数理解析研究所講究録
第 615 巻 1987 年 1-82

非 I 型群の表現論

岡山大 教養部 梶原 毅

§. Introduction

我々が研究の対象としている非 I 型 object の中で最初のものは、J.von Neumann が作った non-type I factor の例である。彼は hyperfinite II_1 factor とそうでないものとの例を作った。そうでない例が、いわゆる property Γ を持たないもので、自由群の W*群環がそれにあたるものであった。当時から既に自由群が non-type I group であることは周知の事実であった。

この後、彼は factor でない case を同様に扱うために reduction theory [vN] を著した。M.I.Mautner はそれに刺激されて、Banach algebra の表現の分解理論を作り、既約分解と可換子環の極大部分可換子環 MASA とが一対一に対応していることを示した。また、彼は、初めて non-type I Lie group の例を作っている。これは、今では Mautner group として知られているもので、5次元の solvable Lie group である。もう一つの有名な例は後に Dixmier によって発見され、これもまた Dixmier group と呼ばれている。実は、これらは non type I connected Lie group の典型であることが後で Auslander-Kostant [As1] でわかっている。

G.W.Mackey は [Mk1] において、誘導表現の理論をコンパクト群から一般の局所コンパクト群に拡張し、 それに関連して局所コンパク

ト群の dual の Borel structure の議論を行った。その中で、彼は局所コンパクト群の dual が countably separated になることとその群が type I であることが同値であることを示した。これによって、群が type I でないときは、その群の dual をきれいな形で分類することは全く不可能であることが分かった。この研究は J.Glimm [Gl2] に引き継がれた。彼はもっと一般に、(separable) type I C*-algebra の性質を調べ、少なくとも抽象論のレベルにおいては CCR という完全な特徴づけを得た。Dual の Borel structure については、counatably separated という弱い性質ではなく、standard という非常にきれいな性質に置き換えることができた。

さて、この Mackey-Glimm による type I'ness の解析が現在につながる non type I 表現論の研究の始まりであると考えられる。以下において本論説の構成について、順を追って説明していきたいとおもう。本文は、2,3,4,5 の４つの章からなり、それらの章はさらにアルファベットによって表される、セクションに細分されている。

Type I representation theory から non type I representation へと移行すると、さまざまな概念の拡張一般化、および対象となる群が type I であるかどうかの判定なども必要になる。まず 2 章ではこれらの non type I representation theory の一般論について述べる。

Mackey の little group method が提起した non smooth action と type との関係はいわゆる unwinding phenomenon という微妙な問題を含んでおり、現在に至るも未解決である。2-a においてはこの問題を取り扱う。

Non type I'ness の pathology を最も端的に表しているのは昔から知られているように discrete group である。2-b では、discrete type $\begin{cases} \text{smooth — wondering} \\ \text{nonsmooth — orbit 再帰} \end{cases}$

group でも特に群の種類を特定せず、type I 性の判定条件に関する Thoma の結果を中心にして述べていきたいと思う。

通常の変換群においては、orbit の再帰性と "wondering" 性とは互に相反する性質であり、前者は non smooth 性を、後者は非常に良い smooth 性を表している。群のユニタリ表現も Hilbert space への群の作用と見ることができるから、この作用の漸近的挙動にも何等かの意味があるものと考えられる。すなわち、2-c においては既約表現の行列要素が無限遠で消えるかどうかで type の判定ができるのではないかという話題について述べる。

Compact 群と違って、non compact 群の表現の分解の理論は複雑になる。まず type I であっても direct integral が必要になり、すっきりとはしない。さらに non type I ともなると既約分解は必ずしも canonical でも unique でもなくなり、場合によっては central decomposition, homogeneous decomposition などの、より粗い分解を canonical なものとして考えなければならないことが多い。既約分解はこれらの "smooth" な分解の細分になり、von Noumann algebra の MASA の構造論とも関係して難解な問題である。2-d においては、これらの分解の一般論について紹介する。

Non compact group の square integrable representation は、compact group の表現論とのアナロジー的な部分である。しかしながら、non unimodular group, non type I group などに対しては、定義を拡張しないと、formal degree orthogonality relation などうまくいかない。これらに関することが 2-e の内容である。

Non type I representation theory を展開しようとするときの二つの対照的な立場について 3,4 章において述べる。3 章が "non smooth" objects についてであり、4 章が "smooth" objects につい

てである。前者は non type I'ness の本質に迫ろうという魅力的な立場であるが、一般論はあまりなく進歩は極めて遅々としている。また、いまだかつて major な分野となったことはない。それに対して、後者は本質的に難解な部分は避けて通っているようなところもあるが、一般論は作りやすく、また作用素環論との関連性もあって多くの人々によって研究され、豊富な結果が得られている。

3 章は a,b の二つのセクションからなっており、前者では Mackey に端を発する measured groupoid に関すること、後者では groupoid の表現に対応している 1-cocycle について、それぞれ述べている。

4-a は primitive ideal space, dual topology に関するセクションである。Primitive ideal space とは dual space の単なる T_0 化と思えるので、smooth object としては最も自然な対象であり、最も早くから研究されていた。逆に、必ずしも Hausdorff でない topology がからんでいるため、現在に至るも問題は山積しており古くて新しいテーマであるといえよう。その意味で non type I representation 全体を貫く一つの柱であると考えられる。

C*-algebra の (strong) Morita equivalence は、以前から代数学の環論の分野において考えられていたものを Rieffel が C*-algebra に一般化したものであり、また他方では Mackey による locally compact group の induced representation の C*-algebra への一般化にもなっている。テクニカルにはそれほど複雑なものではないが、イデアル論、trace 論などにおいて道具として極めて有用であり、問題を非常に透明に見やすくすることがある。4-b ではこれについて述べる。

Primitive ideal space とならんで、trace は non type I representation のもう一つの柱である。前者に対して、trace の方は

topopogy と measure theory の中間的な性格をもち、それだけ扱いが難しい。同様な形をした定理でも、Prim 版に比べて Trace 版は難解であることが多い。2-c では trace, character, semicharacter について、および character と primitive ideal space とのいわゆる Pukanszky-Green correspondence について述べる。

最後の 2-d では、Plancherel formula, Plancherel measure を扱う。これは square integrable representation の理論と深いつながりがあり、やはり概念の一般化、拡張などが必要である。ただし non type I group の Plancherel formula は trace, ideal などに比べると、それほど main な分野であったことはなく、またそのような時代は今後も来ないのであろうと思う。

5 章においては群の範囲を特定して、一般論で述べたことがどのような形で適用されているかを考える。従って以前の章と重複する部分が幾らかでてくるのはやむをえない。

5-a では non type I に限らず、表現論の中で最も main な部分を占める connected Lie group を扱う。ただし semisimple Lie group は type I であるから、当然 solvable 系の話が主流になる。この分野の中心になるのは Pukanszky であり、彼の一連の論文がしいた路線に従って、regular representation, primitive ideal, character, semicharacter などの理論を紹介する。

Non type I の image を代表する例の一つが、irrational rotation である。これは non smooth groupoid の典型でもあり、この cohomology group は ergodic theory, function algebra とも関係がある。これについて 5-b において述べる。

Free group は古くから non type I non amenable, group の典型として扱われて来たわけであるが、最近 "radial function" を用い

た新しい視点からの研究が始まり、semisimple Lie group の表現論とのアナロジーも発見されている。5-c では free product, tree などへの一般化も含めて述べる。

Locally compact nilpotent group は connected nilpotent Lie group との類似性から、比較的頻繁に研究されてきた。この型の群に対して connected Lie group と同じように primitive ideal space, Pukanszky-Green correspondence, orbit method の拡張などを中心にして 5-e でとりあげる。

Non type I group の有力な example として、infinite dimensional group が最近浮上してきた。例えば、U(∞) などの classical compact group の inductive limit, Hilbert Lie group, manifold の diffeomorphism group, path group, さらには Kac Moody Lie group などである。これらの例は他分野の問題と結びついて興味あるものが多いが、残念ながら現在のところ私には解説する能力がない。主要論文の一部は reference に集録しているので参照されたい。また、表現論と K-theory の関係などもこれからの話題であると思うが、今の段階では積極的にコメントを加えることは差控えたい。

§ 2. General theory

2-a.Mackey 流の type analysis

$\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\alpha_p} \mathbb{Z} = H_p$

群の表現論的な type に関する最初の仕事はやはり Mackey [Mk1] である。そのなかで彼は、abelian group K と abelian normal subgroup N との semidirect product group $N \rtimes K$ が type I になるための条件を与えた。それはもちろん $\hat{N}$ 上の K orbit structure が smooth であることである。この理論を一般化しようと考えるとすると、N, K が abelian でない場合とか group extension が必ずしも split しないときにも同じ様に type の判定ができるかどうかが、一つの興味ある問題であるが、実は未だに解決されていない。

さて、 $G = N \rtimes K$ で N は type I, 任意の $\pi \in \hat{N}$ に対して $C^*(K_\pi, \omega)$ (ω は π に対応して取った cocycle) がすべて type I, K の $\hat{N}$ 上の action が non smooth とする。この時 Glimm [Gl1] によって K-nontransitive quasi orbit μ が存在する。そこで、もし任意の $\pi \in \hat{N}$ に対して $N \rtimes K_\pi$ の表現で N に制限すると $\pi \otimes 1$ となるもの V_π で、$\pi \to V_\pi$ が μ-measurable なものがうまく取れれば、 Effros [Ef1] によって $\int_{\hat{N}}^{\oplus} V_\pi \, d\mu(\pi)$ は non-type I factor representation となる。問題となるのは K_π の multiplier ω が measurable に取りうるかいなかである。K_π が trivial な場合は当然大丈夫でありまた、N が abelian であれば ω_π はすべて trivial に取れるのでうまく non type I factor representation を作ることができる。この最後の部分は Gootman [Gt2] の結果である。この問題に関しては、Gootman 自身の論説 [Gt4] において詳しい。

Group extension が split しない場合はどうであろうか。この場合には Auslander-Moore [As2] において $\hat{N}$ 上に non transitive quasi orbit が存在するにもかかわらず G 自身は type I になってしまう例を挙げている。則ちその non transitive quasiorbit に associate する表現が存在しないのである。彼等はこの現象を un-winding phenomenon とよんだ。これが彼等をして solvable Lie group の研究を type R group に限定せしめた理由である。

結局 semidirect type、すなわち crossed product になっている状況が問題として残ったわけである。ところがこの一見簡単そうに見える問題が、未だに解決されていないのである。

N が type I でないときは、Takai duality を見れば分かるようにこの種の type analysis は全く通用しない。この場合は normal subgroup の選択が良くないということなのであろう。

2-b.Discrete group

Discrete group がほとんど type I にならないということは、von Neumann の昔から気付かれていたことである。彼は ICC group の regular representation が II_1 factor representation であることを示している。勿論これは些か極端な例であるが discrete group が少しでも非可換性をもてば、 non type I になってしまうことが当然予想される。

Mackey analysis によって abelian group の finite extension が type I であるこことは容易にわかる。 Thoma [Tm1] はこの逆を示し type I discrete group の完全な特徴付けを行った。 Discrete group の regular representation が type I になる為の条件であるとか purely type II になるための条件であるとか Thoma の結果の精密化が Kaniuth [Kn1] によってなされ、またその直後に Smith [Sm] によってその証明は改良された。

Discrete group の multiplier representation については、同様の結果が Holzher [Hz1], Kleppner [Kl2] によって得られている。要するに非可換性の評価の問題であるから、格別新しい点は見当たらない。

Discrete group G の非可換性が極めて強いと、その reduced group C*-algebra C*(G) は simple になってしまう。これは G が free group のときに Powers [Pw] によって示され、以後 Bedos [Bd1], [Bd2], de la Harpe [dH] 等によって相当な一般化が行われている。

2-c.Asymptotic behavior

Locally compact group の type に関して一つの有名な conjecture が提唱されている。局所コンパクト群 G を一つ固定する。そこで G のユニタリ表現 π をとり、$P_\pi = \{ g \in G : \pi(g)$ is multiple of scalar $\}$ とおきこれを π の projective kernel と呼ぶ。ξ、η を π の表現空間の任意のベクトルとし、関数 $g \to \langle \pi(g)\xi, \eta \rangle$ を考える。この関数はもちろん projective kernel のうえで一定の値を取る。このとき conjecture は次の通りである。" G is type I if and only if for all irreducible unitary representation of G all of the above matrix elements vanish at infinity."

