数理解析研究所講究録
第613巻 1987年 170-187



# IMT積分公式が有効な関数族について

筑波大電子・情報　杉原正顯 (Masaaki Sugihara)

## §1. はじめに

1970年伊理，森口，高沢によって，変数変換を用いた数値積分公式の１つ，現在ＩＭＴ積分公式と呼ばれている数値積分公式が提案された．それ以後，種々の変数変換を用いた数値積分公式が提案された（[2]，[3]を参照）．しかし，提案された積分公式がどのような関数族（関数空間）にまで適用可能であるのか—より正確に言うと，公式の提案されている論文に述べてある誤差評価式がどのような関数族（関数空間）に対してまで成立するのか—は明確になっているとは言い難い．本論文においては，ＩＭＴ積分公式に関して，論文[1]のＩＭＴ積分公式の誤差解析に基づいて，公式が有効な関数族（関数空間）を設定する．そして，その関数空間における積分作用素の近似の問題を考察する．

まず，§2.において，論文[1]に述べてあるＩＭＴ積分公式の

誤差解析法を復習し，§3. で，その誤差解析法がそのまま適用できるような自然な関数空間を設定する。次に，§4. において，§3. で導入された関数空間の性質，殊に，積分作用素の近似に関する性質（誤差ノルムの最小値の評価，また，それを達成する数値積分公式，DE公式の誤差ノルムの評価）を詳しく調べる。

## §2. IMT積分公式の誤差解析（復習）

論文〔1〕では，IMT積分公式：

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f\left(\varphi_{IMT}\left(\frac{k}{N}\right)\right)\cdot\varphi'_{IMT}\left(\frac{k}{N}\right),$$

ここで，$\varphi_{IMT}(x)=\int_0^x e^{-\frac{1}{s}-\frac{1}{1-s}}ds \Big/ \int_0^1 e^{-\frac{1}{s}-\frac{1}{1-s}}ds,$

を，積分区間の端点に代数的特異性をもつ関数の積分：

$$\int_0^1 \xi(x)\, x^{\alpha}(1-x)^{\alpha}dx,\quad (\alpha>-1)$$

ここで，$\xi(x)$ は $[0,1]$ を含む領域で正則な関数，

に適用した時の数値積分誤差が次のように評価されること

$$\left|\int_0^1 \xi(x)\, x^{\alpha}(1-x)^{\alpha}dx - \text{IMT公式}(N\text{点})\right| \leq C\cdot\frac{1}{N^{\frac{3}{4}+\alpha}}\cdot \exp\left(-\sqrt{4\pi(\alpha+1)N}\right) \quad (2.1)$$

を示し，IMT積分公式の有効性を主張している。

以下，論文〔1〕に従って，誤差評価（2.1）を得る過程を再生する。

IMT積分公式は，IMT変換を用いて変数変換した関数に対して矩形則を適用する公式である。従って，IMT積分公式の誤差評価は，変数変換後の関数に対する矩形則の誤差評価によって得られる．一方，矩形則の誤差評価は，次の補題 2.1 にみるように，被積分関数の Fourier 係数の漸近評価を行なうことによって容易に得られる．

**補題 2.1（矩形則の誤差評価の基本補題）**

$f(x)$ を $[0, 1]$ 上で絶対収束する Fourier 級数：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-2\pi i n x} \qquad , \quad c_n = \int_0^1 f(x)\, e^{2\pi i n x}\, dx,$$

に展開可能な関数とする．この時，積分 $\int_0^1 f(x)\,dx$ を矩形則で近似する時の誤差：

$$\int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{k}{N}\right)$$

は，

$$-\sum_{\substack{p=-\infty \\ p\neq 0}}^{\infty} c_{pN} = -C_N - C_{-N} - C_{2N} - C_{-2N} \cdots$$

で与えられる.

結局，IMT積分公式の誤差評価は，積分：

$$C_N = \int_0^1 \xi(\varphi_{IMT}(y))\,(\varphi_{IMT}(y))^{\alpha}\,(1-\varphi_{IMT}(y))^{\alpha}\,\varphi'_{IMT}(y)\,e^{2\pi i N y}\,dy \tag{2.2}$$

の $N \to \infty$ における漸近評価に帰着される．

(2.2) の積分の評価は，鞍点法を用いることによって行なう

ことができる。実際，被積分関数の正則性に注意して，積分路を図1にあるような被積分関数の鞍点を通る積分路$\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3$に変形することによって，以下のように$c_N$に対する一連の評価を得ることができる。

