

可解リ一群の単項表現について

九大・理 藤原英徳

ここでは主として exponential group の単項表現に関し、琉球大学理学部の山上 滋氏と筆者が最近興味を抱いている問題を取り上げ、例を挙げながら解説してみたい。

§ 1. Preliminaries

リ一群 G (常に σ -compact 仮定) の Hilbert 空間 \mathcal{H}_π (separable 仮定) への unitary 表現 π に対し、 C^∞ -vector の空間を \mathcal{H}^∞ , その antidual space を $\mathcal{H}_\pi^{-\infty}$ で表わし $\mathcal{H}_\pi^{-\infty}$ の要素を π の generalized vector と呼ぶことにしよう。 G の作用は、duality により $\mathcal{H}_\pi^{-\infty}$ に拡張されるが、 G の閉部分群 H とその指標 $c: H \rightarrow \mathbb{C}^*$ に対し、

$$(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})_{H,c} = \{ a \in \mathcal{H}_\pi^{-\infty}; \pi(h)a = c(h)a \quad \text{for } \forall h \in H \}$$

とおく。又 $\langle a, b \rangle$ ($a \in \mathcal{H}_\pi^{\pm\infty}$, $b \in \mathcal{H}_\pi^{\mp\infty}$) で a の b における値を表わす。

今 G 及び H の module をそれぞれ Δ_G, Δ_H で表わし、 H 上

$$(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})_{H,c} = \mathcal{H}_\pi^{-\infty}$$

/

$$G/H \xrightarrow{F} \mathbb{C}$$

$\Delta_{G/H} = \Delta_H / \Delta_G$ とおく。G 上関数等式 $F(gh) = \Delta_{G/H}(h)F(g)$ ($g \in G, h \in H$) をみたし、mod H で compact support をもつ \mathbb{C} -valued continuous function F のなす空間上には G-invariant positive linear form $\nu_{G/H}$ が scalar 倍を除いて unique に存在する。記法

$$\nu_{G/H}(F) = \int_{G/H} F(g) d\nu_{G/H}(g)$$

を用いよう。
 $\begin{matrix} \downarrow L\chi \\ G/H \end{matrix} \Rightarrow \mathcal{R} = \Gamma(G/H, L\chi)$

H の unitary character χ から誘導された G の unitary 表現、いわゆる単項表現 $\tau = \text{ind}_H^G \chi$ に関し、特別な generalized vector

$$a_\tau \in \mathcal{R}_\tau^{-\infty} : (a_\tau : \chi_\tau^\infty \ni \Phi \rightarrow \overline{\Phi(e)} \in \mathbb{C}) \quad (e: G \text{ の単位元})$$

$$a_\tau = \bar{\tau}$$

を考えると、 $\chi_\tau^\infty \subset C^\infty(G)$ より a_τ は意味を持ち

$$a_\tau \in (\chi_\tau^{-\infty})_H \cdot \chi^{\Delta_{G/H}^{1/2}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \pi(h) a_\tau = \chi(h) \cdot \Delta_{G/H}(h) a_\tau \\ \langle a_\tau, \pi(h)\Phi \rangle = \chi(h) \Delta_{G/H}(h) \langle a_\tau, \Phi \rangle \end{array} \right.$$

G を I 型としよう。 τ の canonical central decomposition に応じて generalized vector a_τ も分解される。これが τ に対する Penney の Plancherel theorem である。

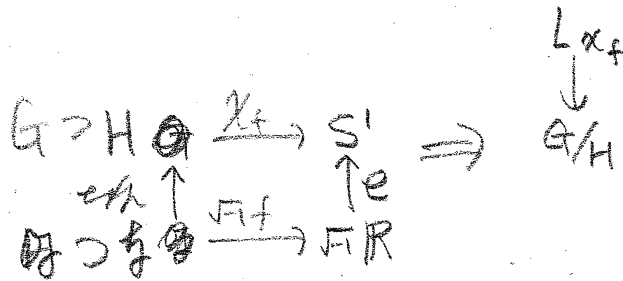
さて $G = \exp \mathfrak{g}$ をリ-環 \mathfrak{g} をもつ exponential group、即ち exponential map $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$ が diffeomorphism なるもの、 \mathfrak{g}^* を \mathfrak{g} の dual vector space とする。 $f \in \mathfrak{g}^*$ に対し $B^f(X, Y) = f([X, Y])$ なる \mathfrak{g} 上の antisymmetric bilinear form を考え、その radical を $\mathfrak{g}(f) = \{X \in \mathfrak{g}; B^f(X, Y) = 0 \text{ for } \forall Y \in \mathfrak{g}\}$ で表す。

$$\mathfrak{g}(f) = \{X \in \mathfrak{g} \mid X \cdot f = 0\}$$

G は \mathfrak{g}^* に coadjoint action で作用するが、 $\mathfrak{g}(f)$ はこの作用に関する f の stabilizer $G(f)$ のリ-環に他ならない。 $S(f, \mathfrak{g}) = \{h \in \mathfrak{g}; \text{部分リ-環、} B^f|_{h \times h} \equiv 0\}$ とおく。