この conjecture を最初に考えたのは Howe-Moore [Hw3] である。彼等は local field 上の algebraic group に対して全ての matrix element が無限遠で vanish することを証明し、更に matrix element が vanish しないような example がある non-type I group に対して容易に作れることについて言及した。

これを受けて Bagget-Taylor [Bg6] は、connected Lie group の（必ずしも既約とは限らない）monomial representation にたいしてその matrix element が全て無限遠で vanish することを示した。彼等は更に vanish するスピードを問題にし、群を特定して L^p-analysis を行っている。則ち一つの表現を何個も tensor していくと減少するスピードがどんどん速くなっていき、求める L^p-condition を満たすようになる。

これまでの研究の歴史（といっても二つの論文に過ぎないが）をみると、 matrix element が vanish することが検証できるのは、あらかじめ type I であることが判っている具体的な群に対してであり、また逆に non-type I group においても vanish しない matrix element を持つ表現を構成するためには、やはり何らかの群構造を使わざるを得ない。とはいっても、いままでのあらゆる例がこの conjecture を support していることと、 conjecture の形が非常にきれいであることから考えて、正しいであろうと多くの人に思われている。ただし群の構造によらない証明については、今のとこと何のアイデアも得ることはできていない。

2-d.表現の分解の一般論

Compact group については unitary representation は完全可約であったので、完全な reduction theory をつくることができた。もっと一般の type I group については、 Mackey [Mk2] によって、余り具体的とはいえないがそれでも極めて明快な reduction theory が存在することがわかった。すなわち、G は countable separated Borel space であり、G の 任意の multiplicity free representation は G 上の standard Borel measure と一対一に対応し、任意の表現は multiplicity free representation の discrete な直和によって表すことができる。

ところが、必ずしも I 型でない場合には、ある表現の既約分解は unique でなくなってしまう。これを最初に例によって示したのは Yosizawa [Ys] である。彼は、自由群の正則表現の既約分解が一意的でないことを、誘導表現の理論によって（ただし、誘導表現の言葉は用いることなく）示した。そこから非 I 型群の既約分解と対応して、II_1factor の極大可換子環の研究が始まることになった。この問題に関しては、1950 年代から 1960 年代の始めにかけて、Dixmier [Dx1], Takesaki [Tk1], 等の研究がある。これらの研究は、後の時代に大きな影響を与えている。

Dixmier の分類は II_1factor の内部構造に注目したものであり、singular, regular, semiregular 等の概念を彼は導入した。regular とは MASA の normalizer が、von Neumann algebra 全体を生成することであり、行列環の中における対角行列全体と同様な位置を占めている。singular とは全く正反対で、normalizer が全くない状態である。

それに対して、竹崎は、表現の分解の形状によって、分類を行い、completely rough, smooth ,simple 等の概念を彼は導入した。MASA の base space は分解に現れる各表現を表している。そこで各表現のユニタリ同値によって、 base space に同値関係を導入することができる。この同値関係の形状を言葉で表したものが、上の分類である。MASA の normalizer は、MASA の base space に作用しており、その作用の同じ orbit にある表現はユニタリ同値である。従って Dixmier の 定義と Takesaki の定義は、極めて似通った状況を表していると考えられる。特に singular と simple の二つの概念の同値性については古来より問題になっている。最近も Sutherland がこの問題を論じているが、今だ完全な解決は与えられていないようである。

そこで Ernest [Er1] は dual G の代りに quasi dual G を用いることを考えた。彼はいかなる局所コンパクト群においても、任意の表現の central decomposition に対して G 上の standard measure が対応することを示した。すなわち Segal [Sg] の意味の Plancherel measure も G の上に実現することができる。彼はこの measure を canonical measure と名付けた。ところが大変な問題点は、 G 上の standard measure の中で、この canonical measure を分かりやすい方法で特徴づけることができない事である。その理由の一つは G の dual の element も G の元なので、勝手な悪い性質をもった既約分解も実は G 上の standard measure を与える事である。

さて次に Effros [Ef1] は Prim C*(G) を base にした homogeneous decomposition を考えた。この分解は一般に central decomposition よりも粗く、いわゆる ideal center によって与えられるものである。非常に良い空間 Prim C*(G) を base にしているのでこの分解の振舞いは極めてよく、 Ernest の分解が非常にデリケー

トであることと対照的である。従って一般論を展開するための base としては非常に優れており Auslander Kostant による simply connected solvable Lie group の表現論とか Gootman Rosenberg による Effros-Hahn conjecture の解決に大きな役割を果した。一方では具体的な状況は極めて分かりにくいのが欠点である。

現在までに完成され実際に用いられている分解の一般論は、これくらいである。どの理論も non type I representation の本質的なところでは力を失ってしまい、具体的な example の研究に委ねられる事になってしまう。その事については別の章に於いてまた触れたい。その他のユニークな考え方としては、Nuclear space の Gelfand triple を用いることによって non type I representation の分解の non uniqueness の本質を追及することも、興味あるアプローチであるとと思われる。

2-e.Square integrable representation

そもそも compact group の表現はすべて complete reducible であり、一般論の見地から見ればこれはすべての表現が、square integrable であることを意味する。さらに実際には integrable になっている。Peter-Weyle の定理や Schur の orthogonality relation とかが成立するのはこの事からきている。

Non compact group では square integrable な表現は discrete series と呼ばれており当然 compact group の表現論の多くを受継いでいる。特に formal degree と呼ばれる "positive number"によって Schur's orthogonality relation が成立する。

Duflo-Moore [Dfl] は、必ずしも unimodular でない type I group に対して square integrable representation の理論を拡張した。その時は、formal degree に当たるものは、そこで考えられている表現による adjoint action のもとで semi-invariant な、positive self adjoint operator となる。Orthogonality relation については、少し modify された形ながら成立している。

Non type I group の場合は、もちろん既約表現だけを考える訳にはいかない。例えば、ICC group の regular representation は II_1 factor representation だが、もちろん square integrable で、この結果すべての square integrable representation は必然的に II_1 factor representation になってしまう。そこで square integrable representation の理論の factor representation category への拡張が行われることになった。

この拡張への motovation を与えたのは、意外にも Connes-Takesaki [Cn2] であると言われている。この論文においては、von Neumann algebra 上の square integrable な action を扱っている。この後これを参考にして 1976 年ごろ、ほぼ同時に独立して Rosenberg [Rs2], Moore [Mr3] が factor representation への拡張を行った。ただし、両者の立場はかなり異なっているようである。

Rosenberg [Rs] の方がより表現論的な立場をとっている。彼は formal degree の拡張とか、orthogonality relation 等に関する議論は行っていない。彼の得た main な結果は Pukanszky [Pk5] の仕事の継承であり、Connected Lie group の square integrable representation は必ず normal になることが示されている。

一方 Moore [Mr3] は、type III を含む極めて一般の状況まで formal degree の概念を拡張している。この場合、formal degree とは、von Neumann algebra 上の、表現による adjoint action に関し

amenable
locally cpt group ⇒ K-theoryに関する
B-C-K予想成立

て semi invariant な normal semifinite weight である。 Radon-Nikodyms'Theorem から考えると、semi finite case では positive self adjoint operator が unique に定まり、これが Duflo-Moore [Df1] において定義された formal degree である。この formal degree を用いて、Shur'orthogonality relation を示すことができる。

もう一つの話題として、 square integrable representation と dual topology との関係が、Green [Gr2] において考察されている。彼は、G が connected locally compact group であるとき、square integrable factor representation は、Prim C*(G) の open point を与えていることを示した。ただしこれは、 "connected" という仮定をはずすと必ずしも正しくない。彼は同じ論文の中で、ある totally disconnected group に対して、Prim C*(G) の open point を与えないような、 square integrable irreducible representation の例を構成している。これは Dixmier が提出し、Duflo-Moore-Rosenberg も考えたと思われる conjecture に対する negative な answer になっている。

最後に、square integrable representation と、K-theory において極めて有名な Boum-Connes-Kasparov conjecture との関係について述べたい。Poguntke の simple subquotient に関する論文 [Pg3] の最後に、次の様なことが述べられている。Unimodular group がもし non type I square integrable representation を一つでももてば、実は上の conjecture に対する反例になっていることがわかる。Amenable locally compact group に関しては、 Kasparov によって conjecture の成立が示されているが、残りの部分については今のところ不明である。

∴ amenable locally cpt grp は
non type I square inte rep
をもたない。

§3. Non smooth objects

3-a.Groupoid

Mackey [Mk4] が little group theory から出発して、最初に ergodic groupoid の概念を導入した。ただし、その当時の名前は virtual group であった。group action が smooth であるときはちょうど stabilizer subgroup の conjugacy class を与えているので、この名前が与えられることになった。Mackey 自身は概念を定義しただけで、具体的な結果はなにも出していない。

これに続く重要な論文は Ramsay [Rm1] である。これは半ば expository な目的を持って書かれたものであり、non-regular extension の表現論に使えるように measured groupoid の概念を整理したものと言えよう。内容としては、non transitive imprimitivity theory 、互いに similar な groupoid の表現論が同型になる為の条件などが考察されている。今となっても groupoid の text としての役割を失ってはいない。

更に引き続いて Ramsay [Rm2] では、 groupoid の situation における little group method が展開されている。 Hilbert bundle, bundle representation などの概念が導入されて、一般論としてはわかり易くなっているが、反面一般論のみで具体的な中身が十分にともなっていないようにおもわれる。

この間に Westman, Seda らの論文がいくつかあるが、それほど価値があるとは思えないので、それ等については触れない。

次に出現するのは Feldman-Moore [Fd1], [Fd2], Feldman-Hahn-

Moore [Fd3], Hahn [Hh1], [Hh2],[Hh3], の一連の論文である。Feldman, Moore は Dye, Krieger の von Neumann algebra についての仕事の後を受けて、groupoid の σ-regular representation によって作られる von Neumann algebra の研究を行った。主たる結果は Cartan subalgebra を持つ von Neumann algebra はこの style で与えられることである。これは von Neumann algebra の context における行列の対角化であると考えられる。

von Neumann algebra とその Cartan subalgebra との関係は、以前に Takesaki [Tk1] において触れられていたように、表現の既約分解と密接な関係がある。少なくとも factor の case に限定すれば、Hahn [Hh3] の結果によって大体 Cartan subalgebra の dual 上の equivalence relation だけを見ることによって、もとの von Neumann algebra と Cartan subalgebra の pair を復元することができる。

かくして一般論が一息ついたところで Connes [Cn2] が出現する。彼は Atiyah-Singer の index theory を foliation 上に拡張することを考えた。non smooth な foliation の場合、compact group が act している場合とは違って quotient space が非常に悪いものになり得るので、関数も十分存在しないし、ましてやその上で積分を行うことなどもっての外である。そこで quotient space 上の関数の代りに covariant な関係を持っている measure の family (random variable) を導入して、それを quotient space 上の measure に相当する transverse measure で積分することによって、意味のある結論を導くことができた。この理論で groupoid von Neumann algebra を記述すると、general な weight を type I weight 則ち positive self adjoint operator の family によって表すことができる。

もっとも、このことの実態は Haagerup の operator valued weight の理論の特別な状況への適用にすぎないわけではあるが。

Bellisard-Testard は未発表の論文において、上のような weight の分解を singular integral decomposition と呼んだ。Sutherland [S14] は、これを、group の regular representation が生成する von Neumann algebra が Cartan subalgebra を持ている場合に適用し、"Singular Plancherel formula" と彼が呼んだものを得た。この方式の merit は、type I trace を用いた formulation ができるので minimal projection をとってくることができ、これによって transverse measure の形で与えられる Plancherel measure の normalization を行う可能性が与えられることである。また hyper finite II_1 factor の Cartan subalgebra は up to conjugacy class で unique であるから、何らかの意味で canonical であると考えられる。一方既約分解そのものは必ずしも一意的ではないので、"plancherel formula" と呼んでよいものかどうか、問題をはらんでいるといえよう。

以上の簡単な歴史から見て、groupoid theory は、表現論において具体的な生産力には乏しいが、議論のフレームとしては非常に使いやすい道具であると思う。

2-b.Cocycle

N < G で N は type I であるとしよう。groupoid の章で触れた

ように、Mackey の little group method において、non smooth case であってもなおかつ imprimitivity theorem を考えようとすると、G の factor representation の分類は、N 上の G-quasi invariant ergodic measure と、それによって類別される unitary cocycle の分類に、少なくとも形式的には帰着することになる。この路線に従って一般論を展開したのは Ramsay [Rm2] であったが、ひとたび具体的な構成に取り掛かると、甚だむずかしい問題となる。とにかく cocycle に関して positive な結果というものは非常に少ないものである。それでも少しながら例を挙げると、Moore-Schmidt [Mr5], Sutherland [Sl3] などである。いずれも amenable group の comology group について扱っている。Schmidt も ergodic theory の立場から cohomology group を扱っているらしい。

このようにして、irreducible representation の分類理論は、変換群の quasi invariant ergodic measure とか、cohomology group の研究を産みだし、ergodic theory, function algebra theory などと深い関係を持つことになって現在にいたっている。

具体的な変換群としては irrational rotation が挙げられるが、これについては章を改めて述べたい。その他 cohomology 一般についてはやはり本書中に収められている河上氏の論説を参照されたい。

§3. smooth objects

3-a.Primitive ideal space and dual topology

さて、group extension の状況に於ける irreducible representation または factor representation の分類の話は、Mackey [Mk4] において、ひとまず暗礁にのり上げた訳である。その後しばらくたって、Fell [F11],[F12],[F13], [F14] による C*-algebra の dual topology の研究が始まっている。彼の得た結果は Dixmier の有名な教科書に納められて、この分野に於ける研究者に対するスタンダードになっている。この C*-algebra に関する理論を group C*-algebra に specialize すると、さらに立入った結果が得られる。

まず、[F13] において、subgroup からの induce up が表現の weak containment に関して連続であることが示された。この事実は群の dual の topology を具体的に計算する場合において極めて重要である。さらに Glimm [Gl3] とたぶん独立に、[F14] において G の topology を subgroup の情報を用いて書き下す試みを行っている。

G 群 G において type I normal subgroup N をうまくとれる場合であっても、N の dual の各点の stabilizer subgroup は変動する可能性がある。そこで彼は多くの subgroup を同時に扱えるようにするために "subgroup C*-algebra" とよばれる物を構成した。これは考察の対象となる subgroup すべての表現をまとめて一つの C*-algebra の表現として扱えるようにしたものであり、Glimm も同様なものを考察している。勿論 dual の topology を記述するためにそれ

だけで十分とは言えないが、群の表現論を研究するために group C*-algebra でも crossed product でもない C*-algebra が本質的な役割を果すことになるのは大変興味深い。

これらの成果を利用して、 Blattner [Bt1] は、little group method の non type I case への、ある意味の一般化を行っている。局所コンパクト群 G が normal subgroup N をもっていて、しかも N が必ずしも type I でない場合、 $\hat{N}$ を base にして解析を行うことはほとんど意味がない。そこで彼は $\hat{N}$ の代りに Prim C*(N) を base として、G ではなく Prim C*(G) を little group 流に解析している。G が type I のときは勿論 Mackey の analysis に一致している。彼の議論は、Mackey とは違って measure theory を全く用いないので、いかなる separability condition も不用となることを注意しておこう。

Group extension N<G の形になっているときには Prim C*(G) の topology を考えるためには、C*-crossed product の形に一般化しておく方が何かと好都合である。特に A が abelian であるときには、transformation group (Ω ,K) が与えられることになる。この場合には transformation group の理論と結びついて Effros-Hahn [Ef4] によって深く研究されることになった。

彼等はΩが compact のときに、 Choquet theory を用いて finite trace の研究を行った。すなわちこれは、Ω上の K-invariant provability measure の分類の問題になる。この中で一つの Primitive ideal に対応する二つ以上の finite trace が存在しうる事が example によって示されている。

さらに、Mackey とは異なる、 orbit closure による quasi orbit の概念を定義し、 ideal theory の研究において、Ωを smooth かつ

(x, y)

$\downarrow$

$(x+my, y)$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R}^2/n & \longrightarrow & \mathbb{R}^2/n \end{array}$$

minimal な part に localize することを行っている。ただし、各 quasi orbit は G_δ -set ではあるが、必ずしも locally closed ではない。

