$$p'(x) = f'(-x) > 0, \qquad p''(x) = -f''(-x) < 0$$

(69)

だからやはり2回微分可能で狭義増加・狭義凹になる。さらに

$$
\begin{aligned}
P(x) &= -F(-x) \\
p(x;k) &= -f(-x;-k) \\
P(\mathbf{x};k) &= -F(-\mathbf{x};-k)
\end{aligned}
\tag{70}
$$

である。したがって

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x}\in R^N} P(\mathbf{x};k) \\
&= -\operatorname*{Max}_{\mathbf{x}\in R^N} F(\mathbf{x};-k) \\
&= -f^N(-k) \\
&= p^N(k)
\end{aligned}
\tag{71}
$$

が得られる。

6. おわりに

1. 定理1(i)は次のように不等式で同値表現できる。

関数 $f: R^1 \to R^1$ が微分可能な増加凸ならば、各 $h \in R^1$ に対して

$$
F(\mathbf{x};h) \leq f^N(h) \qquad \mathbf{x} \in R^N \tag{72}
$$

かつ等号が成立する必要十分条件は

$$
x_1 = f^{N-1}(h),\ x_2 = f^{N-2}(h),\ \cdots,\ x_{N-1} = f(h),\ x_N = h \tag{73}
$$

である。

2. 定理1(i)の非定常な場合は次になる。

$$
f_1(f_2(\cdots f_N(h)\cdots)) = \operatorname*{Max}_{\substack{-\infty < x_n < \infty \\ 1 \leq n \leq N}} \Big[F_1(x_1) + f_1'(x_1)F_2(x_2) + \cdots + f_1'(x_1)f_2'(x_2)\cdots f_{N-1}'(x_{N-1})F_N(x_N) + f_1'(x_1)f_2'(x_2)\cdots f_N'(x_N)h \Big] \tag{74}
$$

3. 定理1(i)をN変数関数 $f: R^N \to R^1$ $(N \geqq 2)$ に直接拡張することは容易ではない。補題1のマクシーマックス定理がこの場合成立しないからである。

4. 定理1(i),(ii)のミニマックス化は可能である。すなわち、関数 $f(g): R^1 \to R^1$ が微分可能な増加凸(凹)ならば、

$$\underset{-\infty<x<\infty}{\mathrm{Max}}\ \underset{-\infty<y<\infty}{\min}\ [\,F(x) + f'(x)G(y) + f'(x)g'(y)\,l\,]$$

$$= \underset{-\infty<y<\infty}{\min}\ \underset{-\infty<x<\infty}{\mathrm{Max}}\ [\,\cdots\,] \tag{75}$$

$$= f(g(l)) \qquad -\infty < l < \infty$$

かつ 点 $(x^*, \hat{y}) = (g(l), l)$ は鞍点である([11; p.278-281])。

例えば、$f(x) = e^x$ $(-\infty<x<\infty)$, $g(y) = \log y$ $(y>0)$ とすると

$$\underset{-\infty<x<\infty}{\mathrm{Max}}\ \underset{y>0}{\min}\ e^x(-x + \log y + \frac{l}{y})$$

$$= \underset{y>0}{\min}\ \underset{-\infty<x<\infty}{\mathrm{Max}}\ [\,\cdots\,] \tag{76}$$

$$= l$$

かつ $(x^*, \hat{y}) = (\log l, l)$ は鞍点である。ただし $l > 0$.

参考文献

1. R. BELLMAN, "Dynamic Programming," Princeton Univ. Press, N.J., 1957.
2. R. BELLMAN AND R. KALABA, " Quasilinearization and Nonlinear

Boundary-value Problems," American Elsevier, New York, 1965.

3. R. BELLMAN AND WM. KARUSH, On a new functional transform in analysis: the maximum transform, Bull. Amer. Math. Soc. **67** (1961), 501-503.

4. ——— AND ———, Mathematical programming and the maximum transform, J. SIAM. Appl. Math. **10** (1962), 550-567.

5. ——— AND ———, On the maximum transform and semigroups of transformations, Bull. Amer. Math. Soc. **68** (1962), 516-518.

6. ——— AND ———, Functional equations in the theory of dynamic programming-XII: an application of the maximum transform, J. Math. Anal. Appl. **6** (1963), 155-157.

7. ——— AND ———, On the maximum transform, J. Math. Anal. Appl. **6** (1963), 67-74.

8. N. FURUKAWA AND S. IWAMOTO, Dynamic programming on recursive reward systems, Bull. Math. Statist. **17** (1976), 103-126.

9. S. IWAMOTO, Some operations on dynamic programming with one-dimensional state space, J. Math. Anal. Appl. **69** (1979), 263-282.