我々の興味の対象は $h \in S(f, \mathfrak{g})$ から出発し、対応する analytic

$$S(f, \mathfrak{g}) = \{h \in \mathfrak{g} \mid f([h, h]) = 0\}$$



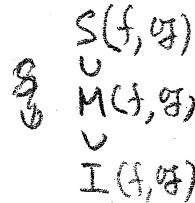
subgroup $H = \exp \mathfrak{h}$ の unitary character χ_f , $\chi_f(\exp X) = e^{i\langle f, X \rangle}$ ($X \in \mathfrak{h}$)、を用いて構成された誘導表現 $\tau(f, \mathfrak{h}) = \text{ind}_{\mathfrak{h}}^G \chi_f$ である。この時 exponential group $G = \exp \mathfrak{g}$ の任意の既約 unitary 表現は単項表現に、i.e. 適当な $f \in \mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{h} \in S(f, \mathfrak{g})$ を用いて構成された上記 $\tau(f, \mathfrak{h})$ に同値である事が知られている。

そこで $\tau(f, \mathfrak{h})$ がいつ既約になるかを調べると、その判定条件としていわゆる Pukanszky condition を得る：

$$\tau(f, \mathfrak{h}) \text{ が既約} \Leftrightarrow \mathfrak{h} \in I(f, \mathfrak{g}) \equiv \{ \mathfrak{h} \in M(f, \mathfrak{g}); \mathfrak{h} \cdot f = f + \mathfrak{h}^\perp \}$$

ここに $M(f, \mathfrak{g}) = \{ \mathfrak{h} \in S(f, \mathfrak{g}); 2 \dim \mathfrak{h} = \dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}(f) \}$ 、 $\mathfrak{h}^\perp = \{ l \in \mathfrak{g}^*; l | \mathfrak{h} = 0 \}$ 。一般に $f \in \mathfrak{g}^*$ に対し、

$$\emptyset \neq I(f, \mathfrak{g}) \subsetneq M(f, \mathfrak{g}) \subsetneq S(f, \mathfrak{g})。$$



次に $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \in I(f, \mathfrak{g})$ とすると $\tau(f, \mathfrak{h}_1) \cong \tau(f, \mathfrak{h}_2)$ (unitary equivalent) が示され、 $\mathfrak{g}^* \ni f \mapsto \theta(f) = \tau(f, \mathfrak{h}) \in \hat{G}$ なる surjection が $\mathfrak{h} \in I(f, \mathfrak{g})$ を媒介にして定義される。但し \hat{G} は G の unitary dual, i.e. G の既約 unitary 表現の同値類の集合を表し、その要素はしばしば代表元と同一視される。

更に $f_1, f_2 \in \mathfrak{g}^*$ とすると

$$\theta(f_1) = \theta(f_2) \Leftrightarrow G \cdot f_1 = G \cdot f_2$$

が示され、 θ は quotient に移って G の coadjoint action による orbit space \mathfrak{g}^*/G から \hat{G} 上への bijection $\bar{\theta}$ を与える。 $\pi \in \hat{G}$ に対応する orbit $\bar{\theta}^{-1}(\pi)$ を $\Omega(\pi)$ と書こう。

ここで分解定理を2つ与えておく。 $G = \exp \mathfrak{g}$: exponential group, $f \in \mathfrak{g}$, $\mathfrak{h} \in M(f, \mathfrak{g})$ とし $H = \exp \mathfrak{h}$ の unitary character χ_f から $\tau(f, \mathfrak{h})$ を構成する。affine space $f + \mathfrak{h}^\perp$ とその開集合で交わ

る G の coadjoint orbit の集合を $U(f, \mathfrak{h})$ で表し、 $\Omega \in U(f, \mathfrak{h})$ に対し $(f + \mathfrak{h}^\perp) \cap \Omega$ に含まれる H -orbit の数を $m(f, \mathfrak{h}, \Omega)$ とおく。

定理 1 (M. Vergne [10]) . $U(f, \mathfrak{h})$ は有限集合で、 $\forall \Omega \in U(f, \mathfrak{h})$ に対し $m(f, \mathfrak{h}, \Omega) < +\infty$ となり

$$\tau(f, \mathfrak{h}) \simeq \sum_{\Omega \in U(f, \mathfrak{h})} m(f, \mathfrak{h}, \Omega) \bar{\theta}(\Omega).$$