これに関連して、彼等は G が amenable discrete group であるときに、 Prim $C^*(\Omega, K)$ の element はすべて induced representation の kernel として実現できるであろうと予測した。これがいわゆる Effros-Hahn conjecture であり、以後の ideal theory 研究の原動力となった。

この conjecture の解決は意外に長引いている。 Efross-Hahn の後、新たな前進を示したのは Gootman [Gt1] である。彼は次の様な非常にわかりにくい不自然な条件のもとながら、この conjecture を解決している。すなわち、orbit closure がすべて compact かつ minimal で、すべての isotropy subgroup が central で、G が abelian open subgroup をもつという条件である。勿論この条件ははなはだしく restrictive なものではあるが。

より general な situation に於ける結果については Green [Gr1] まで待たなければならない。（但し、Green [Gr1] においても open subgroup の仮定は重要である。）彼はまず、transformation group C*-algebra には限らず、一般の C*-crossed product に対して（正確には、twisted covariance algebra に対して）conjecture を設定している。少なくとも formal な revel においては conjecture の形は変らないが、C*-algebra A の Prim A が必ずしも Hausdorff ではないことが、多少事態をやっかいにしている。Green の条件は次のとおりである。 $A \rtimes G$ において、 G の Prim A 上の action は essentially free であり、 (1) G は amenable かつ compact open subgroup を持ち Prim A の点がすべて locally closed, または

Effros-Hahn予想

X space, G discrete amenable group
⇒ Prim $C^*(G,X)$のelementはすべてinduced repのKernelとして実現できる

(2) G は discrete amenable。 Open subgroup があるとその部分は単なる multiplier ではなく、 subalgebra として元の C^*-crossed product に入るので非常に扱いやすくなるのである。

解決に向けて次のステップを踏出したのは Sauvageot [Sv1], [Sv2] である。まず [Sv1] では C^*-algbra が abelian の場合を考察している。結果は次のとおりである。 (1) G が amenable ならば $C^*(G,X)$ の任意の primitive ideal は $\boxed{\text{induced ideal}}$ を含む。 (2) G が discrete ならば $C^*(G,X)$ の任意の primitive ideal は induced ideal に含まれている。この二つの定理を合せれば、 discrete amenable group と abelian C^*-algebra に対して conjecture が証明されたことになる。ここではすでに essentially free ではないので isotropy subgroup の変動を如何に扱うかが問題となり、 Fell が定義した subgroup C^*-algebra $C^*(\Sigma, X)$ が有効になっている。それは表現の induction を介して Prim $C^*(G,X)$ と Prim $C^*(\Sigma, X)$ の G-equivaliance class が対応していると考えられるからである。

[Sv2] においては C^*-algebra A が non commutative な場合について上と同じ結果を導いている。この場合、A の表現に対して Effros が定義した homogeneous decomposition が Prim A を base にしていることから、重要な役割を演じたのは前に述べたとおりである。

ここまでくると、後は必ずしも discrete でない場合に $C^*(A,G)$ の任意の primitive ideal が induced primitive ideal に含まれていることをいえば十分である。これが Gootman-Rosenberg [Gt3] による Effross-Hahn conjecture の（より一般化された）完全な解決である。ここでは non-smooth な action を扱っている訳だから global な cross section はとれないのだが、群の部分の変数を

compact subset に制限すれば、それに対しては local section をつくることができ、ここでは cocycle が coboundary になる。この coboundary から isotropy subgroup の表現に類似のものを作り、compact subset をどんどん大きくして、逆にそれに対応して local section をどんどん小さく取って近似していけば、求める結果が得られる。このような section がうまく取れることを示した定理を、彼等は local section theorem と呼んでいる。G の amenability は絶対に必要な条件であり、これをはずすと簡単に反例が作られることがわかる。

以上で Effros-Hahn conjecture に関しては一段落した。証明されたことから (A,G,α) において特に G が amenable で Prim A 上 free に act していれば、C*(A,G,α) が simple になることがわかる。A が type I である場合には概ねこの形の定理で充分である。また、この場合には C*(A,G,α) の dual topology についても Willams [Wm1], [Wm2], [Wm3] において研究されており、CT class や CCR になるための条件などが求められている。

A が non type I の場合、operator algebra の見地から見れば free という条件は少し強すぎる条件である。例えば A が UHF algebra 等の simple C*-algbra では non sense な条件であろう。そこで必ずしも free でない場合の simplicity が研究され、Connes-Bratteli-Olsen-Pedersen-Evans-Takai-Ktayama-Kishimoto らの努力によって、少なくとも abelian group に対しては、いわゆる (strong) Conne spectrum を stabilizer group の代りに用いることによって解決を見ている。

Primitive ideal を研究するためにはいわゆる strong Morita equivalence の議論が有効な場合が多い。そのことについては次の章

で触れたい。

4-b.Morita Equivalence

Ideal structure についての議論は、群の表現論を C*-algebra の framework でもっと algebraic に扱う契機を与えることになった。Mackey の induced representation theory の中でひどくごたごたしているところ、特に imprimitivity theorem をすっきりと algebraic に証明しようという試みが、Rieffel [Rf1],[Rf2]によってなされた。

ただしこの試み自体は Rieffel の独創ではなく、finite group の category では algebra の表現論の観点からすでに研究されていた。すなわち Higman は finite group の subgroup からの induced representation を、algebra の表現論として formulate することに成功していた。それは、元の group から subgroup への restriction を、対応する group algebra の expectation と考えることである。この考え方は Stiespring が cp map の structure theorem を作ったときのやり方とよく似ている。

Rieffel は、[Rf1] においてこれらの理論を C*-algebra の category に持込んだ。[Rf1] は expository 的な要素の多い paper であるが、要は open とは限らない subgroup からの induced representation の理論を完全に含む形で、C*-algebra から別の C*-algebra への（必ずしも前が後の subalgebra という訳ではない）への induced representation をうまく定義して、その framework にのっとって algbraic に imprimitivity theorem を証明することで

あった。Conditional expectation の一般化から出発して、"C*-algebra の module" の考え方に立場を移すことによって、非常に見通しが良くなっている。

ある C*-algebra A の表現をある module X によって誘導すると、canonical に imprimitivity algebra E が構成でき、bimodule X を介して A と E は完全に同型な Hermitian module category をもつ。これが C*-level での imprimitivity theorem である。見方を代えてみれば、これは二つの C*-algebra A と E の relation を X が与えていると見ることができる。

さて逆に二つの C*-algebra が全く同型な Hermitian module category を持つときに、上の様な非常に良い module (imprimitivity bimodule) を構成することができるであろうか。これは A,E が finite dimensional のときには Morita によって考察されており、完全に成立するので、上で定義した同値関係は Morita equivalence と呼ばれていた。Rieffel [Rf2] においては C*-algebra については Hermitian module category で W*-algebra については normal module category で論じている。結論としては W*-case では完全に Morita と同様の結果が成立するが、C*-case については relation が広すぎて実用にはならない。すなわち、Envelopping von Neumann algebra 同志の Morita equivalence になってしまう。

そこで、間に imprimitivity bimodule X が存在するような二つの C*-algebra A,E,を、strongly Morita equivalent であると定義しよう。Non trivial であって、また非常に自然な example が Rieffel [Rf3] において与えられている。G を locally compact group、K,H を二つの closed subgroup とするとき、二つの transformation

2つのC*代数

$$\begin{array}{ccc} & G & \\ \cup & & \cup \\ H & & K \end{array}$$

強森田同値 ⟺ 安定同値

↑表現論的に同じ　↑条件

g-h　k　g-h+k
g-k　h　g-k+h

group C*-algebra C*(H\G,K) と C*(G/K,H) が極めて自然な imprimitivity bimodule によって strong Morita equivalent になる。

Strong Morita equivalence は二つの C*-algebra が表現論的に全く同じものであることを保障しているが、 Brown [BL1], Brown-Green-Rieffel [BL2] において、二つの C*-algebra が countable な approximate identity をもつという条件の元で、"stable isomorphism" と同値であることが示された。後者の論文において strong Morita equivalence の背景は大体明らかになったといえよう。

その後 Rieffel [Rf4] は、 Mackey method を strong Morita equivalence の言葉で再構成して、ある程度の成功を見た。Rieffel の弟子 Green はその路線をさらに推し進め、C*-crossed product の理論において Strong Morita equivalence の理論を極限まで研究している。これによって、それまでの ideal trace induction の continuity などに関することが、かなり自然に（むしろ自明に？）導かれることになった。ついでにいえばこの論文は Rieffel [Rf1] とともに、教育用としてもよくかけていると思う。

次に Green は [Gr3] において強力な定理を証明した。(A,G,α) を C*-covariant system, H を G の closed subgroup とする。Rieffel [Rf3] により C*(A⊗Co(G/H),G,α⊗λ) は C*(A,H,α) と strongly Morita equivalent でこれが imprimitivity theorem だが、実はこの前者は C*(A,H,α)⊗C(L²(G/H)) と splits し、さらにこの splitting は表現論的に極めて natural なものである。この結果は Kajiwara [Kj3] において induced trace の characterization を考えるときに決定的な役割を演じた。また、この論文に於ける imprimitivity bimodule の作り方は、 foliated bundle の C*-algebra

$H=1$　$C^*(A\otimes C_0(G), G, \alpha\otimes\lambda) \underset{\text{Morita}}{\cong} A$

$A\otimes C(L^2(G))$

$H=G$　$C^*(A, G, \alpha) \underset{\text{Morita}}{\simeq}$

についての Natume-Takai の結果に強い影響を与えたと言われている。Green はさらに Morita equivalence についての研究を進め、Rieffel が [Rf5] において紹介している。ところが全く意外なことに、Green は、その後数学を止めたそうである。

それ以後については Zettle, Muhly-Williams, Renault, Kajiwara などによって2、3の研究があるが、それほど見るべきものはない。大体において strong Morita-Eauivalence は研究されつくされて、ほとんど空気の様な存在となっている。ただし Kasparov 的なとらえ方に於ける C*-algebra の K-theory との関係は極めて密接で、この観点からはまだまだ研究され続けるであろう。

4-c.Trace, character, semicharacter

Finite group, compact group において表現の "character" を考えることは極めて重要であり、かつ有用であった。Non compact group においては一般に表現空間の次元が無限大になるので、単に表現の trace をとると言うことは意味がないが、type I group については $C^*(G)$, $C_c(G)$ などの対応する表現を考えて ordinary trace をとれば、ちゃんと意味のある概念を与える。特に semi-simple Lie group については Harish-Chandra が、distribution を与えることを示し、またその具体的な構造を極めて詳しく調べている。Connected nilpotent Lie group についても、同様の結果が知られている。

さて non type I group になったらどうであろうか。以後は irreducible representation に限定することはできないので、factor

$\widehat{G}_{norm} = \{G$ の normal な factor rep$\} / \underset{quasi\ equi}{\simeq}$

normal 表現なら character が考えられる

representation の category で考えることにする。ある factor representation が生成する von Neumann algebra が semi finite で、しかも C*(G) の range の element で trace を finite にするものが weakly dense に存在するとき、normal representation であるという。特に finite factor representation はすべて normal representation である。

この手の話には常に登場する Glimm [Gl2] によって、すべての irreducible representation が normal であることと、考えている群が type I であることが同値であるから、必然的に non-type I normal representation を考えなければならない。Normal factor representation は、factor representation の中で特に "smooth" なものとみなされる。実際の construction から考えても、確かに irreducible representation の family を "smooth" 化して構成していることが多い。

G の normal factor representation の quasi equivalence class を $\boxed{\widehat{G}_{norm}}$ と表す。年代が少し前後してかなり後の時代の話になるが、Halpern [Hp] は、$\widehat{G}_{norm}$ が standard Borel space になることを示している。Normal factor representation の kernel をとれば primitive ideal を与えることと、上に述べた "smoothness" から $\widehat{G}_{norm}$ は Prim C*(G) と同様に注目され研究されて来たが、ideal theory 程の進歩はない。それは扱っている trace が必ずしも finite ではなく、algebraic なテクニックだけではすまないからである。

最初に normal representation を定義したと思われるのは Guichardet [Gu1] である。これは大変長大な論文であるが、主とし

て、$G_0 \rtimes G_1$, G_0 は abelian normal, G_1 countable discrete の case について、group C*-algebra の character を調べている。G_1 を discrete に限定しているところが味噌である。

C*-algebra の trace は primitive ideal とは違って topology の世界の住人ではなく、むしろ Borel structure の世界の住人であると思われる。 Davies [Dv] は C*-algebra A の代りに σ-envelop $\widetilde{A}$ を用いて、trace の分解に関する Choquet theory を得ている。しかしながら肝心の $\widetilde{A}$ の構造が今のところよくわからないので、あまり具体的な成果ともいえない。その後現在にいたるまで、character, trace に関する一般論は、それほど進歩したとはいえないのが原状である。

さて、巨人 Pukanszky は、後で述べるように connected solvable Lie group の表現論を展開する過程において、normal subgroup からの trace の induction の概念を得た。これを用いて彼は connected Lie group において $\widehat{G}_{norm}$ と、Prim C*(G) が一対一に対応することを得た。この理論はその後 Green [Gr1] において明確に formulate され、 algebraic な証明も得られている。そこで、上の対応のことを "Pukanszky-Green correspondence" と呼ぶことがある。

この "P-G correspondence" がどのような群に対して成立するかというのは興味ある問題ではある。すでに Guichardet [Gu1] においてすら、一つのイデアルに二つ以上の trace が対応している例が知られている。また逆に $R \rtimes Q^*$ type の ax+b group を作ると 、character が全く対応しない primitive ideal が存在することがわかる。

この見地から N.V.Pedersen [Pd2], [Pd4] は、常に character だけを考えるのではなく、場合によっては semicharacter と呼ばれる

Green予想　$A \rtimes G$ のすべてのtraceは A のtraceから induced up されている

② G : discrete, amenable ⇒ OK

relatively invariant な KMS weight を考える必要があると主張した。確かに上の ax+b type group については、 trace の存在しない primitive ideal に対しても canonical に semicharacter を構成することができ、しかも unique である。また、 connected Lie group において character は必ずしも distribution を与えず、また definition ideal を決定することもやさしくない。ところが semi-character を canonical に作ると、うまく distribution になってくれる場合が、数多くある。特に Pedersen [Pd6] において、 connected Lie group において normal representation がすべて distribution semicharacter をもつことと、もとの group が connected semisimple Lie group と cocompact radical をもつ connected Lie group との直積になることが、同値であることが示されている。