10. ———, Reverse function, reverse program and reverse theorem in mathematical programming, J. Math. Anal. Appl. **95** (1983), 1-19.

11. ———, Sequential minimaximization under dynamic programming structure, J. Math. Anal. Appl. **108** (1985), 267-282.

12. S. IWAMOTO, R. J. TOMKINS AND C.-L. WANG, Some theorems on reverse inequalities, J. Math. Anal. Appl. to appear.

13. E. Stanley LEE, "Quasilinearization and Invariant Imbedding," Academic Press, New York, 1968.

-1 : inversion $f^{-1}(y)$,

rev : reversion $f_{-1}(x;h)$

l : linearization $f(x;h)$

$*$: Sup-conjugation

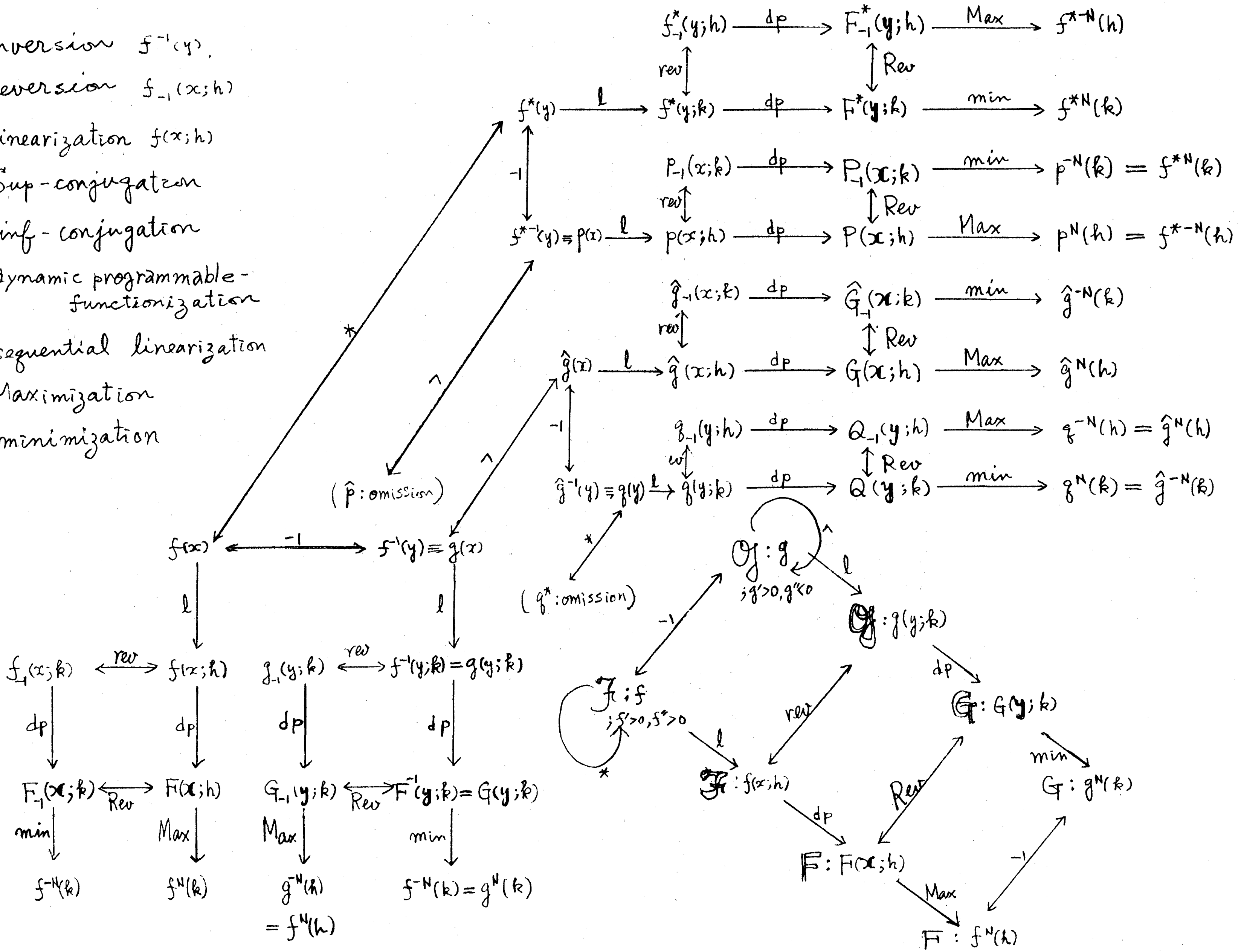
$\wedge$: inf-conjugation

dp : dynamic programmable-functionization

sl : sequential linearization

Max : Maximization

min : minimization



Diagramatic Summary of Sequential Quasilinearization