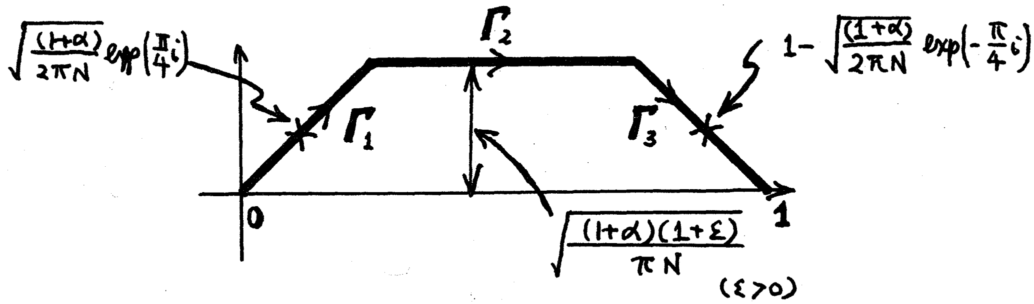
$$|c_N| = \left|\int_0^1 \xi(\varphi_{IMT}(y))(\varphi_{IMT}(y))^{\alpha}(1-\varphi_{IMT}(y))^{\alpha}\varphi'_{IMT}(y)\, e^{2\pi i N y}\, dy\right| \tag{2.2}$$

$$= \left|\int_{\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3} \xi(\varphi_{IMT}(y))(\varphi_{IMT}(y))^{\alpha}(1-\varphi_{IMT}(y))^{\alpha}\varphi'_{IMT}(y)\, e^{2\pi i N y}\, dy\right| \tag{2.3}$$

$$\leqq \sup_{y\in\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3} |\xi(\varphi_{IMT}(y))| \cdot \left|\int_{\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3} |(\varphi_{IMT}(y))^{\alpha}(1-\varphi_{IMT}(y))^{\alpha}\varphi'_{IMT}(y)\, e^{2\pi i N y}\, dy\right| \tag{2.4}$$

$$\leqq \quad c_1 \cdot c_2 \frac{1}{N^{\frac{3}{4}+\alpha}} \exp\left(-\sqrt{4\pi(1+\alpha)N}\right) \tag{2.5}$$

（ここで $c_1 = \sup_{y\in\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3} |\xi(\varphi_{IMT}(y))|$ とおいた）




× 鞍点

図1. 鞍点法で用いられる 積分路 $\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3$

注意2.1　積分路$\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3$は論文[1]に記されたものとは，少々異なる。このような積分路を考えたのは，このような積分路上で積分を評価する方が数学的に厳密化した議論がしやすい故である。評価の結果は，論文[1]に得られているものと本質的に変りはない。ただし，紙数の都合で，その評価に関する部分（計算）は省略する。

この$C_N$の漸近評価と，補題2.1 とあわせて，IMT積分公式の誤差評価(2.1)を得る．

## §3. IMT積分公式が有効な関数族(関数空間)$\mathbf{H}_1$

ここでは，基本的に，IMT積分公式が有効な関数族＝§2で述べた誤差評価が成立するような関数族を設定することを目指す．しかし，§2で述べた誤差評価が成立するような関数族を完全に特徴づけることは非常に困難である．そこで，より容易な問題“§2で述べた誤差評価法をそのまま踏襲できるような自然な関数族(関数空間)を設定すること”の解決を目指す．

そこで，まず，§2で述べた評価((2.2)～(2.5))を，$g(x)\equiv\xi(x)\cdot x^{\alpha}(1-x)^{\alpha}$とおいて，$g(x)$を用いて書きかえてみる；

$$|c_N|=\left|\int_0^1 g(\varphi_{IMT}(y))\,\varphi'_{IMT}(y)\,e^{2\pi iNy}\,dy\right| \tag{2.2'}$$

$$=\left|\int_{\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3} g(\varphi_{IMT}(y))\,\varphi'_{IMT}(y)\,e^{2\pi iNy}\,dy\right| \tag{2.3'}$$

$$\leq \sup_{y\in\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3}\left|g(\varphi_{IMT}(y))(\varphi_{IMT}(y))^{-\alpha}(1-\varphi_{IMT}(y))^{-\alpha}\right|\left|\int_{\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3}1(\varphi_{IMT}(y))^{\alpha}(1-\varphi_{IMT}(y))^{\alpha}\varphi'_{IMT}(y)e^{2\pi iNy}dy\right| \tag{2.4'}$$

$$\leq\ c_1\cdot c_2\frac{1}{N^{\frac{3}{4}+\alpha}}\exp(-\sqrt{4\pi(1+\alpha)N}) \tag{2.5'}$$

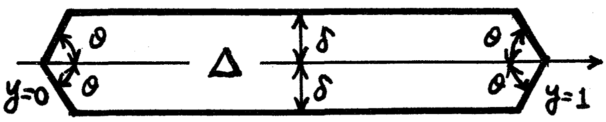
(ここで $c_1=\sup_{y\in\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3}|g(\varphi_{IMT}(y))(\varphi_{IMT}(y))^{-\alpha}(1-\varphi_{IMT}(y))^{-\alpha}|$ である)

ここで，容易にわかるように，この評価（変形(2.2')〜(2.5')）が正当化されるためには，次の2つの要求が満足されればよい。

要求(1)：(2.2')から(2.3')への変形において，積分路の変形が可能であること。

要求(2)：$c_1 = \sup_{y\in\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3} |g(\varphi_{IMT}(y))(\varphi_{IMT}(y))^{-\alpha}(1-\varphi_{IMT}(y))^{-\alpha}| < +\infty$.