Connected Lie group などの character を決定しようとすると、group C*-algebra を primitive ideal で割って localize することによって、 $C_0(\Omega) \rtimes G$ の type （ここにでてくる $C_0(\Omega)$ は non abelian になることもあり得る。） の C*-algebra のすべての trace が、 $C_0(\Omega)$ から induced up されているかどうかが問題となる。勿論これは primitive ideal に関する Effros-Hahan conjecture の trace 版と考えることができよう。 Green は実際に [Gr1] においてこの conjecture を提唱し、 G が discrete amenable group で action が free であるときに解決した。これは G が discrete group であるときには $C_0(\Omega)$ が subalgebra として埋め込まれていることによるものである。

G が必ずしも discrete でない場合については、ideal の場合とは

違って、非常に難しい。これは infinite trace を扱わなければならないことから来ており、話が全く代数的に行かなくなり、ややこしい解析の問題になってしまうからである。そこで一般的には今にいたるまで未解決である。

G が non discrete で解決されている唯一の case は、Ω が abelian group で、G が dense subgroup、action が translation になっている場合のみである。これは Pukanszky [Pk4] において implicit に含まれており、また Green [Gr1], Pedersen [Pd1] に於ける、abelian group による crossed product $C_0(\Omega)$ G 上の induced trace の、dual action による characterization を用いれば、明快に trace の unicity が導き出される。

$C_0(\Omega) \rtimes G$ 上の induced trace の characterization は、Kajiwara [Kj3] によって G が non abelian の case に拡張されている。しかし crossed product 上の trace の unicity については不明である。なぜなら、Coaction は具体的な取り扱いになると甚だしく不便だからである。この問題の難しさは、Wasserman によって考察された hyperfinite II_1 factor 上の non abelian compact Lie group の ergodic action の分類の難しさに通ずるものがある。

ただし Pukanszky-Green correspondence は群の category で初めて重大な意味をもつのであり、一般の C*-algebra、例えば Peters [Pt2] において示されたように、UHF algebra の gage action による crossed product などでは、一つの primitive ideal に対して無限個の character が対応することがある。。

以上の様に ideal theory に比べると、trace の方は今一つスッキリとはしない。またこの問題については、研究者は質量共に少ない

G : unimodular (とくに abel or cpt or discrete)
⇓
regular rep は semi finite of Von Neumann algebra を生成し「単位元における函数」が canonical な trace を与える。

ので、trace の Effros-Hahn conjecture の解決もまた長くかかりそうである。

4-d.Plancherel formula

Classical な Fourier transform の理論から端を発した Plancherel formula の理論も、non-type I representation に於ける一つの有力な object になっている。

Plancherel formula は square integrable representation の話と同様に、他の object とは違って unimodular であるか否かが大きな weight を占めている。必ずしも type I とは限らない unimodular locally compact group に対して、Plancherel formula を定式化したのは Segal [Sg] である。Unimodular であれば regular representation は semi finite von Neumann algebra を生成し、単位元における Dirac function が canonical な trace を与えている。この canonical (Haar) trace の単なる central decomposition が Segal の意味の Plancherel formula である。Ernest [Er1] による分解理論を用いれば、この分解の measure は G の quasi dual の上に実現することができる。

G が type I として Haar measure を適当に normalize し、分解によって出現する ordinary trace を minimal projection によって normalize することによって、Plancherel measure が unique に確定する。Unimodular Plancherel formula については、実は

abstract にはこれ以上言うべきことはない。

Kleppner-Lipsman [K14], [K15] は、一応 type I case に限定してはいるが、group extension situation の Plancherel formula を、normal subgroup と little group から構成している。これは Mackey's little group theory の Plancherel 版と言えるであろう。[K14] が main な論文であり、[K15] は [K14] の精密化であり、measure class の代りに Plancherel measure 自体を求めている。さらに semi direct product などの、いろいろの group extension の example が多数計算されている。

Non unimodular group の Plancherel formula は、単なる non type I case 以上に難しい問題をはらんでいる。この問題を最初に考察したのは　　、Kohari である。彼は ax+b group の harmonic analysis を初めて研究している。この論文は、1962年に出版されたものであり、当時はやっと Kirillov の大論文が出版されたばかりであることを考えれば、大変な革新性であると言うことができよう。Non unimodular case の場合、Dirac measure が、trace を与えないので、central に分解した場合に、Radon-Nikodym derivative として unbounded self adjoint operator が出現する。またこのことから unbounded operator の domainなど問題となり、Plancherel formula の適用できる関数の範囲も問題になる。

その後 non unimodular group の Plancherel formula は、それほどすばやい進歩を示している訳ではない。次の step が Tatsuuma [Ts] によってきざまれるまで待たなければならなかった。G は non unimodular locally compact group とし、Δ で、G の modular function を表す。H = kerΔ とおくと H は unimodular な closed normal subgroup である。H に対しては unimodular Plancherel formula が成立している訳であるから、H を base にして G の Plancherel formula を構成することが考えられる。ただし Tatsuuma は、完全に一般的な場合を考えた訳ではなく、G/H の H の reduced quasi dual 上の action が countably separated であることを仮定している。このとき Plancherel null set を除けば、$\widehat{G_r}$ は、$\widehat{H_r}$ 上の G/H quasi orbit space として実現できる。ただし non unimodular group の Plancherel formula では、たとえ type I であっても unbounded operator が現れるため、 Plancherel measure を measure class の中で確定させることができない。これは勿論 non type I case でも事情は同じであり、 II_∞ trace などは、minimal projection による normalization も不可能である。

その後しばらく経って Pukanszky は長大な論文 [Pk1] の最終章において non unimodular solvable Lie group の Plancherel formula に現れる unbounded operator (semi invariant と呼ばれる。) が、enveloping algebra の element を表現することによって表せることを、極めて長い計算によって示している。これについてはまた後で触れなければならない。

これに続くのは Dufro-Moore [Df1] である。彼らの論文の最後の部分において、 Plancherel formula に関することが扱われている。Non unimodular group G に対して、H = kerΔ とおくとき、G の regular representation が type I である為の 必要十分条件は、 H の regular representation が type I であり、G/H の $\widehat{H_r}$ への action が smooth となることである。十分性についてはすでに Tatsuuma [Ts] において示されていた。

 δe は weight

Non unimodular、non type I な group の Plancherel formula を完全に一般的に考察したのは、Sutherland [S11] である。一般に単位元における Dirac measure は weight しか与えないので、weight の分解理論を一般的な状況で完成しておくことが必要である。彼はまず、left Hilbert algebra, Tomita algebra, faithful normal semifinite (f.n.s.) weight の分解の一般論を用意している。Tomita algbra $(\mathcal{A}, \phi)$ が、$\int^{\oplus} \mathcal{A}(\omega)d\omega$ と分解されているとき、$\mathcal{A}(\omega)$ の canonical weight を $\phi(\omega)$ とするとき、$\omega \to \phi(\omega)$ は measurable で、$\pi_{\phi}(\mathcal{A})'' = \int^{\oplus} \pi_{\phi(\omega)}(\mathcal{A}(\omega))'' d\omega$、

$$\phi = \int^{\oplus} \phi(\omega) d\omega$$ が成立する。

これを general な locally compact group に適用することによって、彼は Tasuuma-Duflo-Moore theory の non-type I versionを得た。さらにその後 Sutherland [S11] における weight の分解と weight の induction を組合せることによって、Kajiwara [Kj1] は、Kleppner-Lipsman [K14], [K15] の non-type I version が得た。

さて、Haar weight は単なる weight と言う訳ではなく、Pedersen [Pd2] において定義された、semitrace である。分解によって Δ-invariance は保たれるので、Plancherel formula において現れる各 component の weight は、やはりほとんどすべて Δ-semicharacter となる。そこで、Δ-semicharacter の quasi equivalence class 全体を $\widehat{G}_{\Delta}$ と表すことにする。Pedersen [Pd3] は Halpern [Hp] と同様の方法で、この $\widehat{G}_{\Delta}$ が standard Borel space になることを証明した。すなわち、$\widehat{G}_{\Delta}$ は、general Plancherel formula の base になるにふさわしいしい立場を獲得した訳である。

再度、問題を semifinite case に限定してみよう。各分解に現れ

る component は semifinite von Neumann algebra 上の weight であるから、 trace と Radon-Nikodym derivative によって semi-character を表現することができる。これが Kohari-Tatsuuma の Plancherel formula である。

次に regular representation 自身について考えたい。 Non unimodular, non type I となると、 regular representation の性質については一般的には全く分からない。古くは Godment によって、regular representation が type III factor になる例が知られている。ただし、この例では non hyperfinite factor が現れる。

Sutherland は [S12] において、regular representation の type について詳しく調べている。先人の論文と同様に modular function を Δ とし、その kernel を H とする。そのとき、Δ(G) が R^{+} の中で closed であるという条件の元で、以下のことが成立する。

1、G/H の $(\widehat{H_r}, \mu)$ への action が smooth であることと、regular representation が semifinite であることが同値である。

2、同じ action が completely non smooth であることと、regular representation が type III_0 であることが同値である。さらに彼は、 hyperfinite, non hyperfinite の両方にわたって、regular representation が type III_λ $(0 \leqq \lambda \leqq 1)$ factor representation になる例を挙げている。さらに Taylor [Ty] も、regular representation の type についていろいろ調べているが、ここでは省略する。

Non-type I group の Plancherel formula においては、たとえ unimodular であっても measure の normalization が行えないのが悩みの種であった。ところが Connes [Cn1], Bellisard-Testard (未

Cartan subalgebra = MASA

発表）の singular integration theory（Connes 自身がこのような呼び方をした訳ではない）は、non type I weight を type I weight にまで分解している。Type I であれば minimal projection による normalization の可能性が生じる訳である。Sutherland [S14] は、上記の理論を regular von Neumann algebra が Cartan subalgebra をもつ場合に適用して、"irreducible Plancherel formula" を得ている。ただし、この手法は適用できる group の範囲が狭いこと、適用できる場合でも Cartan subalgebra すなわち、MASA の取りかたが canonical には存在しないこと、さらにはその為に分解によって出現する表現が全く unique ではない、などの欠点がある。

この方面の研究は、今のところほとんどなされていない。私の考えでは、solvable Lie group の coadjoint orbit space の様なものから作られる canonical な groupoid 上で、理論を展開することが必要なのではないかと思っている。

§5 具体的な Example について、

5-a.Connected Lie group

Unitary 表現論における最も自然でかつ生産的な object は、や

はり何と言っても connected Lie group であろう。この category は、大筋としては二つの互に相反する group に分けて考えることができる。すなわち "semi-simple" と "solvable" である。両者を同時に研究している人は、(Duflo のようなスーパーマンは別にして) それほど多くないようである。特に、Harish-Chandra が "semi-simple Lie group は type I である"と宣言したので、これで表現論に作用素環は要らないという声が semisimple 一派の人々から上がったこともあるらしい。

一方、solvable に話を移すと、早くも 5-dimensional で non type I group が出現する。いわゆる "Mautner group" である。これは Kronecker foliation を Lie group として実現しただけのものである。もう少しこみいった non type I Lie group の例として "Dixmier group" がある。これは Dixmier が 、non type I だが discrete central subgroup で割ると type I になってしまう例として挙げたものである。この群が non type I であることは直ちにはわからず、例えば little group method が必要とされる。そのような理由で本論における論調は、必然的に "solvable 的" なものにならざるをえない。

Solvable 系の表現論は 1950 年代の Dixmier の研究によって始まるが、後世に極めて大きな影響を残したのは、Kirillov による orbit method の創造である。Nilpotent, solvable と理論は進化して、いよいよ type I 性が問題となった。

この観点からの最初の仕事は Auslander-Moore [As2] である。これは要約すると、Mackey method を solvable Lie group に適用しようとする為の悪戦苦闘である。この中では、主として measurable structure に関する部分を Moore が、geometric な部分を Auslander が担当している。Little group method における normal subgroup としては、nil radical N をとっている。ところが nil radical は必ずしも常に適当な選択肢とは限らなくて、G の $\hat{N}$ への action を解析することは難しい。Type I であるにもかかわらず、この action が non smooth になる例が挙げられている。この現象は unwindig phenomenon と呼ばれている。

そこで、いったん general な situation を放棄して type R group に制限して、type I になる為の、また、CCR になる為の geometric ないしは algebraic な必要十分条件が与えられている。蛇足ながら本書の introduction は Moore によって書かれた一つのまとまった論説であり、それ自身大変に価値のあるものである。

Auslander-Moore [As2] による詳細な解析の後を承けて、Auslander- Kostant [As1] は、solvable Lie group が type I になる為の完全に geometric な必要十分条件と、type I であるときの irreducible representation の orbit method による geometric な parametrization を与えた。

ここに、極めて優秀な微分幾何学者である Kostant が新たに登場し、Blattner [Bt1] において発見されていた holomorphic induction の手法を、geometric quantization の立場から solvable Lie group に適用することによって、非常に見通しのよい構成法を得ることができた。すなわち、type I solvable Lie group のすべての irreducible representation は、Lie algebra $\mathfrak{g}$ の dual のある element f から、holomorphic induction（通常の induction を特別な例として含んでいる。）を行うことによって得られる。

但し、holomorphic induction のままでは表現の性質は全くわからないので、同じ f から Mackey method によって irreducible representation を構成し、両者が一致することを示している。勿論 type I になる為の条件とは、この method がうまく work する為の条件を、 geometric にいいかえたものになっている。この論文は、結果として表現の構成に関して非常に多くの未解決な問題を残しており、現在も引続いて研究されている。

Auslander-Kostant に続いて、巨人 Pukanszky が登場する。長大な論文 [Pk1] において彼が追及したのは simply connected solvable Lie group の regular representation の性質の究明と、それを central 分解するに十分な factor representation の family を geometric に構成することであった。ほとんど無の状態から手作りで理論を作り上げているところが、いかにも彼らしい。