次により一般の $\mathfrak{h} \in S(f, \mathfrak{g})$ から構成された単項表現 $\tau(f, \mathfrak{h})$ の canonical central decomposition

$$\tau(f, \mathfrak{f}) \simeq \int_{\mathfrak{g}}^{\oplus} m(\pi) \pi d\nu(\pi)$$

を考えよう。

定理 2 (L. Corwin, F.P. Greenleaf and G. Grelaud [3]) . \mathfrak{g} が巾零の時、測度 ν の class は affine space $f + \mathfrak{h}^\perp$ 上の Lebesgue measure class の Kirillov map θ による image であり、他方 multiplicity $m(\pi)$ は $(f + \mathfrak{h}^\perp) \cap \theta^{-1}(\pi)$ に含まれる H -orbit の数である。

§ 2. Questions

ここに幾つかの問題を挙げてみよう。断わらない限り $G = \exp \mathfrak{g}$ は一環 \mathfrak{g} を持つ exponential group とする。

問 1 (cf. [4]) . $f \in \mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{h}_j \in I(f, \mathfrak{g})$, $H_j = \exp \mathfrak{h}_j$ ($j=1, 2$) とおく。

① 積集合 $H_1 H_2$ は G の閉集合であろうか？

② $\tau_1 = \tau(f, \mathfrak{h}_1)$ と $\tau_2 = \tau(f, \mathfrak{h}_2)$ の間の intertwining operator, i.e. $\tau_2(g) T_{21} = T_{21} \tau_1(g)$ for $\forall g \in G$ なる unitary isomorphism $T_{21}: \mathcal{H}_{\tau_2} \rightarrow \mathcal{H}_{\tau_1}$ の具体的な形を求めよ。 \mathcal{H}_{τ_1}

の適当な dense subspace 上

$$(T_2 \gamma)(g) = \int_{H_2/H_1 \cap H_2} \gamma(gh) \chi_f(h) \Delta_{G/H}(h)^{-1/2} d\nu_{H_2/H_1 \cap H_2}(h)$$

で与えられるか？

問2 (cf. [1], [6]) . $\pi \in \hat{G}$ を $\pi = \tau(l, \varphi)$, $l \in \mathfrak{g}^*$, $\varphi \in I(l, \mathfrak{g})$ と実現する。 \mathfrak{g} における φ の coexponential basis をとると generalized vector $a \in (\mathcal{X}_\pi^{-\infty})$ はこれらの座標に関する distribution と思える。今 $f \in \mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{h} \in S(f, \mathfrak{g})$ とし $H = \exp \mathfrak{h}$ の unitary character χ_f を以前通り $\chi_f(\exp X) = e^{f(X)}$ ($X \in \mathfrak{h}$) で与え、又 $c: H \rightarrow \mathbb{R}^*$ を H の real character とする。この時 $a \in (\mathcal{X}_\pi^{-\infty})_{H, \chi_f c}$ に対し a の台 $\text{supp } a$ は $\{g \in G; g \cdot (l + \varphi) \cap (f + \mathfrak{h}^\perp) = \emptyset\}$ に含まれる？ 特に $\Omega(\pi) \cap (f + \mathfrak{h}^\perp) = \emptyset$ なら $(\mathcal{X}_\pi^{-\infty})_{H, \chi_f c} = \{0\}$?

$f \in \mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{h} \in S(f, \mathfrak{g})$ とし $\tau(f, \mathfrak{h})$ の canonical central decomposition を

$$\tau(f, \mathfrak{h}) \simeq \int_{\hat{\mathfrak{g}}}^{\oplus} m(\pi) \pi d\nu(\pi) \quad (*)$$

とする。

問3 (cf. [1], [3]) . ν の measure class と multiplicity function $m(\pi)$ を求めよ。特に exponential group に対しても定理2は成立するであろうか？

問4 (cf. [1], [6], [7], [9]) . $\tau(f, \mathfrak{h})$ に対し Frobenius reciprocity が成立するか？ 即ち (*) において

$$m(\pi) = \dim(\mathcal{X}_\pi^{-\infty})_{H, \chi_f \Delta_{H/H}^{1/2}}$$

にとれるであろうか？

問5 (cf. [6], [9]). $\tau = \tau(f, \mathfrak{h})$ に対する Plancherel formula を書け。即ち τ の分解 (*) に即して generalized vector $a_\tau \in (\mathcal{X}_\tau^{-\infty})_{\mathfrak{h}, \chi_f \Delta_{\mathfrak{h}/H}^{1/2}}$ の分解を具体的に与えよ。