従って，§2.で述べたような誤差評価が成立するためには，被積分関数$g$が，十分大きなすべての$N$に対して，要求(1),(2)を満たせばよい。この要求は，十分大きなすべての$N$に対して積分路$\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3$が含まれる図2に示したような領域$\Delta$上で，$g(\varphi_{IMT}(y))$が正則で，$g(\varphi_{IMT}(y))(\varphi_{IMT}(y))^{-\alpha}(1-\varphi_{IMT}(y))^{-\alpha}$が有界であれば，満足される。




$\tan\theta = 1+\rho \quad (\rho>0)$, $\delta > 0$

図2. 領域$\Delta$（十分大きなすべての$N$に対して$\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3$が含まれる）

以上の議論から，§2で述べた誤差評価が成立する関数空間（IMT積分公式が有効な関数空間）として，自ずと次のような関数空間$\mathbf{H}_1$が考えられる（図3参照）。

$$\mathbf{H}_1 = \{\, g(z) \mid \text{(1)}\ g(z)\text{は，Riemann面 } D=\varphi_{IMT}(\Delta)\text{上で正則，} \quad \text{(2)} \sup_{z\in\varphi_{IMT}(\Delta)} |g(z)z^{-\alpha}(1-z)^{-\alpha}| < +\infty \,\}$$

ただし，ノルム$\|g\|_1$は $\sup_{z\in\varphi_{IMT}(\Delta)} |g(z)z^{-\alpha}(1-z)^{-\alpha}| \,(<+\infty)$ で入れる。

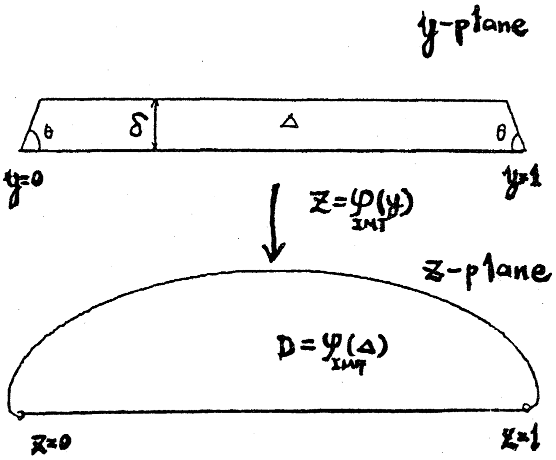



図3. $\varphi_{IMT}(\Delta)$ の概形（上半平面のみ）

注意 3.1　関数空間 $\mathbf{H}_1$ には，$z^\beta(1-z)^\beta$ $(\beta \geq \alpha)$ が入っている．このことに鑑みるに，この関数空間は，積分区間の端点における特異性が $z^\alpha(1-z)^\alpha$ 以下の関数の成す空間と"象徴的に"述べてもよいと思われる．

## §4. $\mathbf{H}_1$ の性質（積分作用素の近似と関連した性質）

### 4.1. $\mathbf{H}_1$ の基本的性質

$\mathbf{H}_1$ は，次のような一連の性質をもつ．

(1) $\mathbf{H}_1$ は Banach 空間である（ただし，このことは，δ が十分小さいときにのみしか証明できていない．δ がかなり大きくても成立するようであるが）

$\mathbf{H}_1$ 上の作用素 A のノルム $\|A\|_1$ を $\displaystyle\sup_{g\in \mathbf{H}_1} \frac{|Ag|}{\|g\|_1}$ で入れる．

(2) 積分作用素 $\int_0^1 g(x)dx$，値代入作用素 $g(a_i)$ ，$a_i \in (0,1)$ は有界作用素である．

(3) 数値積分公式 $\sum_{i=1}^N A_i g(a_i)$ に対する誤差生成作用素：

$$E(A_i\,;\,a_i)\,g = \int_0^1 g(x)dx - \sum_{i=1}^N A_i g(a_i)$$

は有界作用素である．

ＩＭＴ積分公式の誤差評価に対しては，次の結果が成立する（本質的に，以下の結果が成立するように関数空間を設定したのであるから，この結果（性質）は当然である）．

$$|\text{IMT積分公式（N点）による誤差}| \leqq \|g\|_1 \cdot C \frac{1}{N^{\frac{3}{4}+\alpha}} \exp(-\sqrt{4\pi(1+\alpha)N})$$

つまり，

$$\|E(\text{IMT積分公式（N点）})\|_1 \leqq C \frac{1}{N^{\frac{3}{4}+\alpha}} \exp(-\sqrt{4\pi(1+\alpha)N})$$

## 4.2. 変数変換によって導入される空間

$\mathbf{H}_1$ 上の積分公式の性質を調べるために，次に定義するような変数変換によって導入される関数空間を考える．

まず，$\Psi$ を $\varphi_{IMT}$：IMT変換と $\varphi_{tanh}$：$\frac{1}{2}\tanh(x)+\frac{1}{2}$ の合成 $\varphi_{IMT}\circ\varphi_{tanh}$ とする．このとき，$\mathbf{H}_1$ から変数変換 $\Psi$ によって導入される関数空間 $\mathbf{H}_\Psi$ を次のように定義する（図4参照）．

$$\mathbf{H}_\Psi = \{ f(\xi) \mid \ (1)\ f(\xi)\text{は，}\Psi^{-1}(\varphi_{IMT}(\Delta))\text{上で正則，}$$
$$(2)\ \sup_{\xi\in\Psi^{-1}(\varphi_{IMT}(\Delta))} |f(\xi)(\Psi(\xi))^{-\alpha}(1-\Psi(\xi))^{-\alpha}/\Psi'(\xi)| < +\infty \}$$