この論文は4章に分れている。1章は "transitive theory"という表題であり、holomorphic induction による factor representation の構成が扱われている。Type I とは限らないので $(G_g)_0$ の character を G_g まで拡張することが一般に不可能なため、ある種の center によって与えられる、 reduced stabilizer $(\hat{G}_g)$ を代用に供さなければならない。$\hat{G}_g$ から出発して、 type I case と同様に admissible complex polarization をとって、holomorphic induction を行う。この場合は当然 irreducible にはならず、factor representation にしかならない。Orbit が locally closed であるときは、ここで作った表現の族がすなわち求めるものになっている。一つの orbit に対して $(\widehat{\hat{G}_g/(G_g)_0})$ (torus) によってパラメトライズされている。ただし、ここで採用された reduced stabilizer はい

ささか大雑把に作られているので、Hilbert algebra の分解という観点からはいささか難がある。この点については Yamagami [Ym] を参照されたい。Type I case と同様、holomorphic induction した表現の解析には Mackey method によらねばならない。この場合、$R^m \times Z^n$ の型の群の multiplier representation を研究することになる。未整理の為記述に無駄があるが、この部分だけでもよむ価値はある。

２章の標題は "generalized orbit of coadjoint representation" である。Orbit が必ずしも locally closed でない場合、１章で作った factor representation は求めるものではない。そこで $\bigcup_{g\in O(g)}(\widehat{G_g/(G_g)_0})$ をブロックとして考えて、この中の G の action を geometric に解析する。ポイントは、この space における Effros-Hahn の意味のすべての G-quasi orbit が、G を subgroup として含む少し大きい connected Lie group（正体はわからなくてもよい。）の orbit によって与えられることである。この quasi orbit によって入る relation の各 equivalence class を、generalized orbit とよぶ。勿論、g と g' が同値であるとは orbit closure が一致することである。Group の orbit によって与えられていることから、各 generalized orbit の上には、G-invariant Radon measure が unique に存在する。

３章は "non transitive theory" である。１章で用意した factor representation の family を、２章で用意した G-invariant Radon measure によって direct integral すると、general theory から factor representation になるだけではなく、G の regular representation の central decomposition を与えていることがわかる。

すなわちこれは、最も weak な意味における Plancherel formula である。ただし、ここでの分解とは表現の multiplicity が無限大であるからとしておざっぱに同一視した、かなり強引なものであり、もっと詳しく研究する必要があると思われる。これについても Yamagami [Ym] を参照されたい。

4章は "structure of the regular representation" であり、left regular representation の構造を調べている。G は unimodular とは限らないので、semi invariant が出現する。彼は極めて詳細な解析によって、semi invariant を envelopping algebar の element として explicit に構成した。このことから regular representation が、単に semi finite であることのみならず、$C_c(G)$ の range で trace class に入るものが weakly dense になる (trace class representation) ことまでがわかる。このことから、3章で作った各表現の Plancherel measure に関するほとんど全てが、normal representation になることがわかる。

以上のように多くの結果を含んでいるが、まだ未解決の問題もまた多く含んではいた。ところが続けて現れた彼自身の論文の中で、彼自身の手によってほとんどすべて解決されてしまう。

[Pk1] 3章で構成された表現は factor representation であるから、 C*-algebra の意味での kernel をとれば、 primitive ideal を与えている。この対応が injection になっていることは容易にわかる。従って generalized orbit space から Prim C*(G) への injection が存在する。この map が実は surjection であることを、Pukanszky [Pk3] は示した。これは、 Auslander-Kostant 対応の一般化とみることができる。

そこで、次にもう一つの smooth object である character (normal representation space)と generalized orbit との関係が問題になる。Pukanszky は [Pk4] において、さらに群を一般化して connected Lie group に対して、 Prim C*(G) と G_{norm} が一対一に対応していることを示した。手法は primitive ideal で C*(G) をわって localize し、Haar measure の uniqueness に持込むことである。また character を構成する方法として、normal subgroup の invariant trace を induce up する手法を発見した。Von Neumann crossed product においては古くから知られていた方法であったが、表現論的に確立されたのはこれが最初であり、後世への影響は量りしれない。ただしこの論文では、Prim C*(G) の parametrization は geometric ではない。General な situation における geometric parametrization は、 K-theory ともからんで、これからの課題である。

Pukanszky は さらに [Pk5] において solvable group に関する結果を、cocompact radical をもつ connected Lie group すなわち amenable connected Lie group まで拡張しているが、詳細については触れないことにする。Pukanszky 自身は、この分野においてはこれ以上の結果を残していない。

Pukanszky の一連の結果をみやすく整理したのは、例によって、Green [Gr1] である。この論文の最後の部分において、 connected Lie group に関する Pukanszky の大定理を、彼の開発した手法の corollary として再証明している。勿論ただそれだけのことであり、新しい発展をもたらしたものではない。

この分野のさらに新しい発展は、Pukanszky の教えを承け、現在で

は彼の後継者と呼ばれている N.V.Pedersen の [Pd2] によってもたらされた。彼は Kirillov character formula を generalized solvable Lie group に extend しようとする動機から、出発している。勿論、 type I trace を general な semi finite trace に置き換えなければならないが、それだけでは十分ではない。Nilpotent case では、character は semi simple case と同様に distribution を与えるが、ax+b group を考えてみればわかるように、type R でないと必ずしも distribution は与えてくれない。実はすべての character が distribution を与えることと、 type R になることとが あとで Pedersen [Pd6] によって示されてる。さらに type R でないと generalized orbit 上の canonical invariant measure は tempered にならないので、character formula における右辺の積分の収束性が問題になる。

ところが、実は各 generalized orbit O の上には、 "tempered" relatively invariant radon measure β_0 が常に存在しており、これに代えれば、収束性に問題は無くなる。その measure β_0 を用いて Kirillov character formula を成立させる為に、彼は relatively invariant weight, すなわち "semitrace" と "semicharacter" の概念を定義した。Semicharacter f に対して $C_c(G)$ が definition domain に入ってくるときに f は smooth であるという。このとき f は distribution を与えている。

[Pd2] の main theorem を述べよう。Solvable Lie group の場合、すべての normal representation に対して、必ず一つの G から R^+ への homomorphism χ が存在し、それに対して smooth な χ-semicharacter を作ることができ、しかもほとんどすべての normal representation に対して homomorphism χ は、群 G の modular function Δ にとれることがわかる。以上の結果を用いて semi-character formula を書き下すことができた。この formula は Khalugui [Khl] の character formula の改良型と考えることができよう。勿論 semicharacter が character に完全にとって代ることはできないが、III 型のときなど、現実に match した object になるであろう。

次に Pedersen は semicharacter の理論を、必ずしも solvable でない connected Lie group において研究している。Trace をもっている表現は当然 semi finite であるが、semi trace をもつ表現はどうであろうか。完全に一般群のの場合には勿論 purely infinite になり得るのだが、Dixmier の regular representation に関する結果の local version を考えると、connected group なら semi finite になりそうである。実際、これは Pedersen [Pd4] によって示され、さらに強く semicharacter をもつ表現は必ず normal rep-resentation になることまで示されている。当然（かどうかわからないが）一つの normal representation に対してどれくらいの semi-character が存在するかが問題になるが、今のところ研究されていないようである。

さて solvable Lie group に対しては常に smooth semicharacter が存在したわけであるが、一般にはどうであろうか。この問題の解答も、やはり Pedersen [Pd6] において与えられている。G は simply connected Lie group とする。そのとき、G の任意の normal repre-sentation が smooth semicharacter をもつ為の必要十分条件は、G が semi simple Lie group と cocompact radical をもつ Lie group

の direct product になることである。

Semitrace の構造を調べることは、 Plancherel formula の localization として興味ある問題である。例えば、Charbonnel, Khalghui らによって、 Kirillov type の semicharacter formula が研究されている。ただ、最近は一応研究されつくされたこともあってか、少し沈滞ぎみであると思われる。

Connected Lie group に関しての最近の大結果は、 Poguntke [Pg3] である。彼は connected Lie group の group C*-algebra は、local にみればどれも同じ様なものであること、すなわち、simple subquotient は compact operator algebra か (non commutative turus) compact operator algebra の形になっていることを示した。すなわちこの種の群の表現論は、 Elliot の意味の non commutative torus の研究に委ねられたことになる。Pukanszky-Green 対応が成立することはこれから直ちに従う。ただし、この環の表現論を調べることは大変な難題であり、特別な case として、次章の irrational rotation を含んでいる。

Amenable, semi-simple の枠をとりはらうと、Lie group の具体的な表現論は飛躍的に困難になる。ただし、任意の connected Lie group の主要な表現はすべて、orbit method によって構成されるべきである、とする Kirillov の conjecture (ないしはドグマ) がある。この路線に従って、任意の Lie group の表現の構成を意図したのが Duflo [Df2] である。ただし、明快に実現されているとはとても思えないし、また極めて難解なものである。

K-theory における Connes-Kasparov conjecture は、表現論を用いることによって reductive Lie group まで証明されているわけで

あるから、この conjecture に関連しても、 general Lie group の表現論はさらに研究されると思うが、方向がよくわからないのが、原状である。

5-b.Irrational rotation

前章でみたように、connected Lie group の non type I ness の本質は non commutative turus であり、この中で、最も次元の低いものがいわゆる irrational rotation C*-algebra である。Non type I Lie group の classical な example である Mautner group にしても Dixmier group にしても、little group method を行うと、直ちに irrational rotation が現れる。Irrational rotation はその他にも種々の場所に現れており、例えば discrete Heisenberg group の表現といっても同じことである。

Irrational rotation C*-algebra は、表現論から離れても極めて興味ある対象である。K-group, Extension group, Rieffel projection, AF algebra への埋め込みなど、興味ある研究が多いが、表現論に直接関係がない（と思われるので）省略する。

この C*-algebra が simple かつ unique trace を持つことは、起源はわからないが古くから知られており、いわゆる smooth object については議論の余地はない。そこで既約表現の分類はどうか、という話になるが、これは irrational rotation の作る groupoid の 1 cohomology group の話になる。これは ergod theory なども関係があって、かなり古くから研究されていたらしい。60 年代の研究の

歴史については Kirillov [Kl] にまとめられている。その後、関数環論の Baguchi-Mathew-Nadkarni [Bg] によって、cohomology の研究がなされている。彼らは unit disc 上の inner function, outer function の理論を用いて、かなりの cohomology の存在を示している。ただし具体的な構成には至っていない。また、Brown [BI2] も、discrete nilpotent group の立場から考察を加えている。

その後、表現論の観点からの論文は、Bagget [Bgl] を待たなければならない。彼は表現の generalized tensor product という概念を定義し、2つの irreducible representation の generalized tensor product を既約分解することによって、新しい既約表現を得ている。すなわち、G の表現 V, W を {e}×G, G×{e} から G×G まで multiplier representation として extend してかけあわせると、non trivial な結果が得られて興味深い。Bagget は、introduction で研究の歴史を述べているが、[Kr], [Bc] には気づいていない模様である。

続いて Kawakami [Kw1] は 1-cohomology を direct に操作することによって、Bagget [Bgl] の得た family をさらに拡張するような new family を得ている。彼はさらに、[Kw2], [Kw7] において、ここで得た cohomology の family を用いて、Mautner group のある factor representation の、uncountable 個の全く異なる既約分解を得ている。この分解は Cartan subalgebra によって与えられているので、Cartan subalgebra の互に inner conjugate でない class を与えたことになっている。また irrational rotation の表現論を考えるとき、群に執着するよりも C*-crossed product を考えたり、二つの unitary の pair の表現と考える方が、柔軟性があってよい

ことを [Kw6] において述べている。

Irrational rotation algebra を 2-unitary として実現すると、SL(2,Z) が、natural に act することになる。Brenken [Bn] はこの発想で、単なる induced representation を上の automorphism で動かしてみることを考えた。この結果、Discrete Mautner group の表現として考えた場合に、さまざまな multiplicity をもった既約表現を実現できることを示した。ただし、彼の方法は Bagget の表現はカバーしているが Kawakami の表現はこのフレームに入らないようである。

Irrational rotation の研究は、さらに Bagget とその研究グループによってより深められていくことになる。最も大きな進歩は、irrational number の値によって表現論が異なってくることの発見である。Merril は [Ml] で、step function がいつ coboundary を与えるかを研究した。その際、扱っている irrational number の連分数展開に出てくる数の増大度によって、状況が全く異なってくることがわかった。これは、irrational rotation C*-algebra の AF algebra への埋め込みにおいて連分数展開が用いられていることをみると、非常に興味深いことである。

Bagget-Mitchell-Ramsay [Bg4] は、discrete Heisenberg group の situation で systematic に任意の finite multiplicity をもつ cocycle による既約表現を構成しており、最後にいくつかの問題を載せている。次に Bagget-Merril [Bg7] は、[Ml], [Bg4] の family を continuous なパラメーターまで拡張している。この論文の中で、多分 Bagget が、"既約表現を作れば作るほど、目標が遠くなっていく" と述べているのが印象的である。

さて、この分野はそれほど活発に研究されているというわけでもなく、将来の見通しについても不明である。ただ、rotation を与える irrational number のディオファンタス近似などの数論的な性質と、できる C*-algebra の表現論的な性質の密接な関係が明らかになれば、大いに意味のあることであると思う。

5-c.Free group (or tree)

Free group は、そもそも von Neumann の時代から、property Γ をもたない II_1 factor の例として、極めて有名であった。また 1950 年代には、Yosizawa [Ys] によって、既約分解でまったく異なったものが二つ以上存在する例としてとりあげられている。しかし、もっぱら反例として扱われていただけで、積極的に free group の表現論を展開しようとする動きは長く現れなかった。

長い年月が流れて、再び free group が、表現論の分野で注目をあびるきっかけになったのは、疑いもなく Haagerup の偉大な論文 [Hg] であろう。Free group の reduced group C*-algebra は、Effros-Lance の意味で nuclear でないことは知られていたが、実は nuclear からそれほど離れているわけでもなく、Grothendiek の、いわゆる metric approximation property をもっていることが示された。すなわち、free group はそれほど pathological なものではないということである。さらにもう一つは彼が用いた関数が、いわゆる radial function とよばれるもので、その radial function のある

1-parameter family が、regular representation と trivial representation を continuous path として結んでいることが注目を集めたものと思われる。また、$C^*(G)$ の K-theory など、free group が積極的に研究され始めた時期にもあたっている。同時に、比較的古くから知られていた Kazherdan の property T が、最も pathological な例として脚光を浴びるようになり、free group はむしろ "K-amenable" であるとして、むしろ "good" な例として扱われるに至っている。