問6 (cf. [5]). G をリー環 \mathfrak{g} をもつ連結、単連結可解リー群、 $f \in \mathfrak{g}^*$ 、 $\mathfrak{h} \in \mathcal{M}(f, \mathfrak{g})$ とし、 \mathfrak{h} は $G(f)$ -invariant と仮定する。 \mathfrak{h} に対する G の analytic subgroup を H° とし、 $H = G(f)H^\circ$ は G の閉部分群であるとする。他方 $G(f)$ の unitary character η_f で $d\eta_f = \sqrt{|f|} | \mathfrak{g}(f)$ なるものが存在し、 η_f は $d\chi_f = \sqrt{|f|} | \mathfrak{h}$ なる H の unitary character χ_f に unique に拡張されると仮定しよう。この時、単項表現 $\text{ind}_H^G \chi_f$ を分解せよ。

§ 3. Examples and one theorem

G 上 compact support をもつ \mathbb{C} -valued continuous (resp. C^∞) function の空間を $\mathcal{K}(G)$ (resp. $\mathcal{D}(G)$) で表す。

例1. $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_2 = \mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2$: $a x + b$ algebra とする、i.e. $[e_1, e_2] = e_2$. $f = e_2^* \in \mathfrak{g}^*$ 、 $\mathfrak{h} = \mathbb{R}e_1 \in \mathcal{M}(f, \mathfrak{g})$ にとり $G = \exp \mathfrak{g}$ の2つの open coadjoint orbit $\pm G \cdot e_2^*$ に対応する $\pi_\pm \in \hat{G}$ を $\hat{\phi}(t) = \phi(\exp t e_1)$ により $L^2(\mathbb{R})$ 上に実現する。又 $H = \exp \mathfrak{h}$ 上の左 Haar 測度 dh を用いて $F \in \mathcal{D}(G)$ に対し

$$\tilde{F}(g) = \int_H F(gh) \chi_f(h) \Delta_{G/H}^{-1/2}(h) dh \in \mathcal{X}_\tau^{\infty}$$

とおく。但し $g \in G$ 、 $\tau = \text{ind}_H^G \chi_f = \text{ind}_H^G \mathbb{1}_H$ ($\mathbb{1}_H$: H の trivial character)。 $h = \exp t e_1$ に対し $dh = dt$ にとると

$$\tilde{F}(e) = \int_{\mathbb{R}} F(\exp te_1) e^{-t/2} dt$$

他方 $\psi \in \mathcal{X}_{\pi_{\pm}}^{\infty}$ に対し,

$$a_{\pm}(\psi) = \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi(\exp te_1)} e^{-t/2} dt$$

とおくと、 $\psi \in \mathcal{X}_{\pi_{\pm}}^{\infty} \Rightarrow e^{-mt} \psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ for $\forall m$: non-negative integer 故、

$$\begin{aligned} |a_{\pm}(\psi)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t/2} \overline{\hat{\psi}(t)} dt \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^0 |e^{-t/2} \hat{\psi}(t)| dt + \int_0^{\infty} |e^{-t/2} \hat{\psi}(t)| dt \\ &\leq \left(\int_0^{\infty} e^{-t} dt \right)^{1/2} \left(\int_0^{\infty} |\hat{\psi}(t)|^2 dt \right)^{1/2} \\ &\quad + \left(\int_{-\infty}^0 e^t dt \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^0 |e^{-t} \hat{\psi}(t)|^2 dt \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_0^{\infty} |\hat{\psi}(t)|^2 dt \right)^{1/2} + \left(\int_{-\infty}^0 |e^{-t} \hat{\psi}(t)|^2 dt \right)^{1/2} \\ &\leq \|\hat{\psi}\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|e^{-t} \hat{\psi}\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \|\psi\|_{\mathcal{X}_{\pi_{\pm}}} + \|e_2 \psi\|_{\mathcal{X}_{\pi_{\pm}}} \end{aligned}$$

従って a_{\pm} は連続、i.e. $a_{\pm} \in (\mathcal{X}_{\pi_{\pm}}^{-\infty})^*$ 且、 $\chi_{\pm} \Delta_{\pm}^{1/2}$ 。

さて G 上の左 Haar 測度を $g = \exp s e_1 \exp u e_2$ に対し $dg = ds du$ とし、

$$\pi_{\pm}(F) = \int_{\mathcal{G}} F(g) \pi_{\pm}(g) dg, \quad F \in \mathcal{D}(G)$$