ただし，ノルム $\|f\|_\Psi$ は $\sup_{\xi\in\Psi^{-1}(\varphi_{IMT}(\Delta))} |f(\xi)(\Psi(\xi))^{-\alpha}(1-\Psi(\xi))^{-\alpha}/\Psi'(\xi)|$ で入れる．

$\mathbf{H}_\Psi$ は，次のような基本的性質をもつ

(1) $\mathbf{H}_\Psi$ は Banach 空間である（$\delta$ は十分小さいとする）

$\mathbf{H}_\Psi$ 上の作用素 A のノルム $\|A\|_\Psi$ は $\sup_{f\in\mathbf{H}_\Psi} \frac{|Af|}{\|f\|_\Psi}$ で入れる．

(2) 積分作用素 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$，値代入作用素 $f(b_i)$，$b_i \in (-\infty,\infty)$，

誤差生成作用素 $E(B_i;b_i)f = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx - \sum_{i=1}^{N} B_i f(b_i)$ は有界作用素

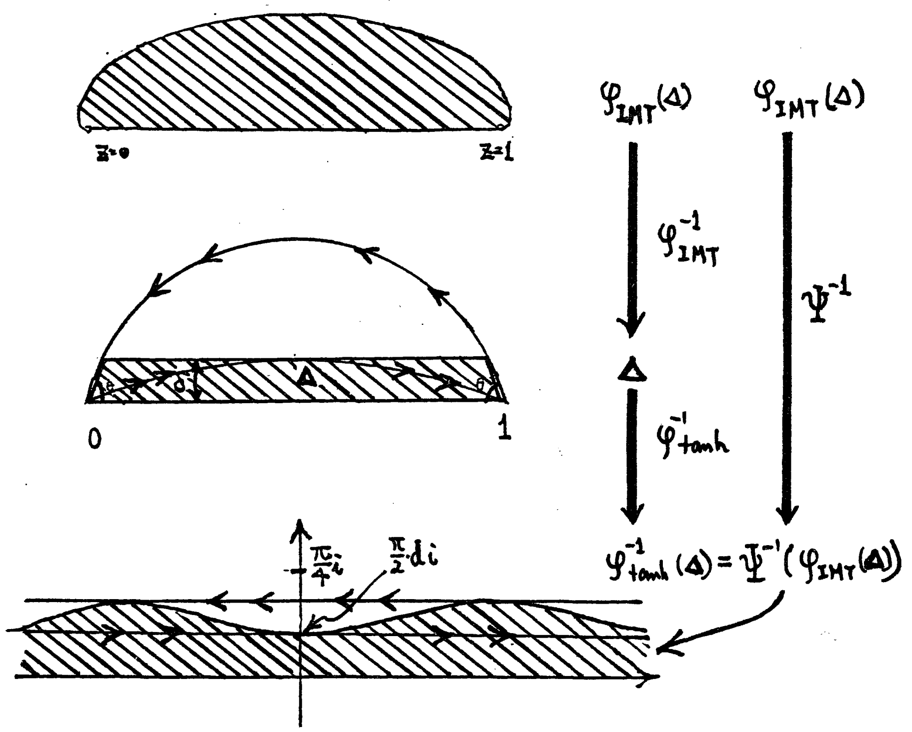



図4. $\Psi^{-1}(\varphi_{IMT}(\Delta)) = \varphi_{tanh}^{-1}\circ\varphi^{-1}_{IMT}(\varphi_{IMT}(\Delta))$ の概形（上半面）

$\mathbf{H}_1$と$\mathbf{H}_\Psi$の基本関係は次の定理で与えられる。

**定理4.1（$\mathbf{H}_1$と$\mathbf{H}_\Psi$の基本関係）**

(1) $g\in\mathbf{H}_1$ ならば，$g(\Psi)\cdot\Psi'\in\mathbf{H}_\Psi$ で $\|g\|_1=\|g(\Psi)\cdot\Psi'\|_\Psi$.

逆に，$h\in\mathbf{H}_\Psi$ ならば，$h(\Psi^{-1})\cdot(\Psi^{-1})'\in\mathbf{H}_1$ で $\|h\|_\Psi=\|h(\Psi^{-1})\cdot(\Psi^{-1})'\|_1$.