Free group の表現論の新しい歴史を築いたのは、Pytlik [Py2], Figa-Talamamca -Picardello [FT1] である。両者ともほぼ同様のことを扱っているが、アプローチにはかなりの差が見られる。ただし、radial function の作る algebra に最初に注目したのは Cohen [Ch1] であることを忘れてはならない。

Pytlik [Py2] は、radial function algebra が、regular von Neumann algebra の中で MASA をなすことを証明した。すなわち、この MASA は、 regular representation の irreducible decomposition を与えている。また、radial function algebra は、$C^*(G)$ の中でももちろん abelian subalgebra になるから、その character を Rieffel の意味で induce up したものが、ちょうど分解に現れる表現になっている。ただ、Pytlik はこれらの表現が個々にいつ既約になるかということに関しては、何も示してはいない。またこれらの表現の見やすい具体的な実現についても触れていない。さらに分解において現れる各既約表現同志の non equivalence についても、述べてはいるが証明してはいない。

それに対して、Figa-Talamanca -Picardello [FT1] は、real rank

1 semisimple Lie group の表現論とのアナロジーから出発している。Furstenberg [Fr] の研究より、free group に対しても semisimple Lie group と同様な Poisson boundary を構成することができる。その boundary への free group の action に関する Radon-Nikodym derivative によって、semisimple Lie group の場合と同様、continuous principal series, discrete series, complementary series などの表現が、explicit に構成できる。これらの表現の cyclic vector に関する matrix element が、spherical function と呼ばれるものである。さらに radial function algebra の generator を μ_1 とすると、これは Laplace-Bertlami operator に対応し、spherical function はこの operator の eigen function である。このように semisimple Lie group との非常にきれいなアナロジーが成立している。各表現の既約性も、inequivalence も証明されており、全体として Pytlik [Py2] よりもかなり進んだものになっている。

Figa-Talamanca -Picardello [FT1] の路線を Mantelo-Zappa [MZ] は、さらに推し進めている。Laplacian μ_1 による eigenfunction は、すべて Poisson boundary 上の Martingale の Poisson transform によって実現できる。これは６人の日本人による共著の大論文の結果の free group 版であり、Maritngale は hyperfunction に対応する概念になっていると思われる。これらの Figa-Talamanca 一派の人々の仕事は、本 [FT2] にまとめられている。

実は tree の観点からは spherical function, Plancherel measure などは７０年代初頭に Cartier [Cr] によって研究されていた。この仕事が改めて注目を浴びるようになり、tree, graph 上の harmonic analysis に発展していくことになる。ただし、Hardy space などの non type I representation theory とほとんど関係の無いものについては省略したい。

Tree, graph などに act する group としては、もちろん free group が代表的だが、それ以外にも finite group の free product などがあって、free group のそのまたアナロジーが研究されている。これらについては [Bt], [Ct],[Ch2], [Pc1], [Pc4], [St] 等を参照されたい。Free product される群の size が異なっていると、理論は必ずしも free group とパラレルには行かず、色々の問題を提供することになる。例えば、radial function algebra は maximal abelian にならず、もっと大きい別の algebra を並行して考えなければならない。

これらの群の表現論もまた、K-theory との関連で発展することもあろうかと思うのであるが、今のところ展望はまったく明らかではない。例えば、free group の reduced group C*-algebra の K-theory の表現論的 approach は、semisimple Lie group の場合とは異なってどのような形をとるべきものか見当もつかない。

5-d.Nilpotent group

Nilpotent Lie group は、極めてよい性質をもった type I group であった。Connected でない non type I group の表現論を研究しようとするときに、nilpotent Lie group と似通った性質をもった group として、代数的に nilpotent な locally compact group を考えるのは妥当であろう。

例としては connected nilpotent Lie group の lattice になっている torsion free nilpotent group, Heisenberg type group などがあり abelian group の multiplier representation の研究も group extension を作って考えることによって、 2-step nilpotent group の表現論と思うことができる。

Abelian group の multiplier representation theory に関しては、Kleppner [Kl1] が最も草分であると考えられる。彼は locally compact abelian group の multiplier が、群に多少の制限がついてはいるものの、antisymmetric bicharacter と similar になることを示した。ただし、この結果が以後の研究に決定的な役割を果したというわけでもない。なぜなら cocycle の antisymmetrization を行うと antisymmetric bicharacter が現れて、これが代用に使えるからである。

Kleppner は、さらに Bagget との共著の論文 [Bg3] において、abelian group の multiplier representation の研究を行っている。ここでは、abelian group muliplier ω が type I ω-representation のみもつための条件が得られている。さらに type I になるという条件のもとで、すべての irreducible ω-representation の分類を行っている。これは量子力学における有名な Stone-von Neumnan's theorem の拡張になっている。この型の例では 2-step nilpotent であることが本質的で、abelian normal subgroup の dual 上の orbit が subgroup による translation の形になっていることによって、極めて扱いやすくなっている。

上の理論の本当に non type I である場合への拡張はまたも Kleppner [Kl7] によって得られた。ただし、この論文の中において行わ

れているのはあくまで "soft analysis" である。Main theorem は、multiplier ωが totally skew であれば、C*(G,ω) が simple かつ unique trace をもつことである。General な multiplier についての結論はこれから容易に従い、primitive ideal space, character space などの parametrization はまったく type I case と同じ形をしている。ここで使われている手法は、やはり Pukanszky によるものであり、Green [Gr1] にも例によって再び現れる。

Non Lie nilpotent group の表現論に初めて注目したのは Howe [Hw1], [Hw2] である。[Hw1] は discrete finitely generated torsion free nilpotent group を扱っており、これは比較的扱いやすい discrete group の例である。理論の取掛かりは、Malcev による、上記の群が simply connected nilpotent Lie group に lattice subgroup として埋め込めるという結果である。Lie group と Lie algebra は、exp map と log map によってお互に関係しているので、Lattice subgroup の log map による image が Lie algebra の代用品になるのではないかと考えられる。 ただし、群に何の仮定もないと上で作った Lie algebra の候補は、addition, commutator operation などによって閉じている保障がない。うまく Lie algebra の公理を満たしてくれているとき、元の群を elementary exponentiable (e.e.) とよぶ。このことは、lattice のはばが十分に大きいことを意味している。

e.e. であれば、Lie algebra 代用品の dual group の上に "coadjoint action" が定義できる。そこで Kirillov theory と同様のことが考えられるが、勿論 non type I であるから、既約表現の分類などは望むべくのないことである。ここでは orbit method によって

Hpに対してorbit methodの可能性

$\hat{G}_{norm}$とPrim$C^*(G)$が一対一に対応

$C^*(G)$ の primitive ideal space と character の分類を意図し、ある程度の結果を達成している。特に Pukanszky-Green 対応が成立することが示されている。本論文は、orbit method が Lie group 以外でも有効な道具となり得ることを初めて示しており、注目に値する。

[Hw2] も同様に nilpotent group の orbit theory を扱っている。ここでは、locally compact nilpotent group が、connected, discrete, quasi-torsion の３つの type の group から構成されていることを述べ、connected case は Kirillov によって、discrete case は Howe 自身によってすでに考察されているので、本論文では主としてquasi-torsion group 特に quasi-p group を扱っている。

ところが、quasi-p group の方が、ある意味で discrete group よりも扱いやすいことがわかる。すなわち、k で群の step を現すことにして、 $p > k$ ならば必ず e.e. となり、orbit method をうまく適用することができる。Quasi-p group の典型的な例は、言うまでもなく Q_p 上の unipotent algebraic group である。この場合 Prim $C^*(G)$ または character を完全に orbit like に、 topology を込めて記述することができる。Polarization, monomial representation に関する考察も、概ねうまくいっていると言えよう。さらに Howe は、この手法で compact p-adic group を扱って同様の成果を上げていることを注記しておく。

Lie group ではない nilpotent group の表現論は、 Howe が引いた路線に添って研究されていった。そうはいっても、かつて main な分野であったことはただの一度でもないが。Torsion free という仮定を取り去ったのは Brown [Bl2] である。彼はこの論文の中で、主として、 任意の既約表現が monomial representation と weakly

dual space が T_1 ⟺ CCR ⟺ キヤク表現が つねに cpt 作用素のみからなる。
(Glimm) def
数学じてん Banach環
lgeの*-キヤク表現} unitary 同値

G: discrete nilpotent なら Prim $C^*(G)$ は T_1 ⟹ Prim $C^*(G) \cong \widehat{G}_{norm}$ (PG対応)

equivalent であることを示している。また、discrete Heisenberg group に対して、subgroup からの induction によって与えられない既約表現を構成している。このあたり、Bagget 一派の研究と通ずるところがある。

その後、Poguntke [Pg2] は、何の仮定もない discrete nilpotent group G に対して $C^*(G)$ の primitive ideal space が T_1 であることを示している。これは、Moore-Rosenberg [Mr4] の finitely generated group に対する同じ定理の一般化になっている。このことは discrete nilpotent group のもつ極めて強い "unimodularity" から帰結するものと思われ、必ずしも discrete とは限らない nilpotent group に対しても成立しているものと思われ、実際にこの conjecture が提唱され、研究されている。

以上の流れは、Carey を中心とした Australia の表現論一派に受継がれることになった。[Cy5], [Cy7] においては、Poguntke [Pg2] に引続いて、primitive ideal space がいつ T_1 になるかが扱われている。後者が nilpotent group 自身を扱っており、前者はその準備である。ここでは、全くテクニカルな理由によって、compactly generated open subgroup を持つ nilpotent group に限定して、このカテゴリーの群に対して、primitive ideal space の T_1ness を証明している。Compactly generated nilpotent group の構造定理を用いている関係上、この議論はこのままでは一般化不可能である。証明の方法は、結局は induction で、次に述べる [Cy5] の main theorem に帰着させている。

すなわち、$G \triangleright N$ の状況で、G/N が discrete abelian ならば、Prim $C^*(G)$ が、T_1 であることと、Prim $C^*(N)$ 上の G-quasi orbit

P-G対応

が、すべて closed になることが必要十分である。ここでこの定理をよく見ると、N については type その他何の仮定も要求されていない。たいへんおもしろいことである。

Howe が残したもう一つの問題は character と primitive ideal space のいわゆる Pukanszky Green 対応であった。[Cy6] において、彼らは discrete nilpotent group に対してこの問題を考察している。Discrete nilpotent group は discrete amenable group であるから任意の primitive ideal に対して、character が対応することが直ちにいえてしまう。すなわち compact convex set である state space 上の amenable group による fixed point が trace であり、その extreme point が character である。従って、Pukanszky Green 対応が一対一であるかどうかが残された問題である。

出発点は Howe の難解な論文 [Hw1] における証明のメカニズムの２つのパートへの分解である。群 G が centrally inductive であるとは、G の任意の character ϕ が、G/k(ϕ)の infinite conjugacy class の上で vanish することとする。ただし、k(ϕ)は ϕ の kernel とする。Howe の証明は、 finitely generated nilpotent group が central inductive であることを、示したことになっている。Discrete nilpotent group G に対して、FC(G) で finite conjugacy class group を表すことにする。彼らは central inductivity に注目して G/FC(G) が finitely conjugacy class group なら、PukanszkyGreen 対応が成立することを示した。ただし、本論文の条件が成立しない群が存在し、実際にその example も示されている。ところがこの群に対しても Pukanszky Green 対応は成立しているので、その意味では、本論文はいささか中途半端なものになっている。

H_p もOK

さて、Hannabas [Hn] が示したように、type I nilpotent group の既約表現はすべて monomial であり、non type I group でも多くの nilpotent group では、既約表現は monomial representation と weakly equivalent であった。Non type I であれば、当然 non monomial representation が存在するものと思われるが、一般には construction をともなうので必ずしもやさしい問題ではない。[Cy2] においては、countable abelian group の multiplier representation (2-step nilpotent group の special form) に対して、non type I であれば、必ず non-monomial irreducible representation が存在することが示されている。続く論文において general nilpotent group まで拡張されていることになっているが、私はその論文を入手していない。Non discrete nilpotent group に対して、この問題が研究されているかどうかも不明である。

古くから研究されていた CAR algebra は、group theoretic に考えれば、Z_2 の infinite direct sum $G = \oplus Z_2$ のある totally skew multiplier σ による $C^*(G, \sigma)$ として実現することができ、これも 2-step nilpotent group の表現論の special case と考えることができる。[Cy3] において、彼らは CAR の知られている既約表現の、group theoretic な再構成を行った。Base となる十分大きな normal subgroup G_0 から出発して、G_0 G_1 $G_2 \subset \cdots \subset G_n \subset \cdots \subset G$ であって、各 G_i の $\hat{G}_0$ への action が free かつ smooth になるような sequence を作り、それを用いて G 自身の unitary cocycle を subgroup の coboundary から inductive に構成していく。

[Cy8] では、一応 CAR から離れ、このような sequence がうまく取れる group を almost type I (ATI) group と名付けて、general

にこの type の群の表現を inductive に構成している。この方法で優れている点が一つある。G_0 上の任意の G-quasi invariant ergodic measure μ から出発して、それに associate する G の既約表現を作れることである。これは Auslander-Moore [As2], Gootman [Gt4] 等によって考察された一般論から考えると、極めて注目すべきことである。Group を $\oplus Z_2$ からいろいろ変えれば、多くの AF algebra に対応することができる。ただし、 Stratila-Voiculescu の groupoid を使った理論のようにすべての AF algebra に対してうまくいくわけではない。

Connected Lie group の表現論を little group method によって解析すると、$R^m \times Z^n$ type の abelian group の multiplier representation の研究が不可避である。従って、Pukanszky [Pk1] の1章の最初の2つの section は、この研究にあてられている。この章は極めてごたごたしているが、やっていることは、うまく選ばれた normal subgroup の character を induce up すると normal representation が作れることである。ベールをはぎ取ると、group theoretic なレベルでの trace の induce up が展開された最初の仕事がこれである。

Pukanszky の仕事の C*-version と思われるのが Poguntke [Pg3] で、偶然ながら同じ雑誌に掲載されている。やはり connected Lie group を扱う為に、compactly generated 2-step nilpotent group が先に扱われている。ここでも例の構造定理によって、compact normal subgroup でわると、$R^m \times Z^n$ type の multiplier representation を扱うことになってしまう。この型の群の simple quotient が、compact operator algebra または $C^*(Z^n, \sigma)$ (non commutatiave torus) と stably isomorphic であることが、示されている。勿論この結果はまた Feldman-Hahn-Moore [Fd3] の C*-version とも考えることができるであろう。

以上のように考えていくと、locally compact (non Lie) nilpotent groups は、限りなく type I に近い non type I category (これは、SL(2,Z) 等と比較してのことであるが) といえるであろう。その意味で、non-type I theory の一般論を具体的に検証して見るには、 connected Lie group とならんで非常に良いカテゴリーではないだろうか。

References

[Akl] Akeman,C.A. and Ostrand,P.A. Computing norms in group C*-algebras, Amer.J.Math., 98(1976),1015-1047.