とおく。この時 $F \in \mathcal{D}(G)$ 、 $\psi \in \mathcal{X}_{\pi_{\pm}}^{\infty}$ として

$$\begin{aligned}
\langle \pi_+(F) a_+, \psi \rangle &= \int \overline{F(g)} (\pi_+(g^{-1}) \psi) (\exp t e_1) e^{-t/2} dg dt \\
&= \int F(g) \overline{\psi(\exp s e_1 \exp u e_2 \exp t e_1)} e^{-t/2} dt ds du \\
&= \int F(\exp s e_1 \exp u e_2) \overline{\psi(\exp(s+t) e_1 \exp u e^{-t} e_2)} e^{-t/2} dt ds du \\
&= \int F(\exp s e_1 \exp u e_2) e^{\sqrt{-1} u e^{-t}} \overline{\psi(\exp(s+t) e_1)} e^{-t/2} dt ds du \\
\therefore (\pi_+(F) a_+) (\exp t e_1) &= \int F(\exp s e_1 \exp u e_2) e^{\sqrt{-1} u e^{-(t-s)}} e^{-(t-s)/2} ds du
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \pi_+(F) a_+, a_+ \rangle &= \int F(\exp s e_1 \exp u e_2) e^{\sqrt{-1} u e^{s-t}} e^{-t+s/2} ds du dt \\
&= \int_0^\infty dv \int_{\mathbb{R}^2} F(\exp s e_1 \exp u e_2) e^{\sqrt{-1} uv} e^{-s/2} ds du
\end{aligned}$$

同様にして

$$(\pi_-(F) a_-) (\exp t e_1) = \int F(\exp s e_1 \exp u e_2) e^{-\sqrt{-1} u e^{-(t-s)}} e^{-(t-s)/2} ds du$$

$$\langle \pi_-(F) a_-, a_- \rangle = \int_{-\infty}^0 dv \int_{\mathbb{R}^2} F(\exp s e_1 \exp u e_2) e^{\sqrt{-1} uv} e^{-s/2} ds du$$

これより $(2\pi)^{-1/2} a_\pm$ を改めて a_\pm とおけば

$$\begin{aligned}
&\langle \pi_+(F) a_+, a_+ \rangle + \langle \pi_-(F) a_-, a_- \rangle \\
&= \int_{-\infty}^\infty dv \int_{\mathbb{R}^2} F(\exp s e_1 \exp u e_2) e^{-s/2} e^{\sqrt{-1} uv} ds du \\
&= \int_{\mathbb{R}} F(\exp s e_1) e^{-s/2} ds = \tilde{F}(e) = \langle \tau(F) a_\tau, a_\tau \rangle
\end{aligned}$$

但し $a \in (\mathcal{H}^{\infty})_{\mathbb{H}} \times \Delta_{\mathbb{H}}^{\frac{1}{2}}$; $a_{\tau} : \mathcal{H}^{\infty} \ni \psi \rightarrow \overline{\psi(e)} \in \mathbb{C}$.
 これが単項表現 τ に対する我々の Plancherel formula である。

例2 (cf. [1]) . $G = \widetilde{E}(\mathbb{R}^2)$ を平面の運動群の universal cover とする。
 G のリー環は $\mathfrak{g} = \mathbb{R}T + \mathbb{R}X + \mathbb{R}Y : [T, X] = Y, [T, Y] = -X$. この基底に関する第2種標準座標を用いて non-exponential group G を \mathbb{R}^3 と同一視すると、その積演算は

$$(\theta, a, b)(\theta, a, b) = (\theta + \theta, a + a \cos \theta - b \sin \theta, b + a \sin \theta + b \cos \theta).$$

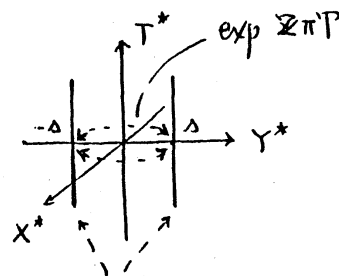
今 $1 = -sY \in \mathfrak{g}$ で polarization $\mathfrak{h} = \mathbb{R}X + \mathbb{R}Y \in \mathfrak{I}(1, \mathfrak{g})$ をとり $B^{\circ} = \exp \mathfrak{h}$, $B = ZB^{\circ}$ とおく。ここに $Z = G(1) = \exp 2\pi ZT : G$ の center.
 $G(1)$ の unitary character χ_{α} , $\chi_{\alpha}(\exp 2m\pi T) = e^{i 2\pi m \alpha}$, を B の unitary character $\chi_{\alpha}(\exp 2m\pi T b) = e^{i 2\pi m \alpha} \chi_{\beta}(b)$ ($m \in \mathbb{Z}, b \in B^{\circ}$) に拡張し、 \hat{G} の元 $\pi_{s, \alpha} = \text{ind}_{B^{\circ}}^{\hat{G}} \chi_{\alpha}$ を right translation で実現すると

$$(\pi_{s, \alpha}(g)(\phi))(t) = \phi((t + \theta, a \cos t - b \sin t, a \sin t + b \cos t))$$

$$= e^{-i \alpha (a \sin t + b \cos t)} e^{i \alpha (0 + t)} \phi(\widehat{t + \theta})$$

但し $\phi \in L^2([0, 2\pi))$, $t \in [0, 2\pi)$, $g = (\theta, a, b) \in G$ かつ $t + \theta = [t + \theta] + \widehat{t + \theta}$ with $[t + \theta] \in 2\pi\mathbb{Z}$, $\widehat{t + \theta} \in [0, 2\pi)$.