(2) $A_i\in(-\infty,\infty)$，$a_i\in(0,1)$ に対して，

$$\|E(A_i;a_i)\|_1 = \left\|E\left(\frac{A_i}{\Psi'(\Psi^{-1}(a_i))};\ \Psi^{-1}(a_i)\right)\right\|_\Psi.$$

逆に，$B_i\in(-\infty,\infty)$，$b_i\in(-\infty,\infty)$ に対して，

$$\|E(B_i;b_i)\|_\Psi = \left\|E\left(\frac{B_i}{(\Psi^{-1})'(\Psi(b_i))};\ \Psi(b_i)\right)\right\|_1.$$

（証明）

(1) $\|g\|_1=\|g(\Psi)\cdot\Psi'\|_\Psi$ を示せば，十分である。この等式は，次のように容易に得られる。

$$\|g(\Psi)\cdot\Psi'\|_{\Psi} = \sup_{\zeta\in\Psi^{-1}(\varphi_{\mathrm{IMT}}(\Delta))} |g(\Psi(\zeta))\Psi'(\zeta)(\Psi(\zeta))^{-\alpha}(1-\Psi(\zeta))^{-\alpha}/\Psi'(\zeta)|$$
$$= \sup_{z=\Psi(\zeta)\in\varphi_{\mathrm{IMT}}(\Delta)} |g(z)z^{-\alpha}(1-z)^{-\alpha}|$$
$$= \|g\|_1 .$$

逆も同様である。

(2) まず

$$\|E(A_i;a_i)\|_1 = \sup_{g\in\mathbf{H}_1}\frac{|\int_0^1 g(x)dx-\sum_i A_i g(a_i)|}{\|g\|_1}$$
$$= \sup_{g\in\mathbf{H}_1}\frac{|\int_{-\infty}^{\infty} g(\Psi(\zeta))\Psi'(\zeta)d\zeta-\sum_i A_i\dfrac{g(\Psi(\Psi^{-1}(a_i)))\Psi'(\Psi^{-1}(a_i))}{\Psi'(\Psi^{-1}(a_i))}|}{\|g(\Psi)\Psi'\|_{\Psi}}$$
$$\leq \sup_{h\in\mathbf{H}_{\Psi}}\frac{|\int_{-\infty}^{\infty} h(\zeta)d\zeta-\sum_i \dfrac{A_i}{\Psi'(\Psi^{-1}(a_i))}\cdot h(\Psi^{-1}(a_i))|}{\|h\|_{\Psi}}$$

（この不等式は，$h=g(\Psi)\cdot\Psi'$ とおいてみればわかる）

$$= \left\|E\left(\frac{A_i}{\Psi'(\Psi^{-1}(a_i))};\ \Psi^{-1}(a_i)\right)\right\|_{\Psi} .$$

逆向きの不等式も同様にして得られ，等式が成立する。

オ2の等式も同様に証明できる。 ■

定理4.1の中の(1)の性質の故に，$\mathbf{H}_{\Psi}$ を変数変換 $\Psi$ によって導入された関数空間と呼ぶ。以下，この定理（特に(2)）を利用して，$\mathbf{H}_1$ 上の積分公式の研究を $\mathbf{H}_{\Psi}$ 上の積分公式の研究に帰着させて調べる。

## 4.3 $\mathbf{H}_1$ の性質（$\mathbf{H}_{\Psi}$ を通してわかる）

(I) $\inf_{\substack{a_i\in(0,1)\\A_i\in\mathbb{R}}} \|E(A_i;a_i)\|_1$ の評価

$\mathbf{H}_1$ と $\mathbf{H}_\Psi$ の関係(2)から,

$$\inf_{\substack{a_i\in(0,1)\\A_i\in\mathbb{R}}} \|E(A_i;a_i)\|_1 = \inf_{\substack{b_i\in(-\infty,\infty)\\B_i\in\mathbb{R}}} \|E(B_i;b_i)\|_\Psi$$

が成り立つ。右辺の量に対しては,次の結果が成り立つ.

**定理 4.2**

$$\inf_{\substack{b_i\in(-\infty,\infty)\\B_i\in\mathbb{R}}} \|E(B_i;b_i)\| \geq \mathrm{const}\cdot\exp\left(-c\frac{N}{\log N}\right)$$

従って, $\|E(A_i;a_i)\|_1$ の下限の評価として,次の結果を得る.

**定理 4.3**

$$\inf_{\substack{a_i\in(0,1)\\A_i\in\mathbb{R}}} \|E(A_i;a_i)\| \geq \mathrm{const}\cdot\exp\left(-c\frac{N}{\log N}\right)$$

以下に,定理 4.2 の証明を与える(基本的証明のアイディアは[4]で述べたものと同じ)

数値積分公式(分点 $b_i$, 重み $B_i$ $(i=1,\cdots,N)$)が任意に与えられたとき,

$$f(\xi) \equiv \left\{\prod_{i=1}^{N}\tanh^2(\xi-b_i)\right\}\cdot(\Psi(\xi))^\alpha(1-\Psi(\xi))^\alpha\cdot\Psi'(\xi)$$

なる関数を考える.

この関数 $f(\xi)$ は, $\mathbf{H}_\Psi$ に属し,かつ, $\|f\|_\Psi\leq 1$ である( $|\mathrm{Im}\,z|\leq\frac{\pi}{4}$ なる $z$ に対して $|\tanh(z)|\leq 1$ となることに注意せよ).