[Al1] Albeverio,R. and Hoegh-Krohn,R. The energy representation of sobolev Lie groups, Compositio Math., 36(1978), 37-52.

[Al2] Albeverio,S.,Hoegh-Krohn,R. and Testard,D. Factoriality of representations of the group of paths on SU(n), J. Funct.Anal.,57(1984),49-55.

[Al3] Albeverio,S.,Hoegh-Krohn,R.,Testard,D. and Vershik,A.M. Factorial representations of path groups, J.Funct.Anal. 51(1983),115-131.

[At1] Aomoto,K. Green functions and spectrums in a free product of cyclic type, preprint.

[At2] Aomoto,K. Spectral theory on a free group and algebraic curves, J.Sc.Tokyo Univ., 31(1984),297-317.

[As1] Auslander,L. and Kostant,B. Polarization and unitary representation of solvable Lie groups, Inv.Math.,14(1971) 255-354.

[As2] Auslander,L. and Moore,C.C. Unitary representations of solvable Lie groups, Memors of AMS 62(1966).

[Bc] Bagchi,S.C.,Mathew,J. and Nadkarni,M.G. On system of imprimitivity on locally compact abelian groups with dense actions, Acta.Math.,133(1974),287-304.

[Bg1] Bagget,L. Representation of the Mautner group I, Pac.J. Math., 77(1978),7-22.

[Bg2] Bagget,L. On the continuity of Mackey's extension process, J.Funct.Anal.,56(1984),233-250.

[Bg3] Bagget,L. and Kleppner,A. Multiplier representations of abelian groups, J.Funct.Anal.,14(1973),299-324.

[Bg4] Bagget,L.,Ramsay,A. and Mitchel,W.E. Representations of the discrete Heisenberg group and cocycle of an irrational rotation, preprint.

[Bg5] Bagget,L. and Taylor,K. A sufficient condition for the complete reducibility of the regular representations, J. Funct.Anal.,34(1979),250-265.

[Bg6] Bagget,L. and Taylor,K. On asymptotic behavior of induced representations, Can.J.Math.,34(1982),220-232.

[Bg7] Bagget,L. and Merril,K. Representations of the Mautner group II, preprint.

[Bd1] Bedos,E. Operator algebras associated with HNN-extensions,preprint.

[Bd2] Bedos,E. Operator algebras associated with free products of groups with amalgamation, Math.Ann.,266(1984)279-286.

[Bt] Betori,W. and Pagliacci,M. Harmonic analysis for group actig on trees, Boll.UMI,3(1984),333-349.

[Bc] Blackadar,B. The regular representation of restricted direct product groups, J.Funct.Anal.,25(1977),267-274.

[Bt1] Blattner,R.J.On induced representations II :infinitesimal induction, Aemer.J.Math.,83(1961),499-512.

[Bt2] Blattner,R.J. Group extension representations and the structure spaces, Pac.J.Math.,15(1965),1101-1113.

[By1] Boyer,R.P. Infinite traces on AF-algebras and characters of U(∞), preprint.

[By2] Boyer,R.P. Representation theory of the Hilbert Lie group $U(H)_2$, Duke Math.J.,47(1980),325-344.

[Bn] Brenken,B.A. Representations and automorphisms of the irrational rotation algebras, Pac.J.Math.,111(1984),257-282.

[BI1] Brown,I.D. Dual topology of a nilpotent Lie group, Ann. Sc.Ec.Norm.,4(1973),407-411.

[BI2] Brown,I.D. Representation of finitely generated nilpotent groups, Pac.J.Math.,45(1973),13-26.

[BL1] Brown,L.G. Stable isomorphism of hereditary subalgebras of C*-algebras, Pac.J.Math.,71(1977),335-349.

[BL2] Brown,L.,Green,P. and Rieffel,M.A. Stable isomorphism and strontg Morita equivalence of C*-algebras, Pac.J. Math.,71(1977),349-363.

[Cy1] Carey,A.L. Square-integrable representations of non-unimodular groups, Bull.Austl.Math.,15(1976),1-12.

[Cy2] Carey,A.L. and Moran,W. Non-monomial unitary representations of nilpotent group I: The abelian case, preprint.

[Cy3] Carey,A.L. and Moran,W. On the group theoretic approach to the canonical anticommutation relations, preprint.

[Cy4] Carey,A.L. and Moran,W. Projective representations of the Hilbert Lie group U(H)2 via quasi free states on CAR alg, preprint.

[Cy5] Carey,A.L. and Moran,W. Some group with T1 primitive ideal spaces, preprint.

[Cy6] Carey,A.L. and Moran,W. Characters of nilpotent groups, preprint.

[Cy7] Carey,A.L. and Moran,W. Nilpotent group with T1 primitive ideal spaces, preprint.

[Cy8] Carey,A.L. and Moran,W. Cocycles and representations of group of car type, pareprint.

[Cr] Cartier,P. Fonction harmoniques sur un arbre, IHES Publication 1972.

[Ct] Cartwright,D.I. and Soadri,P.M. Harmonic analysis on the free product of two cyclic groups, J.Funct.Anal.65(1986)

147-171.

[Ch1] Cohen,J.M. Operator norms on free groups, Boll.UMI,6 (1982),1055-1065.

[Ch2] Cohen,J.M. Radial functions on free products, J.Funct. Anal.,59(1984),167-174.

[Cn1] Connes,A. Sur la theorie non commutative de l'integ- ration, L.N.in Math.,725(1978),19-143.

[Cn2] Connes,A. and Takesaki,M. The flow of weights on factors of type III, Tohoku J.Math.,29(1977),473-575.

[Cw] Cowling,M. The Plancherel formula for a group not of type I, Boll.UMI,15(1978),616-623.

[Dv] Davies,E.B. Decomposition of traces on separable C*alge- bras, Quart.J.Math.,20(1969),97-111.

[DM] De Michele,L. and Figa-Talamanca,A. Positive definite functions on free groups, Amer.J.Math.,102(1980),503-509.

[dH] de la Halpe,P. Reduced C*algebras of discrete groups which are simple with a unique trace, preprint.

[Dl] Delorme,P. Irreductibilite de certaines representations de G(X), J.Funct.Anal.,30(1978),36-47.

[Dx1] Dixmier,J. Sous-anneaux abeliens maxmaux dans les fac teurs de type fini, Ann.Math.,59(1954),279-286.

[Dx2] Dixmier,J. Sur la representation regulier d'une groupe localement compact connexe, Ann.Sc.Ec.Norm.2(1969),423- 436.

[Df1] Duflo,M. and Moore,C.C. On the regular representation of a non-unimodular locally compact group, J.Funct.Anal. 21(1976),209-243.

[Df2] Duflo,M. Construction of unitary representation of Lie groups, CIME,Cortona,1980.

[Ef1] Effros,E.G. A decomposition theory for representations of C*-algebras, Trans.AMS,107(1963),83-106.

[Ef2] Effros,E.G. Transformation groups and C*-algebras, Ann.Math.,81(1965),38-55.

[Ef3] Effros,E.G. The canonical measures for a separable C*-algebras, Amer.J.Math.,92(1970),56-60.

[Ef4] Effros,E.G. and Hahn,F. Locally compact transformation groups and C*-algebras, Memoirs of AMS,75(1967).

[Er1] Ernest,J. A decomposition theory for unitary representations of locally compact groups, Trans.AMS,104(1962),252-277.

[Er2] Ernest,J. A strong duality theorem for separable locally compact groups, Trans.AMS,156(1971),287-306.

[Ey] Eymard,P. L'algebre de Fourier d'une group localement compact, Bul.Soc.France,92(1964),181-236.

[Fb] Fabec,R.C. Cocycles,extensions of group actions, and bundle representations, J.Funct.Anal.,56(1984),79-98.

[Fd1] Feldman,J. and Moore,C.C. Ergodic equivalence relations, cohomology, and von Neumann algebras I, Trans.AMS, 234 (1977),289-324.

[Fd2] Feldman,J. and Moore,C.C. Ergodic equivalence relations, cohomology, and von Neumann algebras II, Trans.AMS, 234 (1977)325-359.

[Fd3] Feldman,J.,Hahn,P. and Moore,C.C. Orbit structure and countable sections for actions of continuous groups, J. Funct.Anal.,28(1978),186-230.

[Fl1] Fell,J.M.G. The dual space of C*-algebras, Trans.AMS., 94(1960),365-403.

[Fl2] Fell,J.M.G. Weak containment and Kronecker products of group representations, Pac.J.Math.,13(1963),503-510.

[Fl3] Fell,J.M.G. Weak containment and induced representations of groups, Cand.J.Math.,14(1964),237-268.

[Fl4] Fell,J.M.G. Wead containment and induced representations of groups II, Trans.AMS,110(1964).

[FT1] Figa-Talamanca,A. and Picardello,M.A. Spherical func tions and harmonic analysis on free groups, J.Funct. Anal.,47(1982),281-304.

[FT2] Figa-Talamanca,A. and Picardello,M.A. Harmonic analysis on free groups, Dekker 1983.

[Fn] Funakoshi,S. On representations of non-type I groups, Tohoku Math.J.,31(1979)139-150.

[Fr] Furstenberg,H. Random walks and discrete subgroups of Lie groups, Adv.Probab.Rel.Top.,1(1970),1-63 .

[Gl1] Glimm,J. Locally compact transformation groups, Trans. AMS,101(1961),124-138.

[Gl2] Glimm,J. Type I C*-algebras, Ann.Math.,73(1961)572-612

[Gl3] Glimm,J. Families of induced representations, Pac.J. Math.,12(1962),885-911.

[Gd] Golodets,V.Y. and Sinelshchikov,S. Locally compact groups appearing as range s of cocycles of ergodic Z-actions, Erg.Th.&Dynam.Sys.,5(1985),47-57.

[Gm] Goodman,R. and Wallach,N.R. Projective unitary positive energy representations of Diff(S^1), J.Funct.Anal. 63(1985),299-321.

[Gt1] Gootman,E.C. Primitive ideals of a C*-algebras associated with transformation groups, Trans.AMS,170(1972), 97-108.

[Gt2] Gootman,E.C. The type of some C* and W* algebras associated with transformation groups, Pac.J.Math.,48(1973),93-106.

[Gt3] Gootman,E.C. and Rosenberg,J. The structure of crossed product C*-algebras:A proof of the generalized Effros-Hahn conjecture, Invent.Math.,102(1979),283-298.

[Gt4] Gootman,E.C. On certain properties of crossed products, Proc.Symp.pure Math.,38(1982),Part1 311-325.

[Gr1] Green,P. The local structure of twisted covariance algebras, Acta.Math.,140(1978),191-250.

[Gr2] Green,P. Square integrable representations and the dual topology, J.Funct.Anal.,35(1980),279-294.

[Gr3] Green,P. The structure of imprimitivity algebras, J. Funct. Anal.,36(1980),88-104.

[Gu1] Guichardet,A. Caracteres des algebres de Banach involutives, Ann.Inst.Fourier,13(1963),1-81.

[Gu2] Guichardet,A. Sur al decomposition des representations des C*-algebres, C.R.Sc.Paris,258(1964),768-770.

[Hg] Haagerup,U. An example of a non nuclear C*-algebra, which has the metric approximation property, Inv.Math.50 (1979),279-293.

[Hh1] Hahn,P. Haar measure for measure groupoids, Trans.AMS, 242(1978),1-33.

[Hh2] Hahn,P. The regular representations of measure groupoids Trans.AMS,242(1978),35-72.

[Hh3] Hahn,P. Reconstruction of a factor from measure on Takesaki's unitary equivalence relation, J.Funct.Anal., 31(1979),263-271.

[Hp] Halpern,H. Quasi-equivalence class of normal representations for a separable C*-algebra, Trans.AMS,203(1975), 129-140.

[Hn1] Hannabus,K. Representations of nilpotent locally compact groups, J.Funct.Anal.,34(1979),146-165.

[Hz1] Holzher,A.K. Discrete groups whose multiplier representations are type I, J.Austral.Math.,31(1981),486-495.

[Hz2] Holzher,A.K. Group with finite dimensional irreducible multiplier representations, Can.J.Math.,37(1985),635-643.

Q [Hw1] Howe,R. On representations of discrete,finitely generated, torsion free nilpotent groups, Pac.J.Math.,73

(1977),281-305.

[Hw2] Howe,R. The Fourier transform for nilpotent locally compact groups I, Pac.J.Math.,73(1977),307-327.

[Hw3] Howe,R and Moore,C.C. Asymptotic properties of unitary representations, J.Funct.Anal.,32(1979),72-96.

[Kj1] Kajiwara,T. Group extensions and Plancherel formulas,J. Math.Soc.Japan,35(1983),93-115.

[Kj2] Kajiwara,T. On irreducible decompositions of the regular representation of free groups, Boll.UMI,6(1985),425-431.

[Kj3] Kajiwara,T. Traces on group extensions and C*-crossed products, J.Math.Soc.Japan,38(1986),739-754.

[Kn1] Kaniuth,E. Der Type der regularer Darstellung diskreter Gruppen,Math.Ann.,182(1969),334-339.

[Kn2] Kaniuth,E. Primitive ideal spaces of group with relatively compact conjugacy class, Arch.Math.,32(1979),16-24

[Kn3] Kaniuth,E. Ideals in group algebras of finitely generated FC-nilpotent groups, Math.Ann.,248(1980),97-108.

[Kw1] Kawakami,S. Irreducible representations of non-regular semi-direct product groups, Math.Japon.,26(1981),667-693.

[Kw2] Kawakami,S. On decompositions of some factor representations, Math.Japon.,27(1982),521-534.

[Kw3] Kawakami,S. Representations of the discrete Heisenberg group, Math.Japon.27(1982),551-562.

[Kw4] Kawakami,S. A remark of decompositions of the regular representations of semi-direct product groups J.Math.Soc.

Japan,36(1984),121-130.