又この表現は $1 = -sX^* \in \mathfrak{g}^*$ における polarization \mathfrak{h} から同様にして構成され



$$(\pi_{s, \alpha}(g)(\phi))(t) =$$

$$e^{-i \alpha (a \cos t - b \sin t)} e^{i \alpha (0 + t)} \phi(\widehat{t + \theta}).$$

$\mathfrak{h}^{\perp} \cap G, \mathfrak{h} = -\Delta Y^* \cup \Delta Y^*$
 各々の line は H°
 orbit with $H^{\circ} = \exp \mathfrak{h}$

さて $\mathfrak{h} = \mathbb{R}X$ としてまず $\tau = \text{ind}_{H^0}^G \mathbf{1}_{H^0}$ 、 $H^0 = \exp \mathfrak{h}$ を考えると
Benoistにより

$$\tau \simeq 2 \int_{\mathbb{R}_+ \times [0, 1)}^{\oplus} \pi_{\vartheta, \alpha} \, d\vartheta d\alpha.$$

更にこの時 $\dim(\mathcal{H}_{\pi_{\vartheta, \alpha}}^{-\infty})^{H^0} = 2$ 、但し一般に $(\mathcal{H}_{\pi}^{-\infty})^{\kappa, \ell\kappa}$ を簡単の為
 $(\mathcal{H}_{\pi}^{-\infty})^{\kappa}$ と書く、で $\pi_{\vartheta, \alpha}$ の第2の実現を用いる時

$$(\mathcal{H}_{\pi_{\vartheta, \alpha}}^{-\infty})^{H^0} = \mathbb{C} \delta_{-\frac{\pi}{2}} \oplus \mathbb{C} \delta_{\frac{\pi}{2}} \quad (\delta: \text{Dirac measure の conjugate}).$$

又第1の実現を用いる時

$$(\mathcal{H}_{\pi_{\vartheta, \alpha}}^{-\infty})^{H^0} = \mathbb{C} \delta_0 \oplus \mathbb{C} \delta_{\pi}$$

となる。他方 $\mathfrak{h}^{\perp} \cap \mathfrak{g}.1$ は2つの連結成分から成りそれぞれは H^0 -
orbit でその次元は orbit $\mathfrak{g}.1$ の次元の半分。

今 $S = \{g \in G; g^{-1} \cdot (1 + \mathfrak{f}^{\perp}) \cap \mathfrak{h}^{\perp} \neq \emptyset\}$ を求めてみよう。 $g = (\theta, a, b)$
 $\in G$ として

$$g^{-1} \cdot (\alpha T^* + \beta Y^*)(X) = \beta \sin \theta, \quad g^{-1} \cdot (\alpha T^* + \beta Y^*)(Y) = \beta \cos \theta \\ (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

より、 $1 = -sX^*$ の時 $S = ((\mathbb{Z} + 1/2)\pi, \mathbb{R}, \mathbb{R})$ 又 $1 = -sY^*$ の時 $S = (\mathbb{Z}\pi, \mathbb{R}, \mathbb{R})$ となり丁度 $(\mathcal{H}_{\pi_{\vartheta, \alpha}}^{-\infty})^{H^0}$ の元の support と一致する。

さて次に部分群 $H = ZH^0$ の unitary character $\rho_{\gamma}(\exp m\pi Th^0) = e^{\sqrt{-1} 2\pi m \gamma}$ ($m \in \mathbb{Z}$, $h^0 \in H^0$, $\gamma \in [0, 1)$) からの誘導表現 $\tau = \text{ind}_H^G \rho_{\gamma}$ を
やはり right translation で実現すると、 $\phi \in L^2([0, \pi) \times \mathbb{R})$ 、 $g = (\theta, a, b) \in G$ として

$$(\tau(g)\phi)(t, \eta) = e^{2\sqrt{-1} [(t+\theta)] \gamma \pi} \phi(\widehat{t+\theta}, (-1)^{[(t+\theta)]} (\eta + a \sin t + b \cos t))$$

但し $t+\theta = [[t+\theta]]\pi + \widehat{t+\theta}$ with $[[t+\theta]] \in \mathbb{Z}$, $\widehat{t+\theta} \in [0, \pi)$.