一方, $f(\xi)$ に与えられた数値積分公式を適用したときの誤

差は以下のように評価される.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{N} B_i f(b_i) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

$$\geq 2R \int_{-R}^{R} f(x) \frac{dx}{2R} \qquad (\because f(x) \geq 0)$$

$$\geq 2R \exp\left( \int_{-R}^{R} \log f(x) \frac{dx}{2R} \right)$$

$\Big(\because$ Jensenの不等式

$g(x)$が上に凸ならば, $E[g(X)] \leq g(E[X])$

$$= 2R \cdot \exp\left( \frac{1}{2R} \sum_{i=1}^{N} 2\int_{-R}^{R} \log|\tanh(x-b_i)|\,dx \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} \log\left((\Psi(x))^{\alpha}(1-\Psi(x))^{\alpha}\Psi'(x)\right) dx \right) \qquad (4.1)$$

(4.1)の指数部才一項に対応する部分は, 次のように評価される.

$$\exp\left( \frac{1}{2R} \sum_{i=1}^{N} 2\int_{-R}^{R} \log|\tanh(x-b_i)|\,dx \right)$$

$$\geq \exp\left( \frac{1}{2R} \sum_{i=1}^{N} 2\int_{-\infty}^{\infty} \log|\tanh(x-b_i)|\,dx \right)$$

$$= \exp\left( \frac{1}{2R} \cdot N \cdot 2 \int_{-\infty}^{\infty} \log|\tanh(x)|\,dx \right)$$

$$= \exp\left( -\frac{N}{4R}\pi^2 \right) \qquad (4.2)$$

$$\Big(\because \int_{-\infty}^{\infty} \log|\tanh(x)|\,dx = -\frac{\pi^2}{4}$$

次に(4.1)の指数部才二項に対応する部分の評価を行う. まず, $-R \to -\infty$ ( $\varphi_{\tanh}(-R) \to +0$ ) の時,

$$(\Psi(x))^{\alpha}(1-\Psi(-R))^{\alpha}\Psi'(-R) = (\varphi_{IMT}(\varphi_{\tanh}(-R)))^{\alpha}(1-\varphi_{IMT}(\varphi_{\tanh}(-R)))^{\alpha}$$
$$\times \varphi_{IMT}'(\varphi_{\tanh}(-R)) \cdot \varphi_{\tanh}'(-R)$$

$$\sim \mathrm{const}\cdot(\varphi_{\tanh}(-R))^{2\alpha}\exp\left(-\frac{(\alpha+1)}{\varphi_{\tanh}(-R)}\right)\cdot\varphi'_{\tanh}(-R)$$

$$\sim \mathrm{const}\cdot\exp(-4\alpha R)\cdot\exp\left(-(\alpha+1)e^{2R}\right)\cdot\exp(-2R).$$

$R\to\infty$ においても，$(\Psi(R))^{\alpha}(1-\Psi(R))^{\alpha}\Psi'(R)$ に対して，同様の評価が成り立つ。従って，任意の実数 $x$ に対して

$$(\Psi(x))^{\alpha}(1-\Psi(x))^{\alpha}\Psi'(x) \geqq \mathrm{const}\cdot\exp(-2(\alpha+1+\varepsilon)\cosh(2x)) \quad (\varepsilon>0)$$

としてよい。この不等式を用いると，(4.1) の指数部分 = 項に対応する部分は，以下のように評価される。

$$\exp\left(\frac{1}{2R}\int_{-R}^{R}\log((\Psi(x))^{\alpha}(1-\Psi(x))^{\alpha}\Psi'(x))\,dx\right)$$

$$\geqq \exp\left(\frac{1}{2R}\int_{-R}^{R}\log(\mathrm{const}\cdot\exp(-2(\alpha+1+\varepsilon)\cosh 2x))\,dx\right)$$

$$=\exp\left(\frac{1}{2R}\int_{-R}^{R}(\log(\mathrm{const})-2(\alpha+1+\varepsilon)\cosh 2x)\,dx\right)$$

$$=\exp\left(\frac{1}{2R}(2R\cdot\log(\mathrm{const})-2(\alpha+1+\varepsilon)\sinh 2R)\right)$$

$$=\exp\left(\mathrm{const}-2(\alpha+1+\varepsilon)\frac{1}{2R}\sinh 2R\right) \qquad (4.3)$$

(4.2) と (4.3) を (4.1) に代入すると

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx-\sum_{i=1}^{N}B_i f(b_i) \geqq \mathrm{const}\cdot\exp\left(-\frac{N}{4R}\pi^2-2(\alpha+1+\varepsilon)\frac{1}{2R}\sinh 2R\right) \qquad (4.4)$$

を得る。ここで $R$ を $\frac{N}{4R}\pi^2=2(\alpha+1+\varepsilon)\frac{1}{2R}\sinh 2R$ となるようにとると，$R\fallingdotseq c\log N$ となる。この値を (4.4) に代入して

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx-\sum_{i=1}^{N}B_i f(b_i) \geqq \mathrm{const}\cdot\exp\left(-c\frac{N}{\log N}\right)$$