[Kw5] Kawakami,S. On decompositions of the regular representations associated with automorphisms of locally compact groups, Math.Japon.,30(1985),241-255.

[Kw6] Kawakami,S. and Kajiwara,T. Representations of certain non-type I C*crossed products, Math.Japon.,27(1982),675-699.

[Kw7] Kawakami,S. and Kajiwara,T. Weak cohomology and the diverse possibility of decompositions of representations Math.Japon.,28(1983),181-186.

[Kh1] Khalgui,M.S, Sur les caracteres des groupes de Lie reso lubles, Publ.Paris VII,no2(1978),7-44.

[Kh2] Khalgui,M.S, Sur les caracteres des groupes de Lie a radical cocompact, Bull.Soc.France,109(1981),331-372.

[Kr] Kirillov,A. Dynamical systems, factors and representations of groups, Russ.Math.Surv.,22(1967),63-75.

[Kl1] Kleppner,A. Multipliers on abelian groups, Math.Ann.,158 (1965),11-34.

[Kl2] Kleppner,A. Multiplier representations of discrete groups, Proc.AMS.,88(1983),371-375.

[Kl3] Kleppner,A. and Lipsman,R.L. The Plancherel formula for group extensions, Ann.Sci.Ec.Norm.,4(1972),459-516.

[Kl4] Kleppner,A. and Lipsman,R.L. The Plancherel formula for group extensions II, Ann.Sci.Ec.Norm.,6(1973),103-132.

[Kl5] Kleppner,A. Ergodic decompositions of quasi-invavaliant positive definite forms, Technical Report,74(1974).

[Kl6] Kleppner,A. Non-type I multiplier representations of abelian groups,Technical Report,75(1975).

[Lb] Lieberman,A. The structure of certain unitary representations of infinite symmetric group, Trans.AMS,164 (1972)189-198.

[Lp1] Lipsman,L. Orbit theory and harmonic analysis on Lie groups with co-compact nilradical, J.Math.pure.appl.,59 (1980)337-374.

[Lp2] Lipsman,L. Orbit theory and representations of Lie groups with co-compact radical, Technical Report,80 (1980).

[Lk1] Liukkonen,J. The primitive dual space of [FC]-groups J.Funct.Anal.,15(1974),279-296.

[Lk2] Liukkonen,L. Dual spaces of group with precompact conjugacy classes, Trans.AMS,180(1973),85-108.

[Mn] Mantelo,A.M. and Zappa,A. The Poisson transform and representations of free groups, J.Funct.Anal.,51(1983) 372-399.

[Mk1] Mackey,G.W. Induced representation of locally compact group I,Ann. Math.,55(1952),101-139.

[Mk2] Borel structures of groups and their duals, Trans.AMS, 85(1957),134-165.

[Mk3] Mackey,G.W. Unitary representations of group extensions I, Acta Math.,99(1958),265-311.

[Mk4] Mackey,G.W. Ergodic theory and virtual groups, Math.Ann. 166(1966),187-207.

[Ml] Merill,K.D. Cohomology of step functions under irrational rotations,preprint.

[Mr1] Moore,C.C. Representations of solvable and nilpotent groups and harmonic analysis on nil and solv manifolds, Proc.AMS,20,3-44.

[Mr2] Moore,C.C. Decomposition of unitary representations defined by discrete subgroups of nilpotent groups, Ann. Math.,82(1965),146-182.

[Mr3] Moore,C.C. Square integral primary representations, Pac.J.Math.,70(1972),413-427.

[Mr4] Moore,C.C. and Rosenberg,J. Group with T_1primtive space, J.Funct.Anal.22(1976),202-224.

[Mr5] Moore,C.C. and Scmidt,K. Coboundaries and homomorphisms for non-singular actions and a problem of H.Helson, Proc. London Math.,40(1980),443-475.

[Ms] Moscovici,H. and Verona,A. Holomorphically induced representations of solvable Lie groups, Bull.Math.France,102 (1978),273-286.

[vN] von Neumann,J. On rings of operators. Reduction theory, Ann.Math.,41(1940)94-161.

[Ns] Nielsen,O.A. Maximal abelian subalgebras of hyperfinite factors,II, J.Funct.Anal.,6(1970),192-202.

[Ob] Obata,N. Irreducible unitary representations of the infinite symmetric group parametrized by its automorphisms, preprint.

[Ok1] Okamoto,K.,Sakurai,T. and Matsumoto,H. On certain class of irreducible unitary representations of the infinite dimensional rotation group I,Hiroshima Math.J.,11(1981) 181-193.

[Ok2] Okamoto,K. and Sakurai,T. On a certain class of irreducible unitary representation of the infinite dimensional groups II, preprint.

[Ol1] Ol'shanski,G.I. Infinite-dimensional classical groups of finite R-rank: Description of representations and asmptotic Theory, Funct.Anal.Appl.,18(1984),22-34.

[Ol2] Ol'shansky,G.I. Unitary representations of the infinite-dimensional classical groups U(p,∞), Funct.Anal.App.12 (1978),185-195.

[Pk1] Packer,J.A. Point spectrum of ergodic abelian group actions and the corresponding group-measure-space factors, Pac.J.Math.,119(1985),381-405.

[Pk2] Packer,J.A. On the embedding of subalgebras corresponding to quotient actions in group-measure-space factors, Pac.J.Math.,119,(1985),407-443.

[Pr] Parthasarathy,R. and Schmidt,K. Factorisable representations of current groups and the Araki-Woods imbeddig theorem, Acta.Math.,128(1972),53-71.

[Pd1] Pedersen,N.V. Duality for induced representations and induced weights,preprint.

[Pd2] Pedersen,N.V. Semicharacters and solvable Lie groups, Math. Ann.,247(1980),191-244.

[Pd3] Pedersen,N.V. On the left regular representation of a separable locally compact group, J.Funct.Anal.,43(1981) 368-393.

[Pd4] Pedersen,N.V. Semicharacters on connected Lie groups, Duke Math.J.,48(1981),729-754.

[Pd5] Pedersen,N.V. On certain KMS weights in C*-crossed products, Proc.London Math.,44(1982),445-472.

[Pd6] Pedersen,N.V. Lie groups with smooth characters and with smooth semicharacters, preprint.

[Pt1] Peters,J. Groups with completely regular primitive dual space, J.Funct.Anal.,20(1975),136-148.

[Pt2] Peters,J. On traceable factor representations of crossed products, J.Funct.Anal.,43(1981),78-96.

[Pc1] Picardello,M. Spherical functions on symmetric graphs, preprint.

[Pc2] Picardello,M. and Korani,A. Boundary behavior of eigenfunctions of the Laplace operator on trees, preprint.

[Pc3] Picardello,M. and Woess,W. Random walks on amalgams, preprint.

[Pc4] Picardello,M. and Faraut,J. The Plancherel measure for symmetric graphs, Annali di Math.38(1984),151-155.

[Pg1] Poguntke,D. Der Raum der primitiven ideale von endlichen Erweiterungen lokalkompakter Gruupen,Arch.Math.,28(1977), 133-138.

[Pg2] Poguntke,D. Discrete nilpotent groups have a T_1-primitive ideal space, Studia Math.,71(1981),271-275.

[Pg3] Poguntke,D. Simple quotients of group C*-algebras for two step nilpotent groups and connected Lie groups, Ann. Sc.Ec.Norm.,16(1983),151-172.

[Pw] Powers,G.T. Simplicity of the C*-algebra associated with the free group on two generators, Duke Math.J.,42(1975), 151-156.

[Pk1] Pukanszky,L. Unitary representations of solvable Lie groups, Ann.Ec.Norm.,4(1971),457-608.

[Pk2] Pukanszky,L. Action of algebraic groups of automorphisms on the dual of a class of type I groups, Ann.Ec.Norm.5 (1972),379-396.

[Pk3] Pukanszky,L. The primitive ideal space of solvable Lie groups,Inv.Math.,22(1973),75-118.

[Pk4] Pukanszky,L. Characters on connected Lie groups, Acta. Math.,133(1974),81-137.

[Pk5] Pukanszky,L. Unitary representations of Lie groups with cocompact radical and applications, Trans. AMS,236(1978) 1-49.

[Py1] Pytlik,T. A Plancherel measure for the discrete Heisen berg group, Coll.Math.,17(1979),355-369.

[Py2] Pytlik,T. Radial functions on free groups and a decomposition of the regular representation into irreducible componnents, J.Reine Math.,326(1981),124-135.

[Py3] Pytlik,T. and Szwac,R. An analytic family of uniformly bounded representations of free groups, Acta Math.157 (1986),287-309.

[Qg] Quigg,J. On the irreducibility of an induced representation, Pac.J.Math.,93(1981),163-179.

[Rm1] Ramsay,A. Virtual groups and group actions, Adv.Math.6 (1971),253-322.

[Rm2] Ramsay,A. Nontransitive quasi orbits in Mackey's analysis of group extensions, Acta Math.,137(1976),17-48.

[Rf1] Rieffel,M.A. Induced representations of C*-algebras Adv.in Math.,13(1974),176-257.

[Rf2] Rieffel,M.A. Morita equivalence for C*-algebras and W*-algebras, J.Pure Appl.Alg.,5(1974),51-96.

[Rf3] Rieffel,M.A. Strong Morita equivalence of certain transformation group C*-algebras, Math.Ann.,222(1976), 7-22.

[Rf4] Rieffel,M.A. Unitary representations of group extensions :an algebraic approach to the theory of Mackey and Blat tner, Adv.in Math.Suppl.,4(1979),43-82.

[Rf5] Rieffel,M.A. Applications of strong Morita equivalence to transformation group C*-algebras, Proc.Symp.pure Math. 38(1982),part1 299-310.

[Rs] Rosenberg,J. Square integrable factor representations of locally compact groups, Trans.AMS,237(1978),1-33.

[St1] Saito,M. Representations unitaires monomiales d'un groupe discrete, en particulier du groupe mdulaire J. Math.Soc.Japan,26(1974),464-482.

[Sv1] Sauvageot,J-L. Ideaux primitifs de certain produits croises, Math.Ann.,231(1977),67-76.

[Sv2] Sauvageot,J-L. Ideaux primififs induits dans les produits croises, J.Funct.Anal.,32(1979),381-392.

[Sw] Sawyer,S. Isotropic random walks in a tree, Z.Wahr.42 (1978),279-292.

[Sg] Segal,I.E. An extension of Plancherel's formula to separable unimodular groups, Ann.Math.,52(1950),272-292.

[Sm] Smith,M. Regular representations of discrete groups, J. Funct.Anal.,11(1972),401-406.

[Sd] Soadri,P.M. Simple random walks on $Z^2 * Z^2$,preprint.

[St] Steger,T. Harmanic analysis for an anisotropic random walk on a homogeneous tree, Ph D.(1985).

[Sr1] Stratila,S. and Voiculescu,D. On a class of KMS state for the unitary group $U(\infty)$, Math.Ann.,235(1978),87-11.

[Sl1] Sutherland,C.E. The direct integral theory of weights and the Plancherel formula, Phd thesis, UCLA 1973.

[Sl2] Sutherland,C. The type analysis of the regular representation of a non-unimodular group Pac.J.Math.,79(1978), 225-250.

[S13] Sutherland,C. On a construction of unitary cocycles and the representation theory of amenable groups, Erg.Th.Dy. Sys.3(1983),129-135.

[S14] Sutherland,C. Cartan subalgebras,transverse measure and non-type I Plancherel measure, J.Funct.Anal.,60(1985), 281-308.

[Tk1] Takesaki,M. On the unitary equivalence among the components of decompositions of representations of involutive Banach algebras and the associated diagonal algebras, Tohoku J.Math.,15(1963),273-302.

[Tk2] Takesaki,M. Covariant representations of C*-algebras and their locally compact automorphism groups, Acta Math.,119 (1967),273-303.

[Ts] Tatsuuma,N. Plancherel formula for non unimodular locally compact groups, J.Math.Kyoto.Univ.,12(1972),179-261.

[Ty] Taylor,K.F. The type structure of the regular representation of a locally compact group, Math.Ann.,222(1976), 211-224.

[Tm1] Thoma, E. Uber unitare Darstellungen abzahlbarer, discrete Gruppen, Math.Ann.,153(1964),111-138.

[Tm2] Thoma,E. Eine Charaktersierung diskreter Gruppen von Typ I, Invent.Math.,6(1968),190-196.

[Tm3] Thoma,E. Die unzerlegbaren, positiv-definiten Klassfunctionen der abzahlbar unendlichen symmetrischen Gruppe, Math.Z.,85(1974),40-61.

[Vn] Vainerman,L.I. and Litovinov,G.L. The Plancherel formula and the inversion formula for generalized translation operators, Soviet.Math.Dokl.,23(1981),333-337.

[Vr1] Vershik,A.M. Characters and factor representations of the infinite unitary group, Soviet Math.Dokl.,26(1982) 570-574.

[Vr2] Vershik,A.M.,Gelfand,I.M. and Graev,M.I. Representations of the group of diffeomorphisms, Russ.Math.Surv., 30 (1975),1-50.

[Vr3] Vershik,A.M.,Gelfand,I.M. and Graev,M.I. Representations of the group of functions taking values in a compact Lie groups, Comp.Math.,42(1981),217-243.

[Vr4] Vershik,A.M.,Gelfand,I.M. and Graev.M.I. Representations of the group SL(2,R), where R is a ring of functions, Russ.Math.Sur.,28(1973),87-132.

[Vr5] Vershik,A.M. and Kerov,V. Characters and factor representations of the infinite symmetric group, Soviet.Math. Dokl.,23(1981),389-392,

[Vc] Voiculescu,V. Representations factorielles de type II de U(∞), J.Math.pure.et app.,55(1976),1-20.

[Wm1] Williams,D.P. The topology on the primitive ideal space of transformation group C*-algebras and CCR transformation group C*-algebras, Trans.AMS,266(1981)335-359.

[Wm2] Williams,D.P. Transformation group C*-algebras with con tinuous trace, J.Funct.Anal.,41(1981)40-76.

[Wm3] Williams,D.P. Transformation group C*-algebras with Hausdorff spectrum, Ill.J.Math.,26(1982)317-321.

[Ym] Yamagami,S. On factor decomposition of an ergodic groupoid preprint.

[Ys] Yoshizawa,H. Some remarks on unitary representations of free groups, Osaka.Math.J.,3(1951),55-63.