Fourier変換

$$\Phi(t, \eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\eta y} \phi(t, y) dy$$

に移って得られる表現をやはり τ とかくと、 $(t, \eta) \in [0, \pi) \times \mathbb{R}$ として

$$(\tau(g)\Phi)(t, \eta) = e^{2i\eta [[t+\theta]]\pi} e^{-i\eta (a \sin t + b \cos t)} \widehat{\Phi}(t+\theta, (-1)^{[[t+\theta]]} \eta).$$

最後に $\text{map } L^2([0, \pi) \times \mathbb{R}) \ni \Phi \leftrightarrow \widehat{\Phi} \in L^2([0, 2\pi) \times \mathbb{R}_+)$;

$$\widehat{\Phi}(t, \eta) = \begin{cases} \Phi(t, \eta), & t \in [0, \pi) \\ e^{2i\eta \pi} \Phi(t-\pi, -\eta), & t \in [\pi, 2\pi) \end{cases}$$

により $L^2([0, 2\pi) \times \mathbb{R}_+)$ 上に表現 τ を実現すると

$$(\tau(g)\widehat{\Phi})(t, \eta) = e^{2i\eta [[t+\theta]]\pi} e^{-i\eta (a \sin t + b \cos t)} \widehat{\Phi}(t+\theta, \eta).$$

以上により G の $L^2([0, 2\pi))$ への表現 $\tau_s (s > 0); F \in L^2([0, 2\pi))$ に対し、 $g = (\theta, a, b) \in G$ として

$$(\tau_s(g)F)(t) = e^{2i\eta [[t+\theta]]\pi} e^{-i\eta s (a \sin t + b \cos t)} F(t+\theta)$$

を導入すると

$$\tau \simeq \int_{\mathbb{R}_+}^{\oplus} \tau_s ds$$

而るに τ_s は以前の記号で既約表現 $\pi_{s, 2\gamma} \pmod{\mathbb{Z}}$ に他ならない。即ち Benoist の結果が保証するように τ は multiplicity free である。

これは上図でみて $\mathfrak{h}^\perp \cap G.1$ に含まれる 2 個の連結成分、各連結成分は

H° -orbit が $\exp \pi T \in H$ で結ばれる事に起因すると思われる。即ちこの場合、 $\mathfrak{h}^\perp \cap G.1$ に含まれる連結成分は依然として2個しかもそれぞれが丁度 G -orbit $G.1$ の次元の半分の次元をもつ smooth manifold であるが、 $\mathfrak{h}^\perp \cap G.1$ は唯一つの H -orbit となっている。

最後に $\pi_{j,\alpha}$ の第2の実現において

$$(\mathfrak{h}^{(-\infty)})_{\pi_{j,\alpha}}^{H^\circ} \ni a = \xi \delta_{-\frac{\pi}{2}} + \eta \delta_{\frac{\pi}{2}}$$

が $(\mathfrak{h}^{(-\infty)})_{\pi_{j,\alpha}}^{H, \beta_\gamma}$ に属する為の条件は

$$\langle \exp \pi T . a, \phi \rangle = \langle e^{2\pi\sqrt{-1}\gamma} a, \phi \rangle \quad \text{for } \phi \in (\mathfrak{h}^{(-\infty)})_{\pi_{j,\alpha}}^{H, \beta_\gamma}.$$

$$\text{左辺} = \langle a, \phi(t-\pi) \rangle = \xi \overline{\phi(-\frac{3}{2}\pi)} + \eta \overline{\phi(-\frac{\pi}{2})} = \xi e^{2\pi\sqrt{-1}\alpha} \overline{\phi(\frac{\pi}{2})} + \eta \overline{\phi(-\frac{\pi}{2})}.$$

$$e^{2\pi\sqrt{-1}\gamma} \xi = \eta, e^{2\pi\sqrt{-1}\gamma} \eta = \xi e^{2\pi\sqrt{-1}\alpha}, \text{ i.e. } e^{4\pi\sqrt{-1}\gamma} \xi = e^{2\pi\sqrt{-1}\alpha} \xi.$$

こうして

$$(\mathfrak{h}^{(-\infty)})_{\pi_{j,\alpha}}^{H, \beta_\gamma} = \begin{cases} \mathbb{C}(\delta_0 + e^{2\pi\sqrt{-1}\gamma} \delta_\pi) & \text{if } \alpha = 2\gamma, \\ 0 & \text{if } \alpha \neq 2\gamma. \end{cases}$$