を得る。これは，先に述べた $\|f\|\leqq 1$ に注意すると，定理 4.2 に述べた評価が成立することを意味する。 ∎

(II) $\| E(A_i; a_i) \|_1 \leqq \mathrm{const}' \cdot \exp\left(-c' \frac{N}{\log N}\right)$ を満足する公式

(I)で$\| E(A_i; a_i) \|_1$の下限の下からの評価が$\mathrm{const} \cdot \exp\left(-c \frac{N}{\log N}\right)$で与えられることがわかった。次に問題となるのは，この下限の評価を達成する公式が存在するかどうかである。以下に見るように，誤差評価式に含まれる定数は$\| E(A_i; a_i) \|_1$の下限の評価で与えられたものとは異なるが，本質的に同じ形の評価式が成立するような公式（$\| E(A_i; a_i) \|_1 \leqq \mathrm{const}' \cdot \exp\left(-c' \frac{N}{\log N}\right)$を満足する公式）が存在する。

ここでも$\mathbf{H}_\Phi$で考察する。まず，基本となるのは次の補題である。

**補題 4.4 ([5])**

領域 $\{ z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Im}\, z| < \frac{\pi}{2} d \}$ で解析的な関数 $f$ で，次の条件を満足するものを考える。

(1) $N(f) \overset{\mathrm{d}}{=} \lim\limits_{c \to d-0} \int_{-\infty}^{\infty} \left( |f(x + c\frac{\pi}{2} i)| + |f(x - c\frac{\pi}{2} i)| \right) dx < +\infty$.

(2) $0 \leqq c < d$ に対して $\lim\limits_{|x| \to \infty} \int_{-c\frac{\pi}{2}}^{c\frac{\pi}{2}} |f(x + yi)| \, dy = 0$.

この時，$h > 0$ に対して

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx - h \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(jh) \right| \leqq \frac{\exp\left(-\frac{\pi^2}{h} d\right)}{1 - \exp\left(-\frac{\pi^2}{h} d\right)} N(f)$$

この補題，及び，$\Phi^{-1}(\varphi_{IMT}(\Delta))$（図4）の形から，容易に次の結果が得られる。

**定理 4.5**

$$\| E(\text{台形則}) \|_\Phi \leqq \mathrm{const}' \cdot \exp\left(-c' \frac{N}{\log N}\right)$$

ただし，ここで言う台形則とは，$h\sum_{j=-N}^{N} f(j\cdot h)$ の形の公式を意味するものとする

(定理4.5の証明)

補題4.4から，台形則の生成する誤差に対して，次の評価が成立する．

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx - h\sum_{j=-N}^{N} f(j\cdot h)\right| \leq \frac{\exp(-\frac{\pi^2}{h}(d-\varepsilon))}{1-\exp(-\frac{\pi^2}{h}(d-\varepsilon))}\cdot 2\int_{-\infty}^{\infty}\left|w(x+\tfrac{\pi}{2}(d-\varepsilon)i)\right|dx\cdot\|f\|_{\Psi}$$

$$+\, h\sum_{|j|>N}|f(j\cdot h)|.$$

ここで，$d$ は図4で定義した量で，$\varepsilon$ は正の任意定数 $(0\leq\varepsilon<d)$，$w(\xi)\overset{\mathrm{def}}{=}(\Psi(\xi))^{\alpha}(1-\Psi(\xi))^{\alpha}\,\Psi'(\xi)$ である．$\left(\int_{-\infty}^{\infty}|w(x+\frac{\pi}{2}(d-\varepsilon)i)|dx<+\infty\right.$ に注意$\left.\right)$

この評価の第二項は，以下のように評価される．

$$h\sum_{|j|>N}|f(j\cdot h)| \leq h\sum_{|j|>N}|w(j\cdot h)|\cdot\|f\|_{\Psi}$$

$$\leq \left(h\cdot\sum_{|j|>N}\mathrm{const.}\cdot\exp(-2(\alpha+1-\varepsilon')\cosh(2jh))\right)\cdot\|f\|_{\Psi}$$

$$(\varepsilon'>0)$$

$$\leq \mathrm{const.}\cdot h\exp(-2(\alpha+1-\varepsilon')\cosh(2Nh))\cdot\|f\|_{\Psi}.$$

ここで，$-\frac{\pi^2}{h}(d-\varepsilon)=-2(\alpha+1-\varepsilon')\cosh(2Nh)$ となるように $h$ をとると，$h\fallingdotseq c\cdot\log N/N$ となり，この $h$ を以上の評価に代入すると

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx - h\sum_{j=-N}^{N} f(j\cdot h)\right| \leq \mathrm{const}'\cdot\exp\left(-c'\frac{N}{\log N}\right)\cdot\|f\|_{\Psi}$$

を得る．これは，定理4.5の評価を意味する． ■

定理4.5の結果を，$\mathbf{H}_1$ と $\mathbf{H}_{\Psi}$ の関係(定理4.1)を用いて，$\mathbf{H}_1$ の

結果に翻訳すると次のようになる．

**定理4.6**

$\mathbf{H}_1$ における積分公式 $h\sum_{j=-N}^{N} g(\Psi(jh))\cdot\Psi'(jh)$ $(h=c\,{}^{\log N}/_{N})$ に対して

$$\| E(\,h\Psi'(j\cdot h);\ \Psi(jh))\|_1 \leq \mathrm{const}'\cdot \exp\left(-c'\frac{N}{\log N}\right)$$

が成り立つ．

この結果からわかるように，IMT積分公式の誤差評価が自然な形で拡張されるような関数空間 $\mathbf{H}_1$ においては，積分公式

"$\Psi$ 変換（IMT変換＋tanh変換）＋台形則"

が（IMT積分公式ではなく）最適―誤差ノルムの下限の評価と同じ形の誤差評価が得られているという意味で最適―である．

## 4.4 DE公式に対する誤差ノルムの評価

DE公式（[6]）は，積分区間の端点に代数的特異性をもつ関数の積分公式として，非常に有効であることが知られている．一方，§3の注意で述べたように，$\mathbf{H}_1$は 0，1 において代数的特異性をもつような関数の成す空間と考えられる．そこで，ここでは，DE公式を$\mathbf{H}_1$の関数に施した時の誤差について考える．

まず，次の$\mathbf{H}_1$から DE変換によって導入される関数空間を考える．（ただし，DE変換：$\frac{1}{2}\tanh(\frac{\pi}{2}\sinh(z))+\frac{1}{2}$ を $\Phi$ と記す）

$$\mathbf{H}_\Phi=\{\,f(z)\mid \quad (1)\ \ f(z) \text{ は } \Phi^{-1}(\varphi_{IMT}(\Delta)) \text{ 上で正則，}$$

$$(2)\ \sup_{z\in\Phi^{-1}(\varphi_{IMT}(\Delta))} |f(z)(\Phi(z))^{-\alpha}(1-\Phi(z))^{-\alpha}/\Phi'(z)|<+\infty\,\}$$

ここでノルムは $\|f\|_{\Phi} = \sup_{\xi \in \Phi^{-1}(\varphi_{IMT}(\Delta))} |f(\xi)(\Phi(\xi))^{\alpha}(1-\Phi(\xi))^{\alpha}/\Phi'(\xi)|$ で入れる。

この時，次の事実が成り立つ（証明略）。

《事実》　$\Phi^{-1}(\varphi_{IMT}(\Delta)) \supset$ 帯領域 $\{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Im}\, z| < d\}$。

このことから，定理 4.5 の証明と同様にして，次の結果を得る。

**定理 4.7**

$$\|E(\text{台形則})\|_{\Phi} \leqq \mathrm{const} \cdot \exp\left(-c\frac{N}{\log N}\right)$$

この結果は，$\mathbf{H}_1$ と $\mathbf{H}_{\Phi}$ の関係に鑑みれば，次の結果が成立することを意味する。

**定理 4.8**

$$\|E(\text{DE公式})\|_1 \leqq \mathrm{const} \cdot \exp\left(-c\frac{N}{\log N}\right)$$

この結果は，$\mathbf{H}_1$ では，DE公式が最適ー4.3の(II)における と同じ意味でーであることを物語っている。

## §5 おわりに（まとめと今後の課題）

本論文において，IMT積分公式が有効な（論文〔1〕にあるIMT積分公式の誤差評価法がそのまま適用出来るような自然な）関数空間 $\mathbf{H}_1$ を設定した。そして，この関数空間における積分作用素を近似する時の誤差ノルムの下限の評価を与えた。そして，さらに，DE公式や（IMT変換＋tanh変換)を行ってから台形則を適用する公式が $\mathbf{H}_1$ で最適であることを示した。

今後の課題としては，IMT型の他の積分公式（IMT型DE公式や一般化されたIMT公式[6],[7]）に対して，ここで行なったのと同じ研究を行なうことが残っている（この研究は，本質的に，変換に用いる関数のRiemann面を調べることに帰着される）．今後の研究に俟ちたい．

## 参考文献

[1] 伊理正夫，森口繁一，高沢嘉光：ある数値積分公式について，京都大学数理解析研究所講究録，No.21 (1970), pp.82-118.

[2] P.J. Davis and P. Rabinowitz: "Methods of Numerical Integration," 2nd-ed., Academic Press(1984).

[3] M. Mori: Quadrature formulas obtained by variable transformation and the DE-rule, J. Comp. Appl. Math., Vol.12 & 13 (1985), pp.119-130.

[4] 杉原正顕：DE変換公式の最適性について，京都大学数理解析研究所講究録，No.585 (1986), pp.150-175.

[5] F. Stenger: Integration formulas based on the trapezoidal formula, J. Inst. Math. Appl., Vol.12 (1973), pp.103-114.

[6] M. Mori: An IMT-type double exponential formula for numerical integration, Publ. RIMS, Kyoto Univ., Vol.14 (1978), pp.713-729.

[7] K. Murota and M. Iri: Parameter tuning and repeated application of the IMT-type transformation in numerical quadrature, Numer. Math., Vol.38 (1982), pp.327-363.