同様にして第1の実現でやると

$$(\mathfrak{h}^{(-\infty)})_{\pi_{j,\alpha}}^{H, \beta_\gamma} = \begin{cases} \mathbb{C}(\delta_0 + e^{2\pi\sqrt{-1}\gamma} \delta_\pi) & \text{if } \alpha = 2\gamma, \\ 0 & \text{if } \alpha \neq 2\gamma. \end{cases}$$

又これらの元の support はやはり以前あたえた集合 S に一致する。

例3. $\mathfrak{g} = \mathbb{R}T + \mathbb{R}P + \mathbb{R}Q + \mathbb{R}E$; $[P, Q] = E$, $[T, E] = E$, $[T, P] = \frac{1}{2}P$, $[T, Q] = \frac{1}{2}Q$ (rank 1 の normal \mathfrak{j} -algebra) とし $G = \exp \mathfrak{g}$ を考えよう。 $f = E^* \in \mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{h} = \mathbb{R}T + \mathbb{R}Q \in \mathfrak{M}(f, \mathfrak{g})$ にとり χ_f, H etc は以前通りの意味でもちいる。 G は discrete series の表現 $\pi_\pm \in \hat{G} \rightarrow \pm G.E^* \in \mathfrak{g}/G$ を持ち、定理1より

$$\tau = \text{ind}_{\mathfrak{H}}^{\mathfrak{G}} \chi_{\tau} \cong \pi_{+} + \pi_{-}.$$

まず $\mathfrak{L} = \mathbb{R}Q + \mathbb{R}E \in \mathfrak{I}(\pm E^{*}, \mathfrak{g})$, $a \in (\chi_{\pi_{\pm}}^{-\infty})_{\mathfrak{H}, \chi_{\pm} \Delta \mathfrak{A}/\mathfrak{H}}^{\frac{1}{2}}$ として、 $\psi \in (\chi_{\pi_{\pm}}^{\infty})$ に対し $\Psi(s, t) = \psi(\text{exp } sT \text{exp } tP)$ ($s, t \in \mathbb{R}$) とおく。 $h = \text{exp } xT \in \mathfrak{H}$ として $\langle \pi_{\pm}(h)a, \Psi \rangle = \langle a, \Psi(s+x, t) \rangle$ 、 $h = \text{exp } xQ \in \mathfrak{H}$ として $\langle \pi_{\pm}(h)a, \Psi \rangle = \langle a, \psi(\text{exp } xQ \text{exp } sT \text{exp } tP) \rangle = \langle a, \psi(\text{exp } sT \text{exp } tP \text{exp } (x e^{-\frac{x}{2}} Q - t x e^{-\frac{x}{2}} E)) \rangle = \langle a, e^{\pm \sqrt{1} x} e^{\frac{x}{2}} \Psi(s, t) \rangle$ 。従って要求される semi-invariance は

$$\langle a, \Psi(s+x, t) \rangle = e^{x/4} \langle a, \Psi \rangle,$$

$$\langle a, (1 - e^{\pm \sqrt{1} x t} e^{-x/2}) \Psi(s, t) \rangle = 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R}).$$

第2の式より $\text{supp } a \subset (\mathbb{R}, 0)$ 、更に第1の式を用いて

$$\langle a, \Psi \rangle = c \int_{\mathbb{R}} \overline{\Psi(s, 0)} e^{-\frac{s}{4}} ds \quad (c \in \mathbb{C}).$$

つまり Benoist[1] と Penney[9] からわかる如く

$$\dim(\chi_{\pi_{\pm}}^{-\infty})_{\mathfrak{H}, \chi_{\pm} \Delta \mathfrak{A}/\mathfrak{H}}^{\frac{1}{2}} = 1.$$

次に $l = \alpha P^{*} + \beta Q^{*} \in \mathfrak{g}^{*} (\alpha^2 + \beta^2 \neq 0)$ を通る G -orbit に対応する $\pi_{\alpha, \beta} \in \hat{G}$ を考えよう。 $\mathfrak{L} = \mathbb{R}P + \mathbb{R}Q + \mathbb{R}E \in \mathfrak{I}(l, \mathfrak{g})$ を用いて $\pi_{\alpha, \beta}$ を実現し、 $\phi \in (\chi_{\pi_{\alpha, \beta}}^{\infty})$ に対し $\Phi(s) = \phi(\text{exp } sT)$ ($s \in \mathbb{R}$) とおく。 $a \in (\chi_{\pi_{\alpha, \beta}}^{-\infty})_{\mathfrak{H}, \chi_{\pm} \Delta \mathfrak{A}/\mathfrak{H}}^{\frac{1}{2}}$ として $h = \text{exp } tT$ の時 $\langle \pi(h)a, \Phi \rangle = \langle a, \Phi(s+t) \rangle$ 、 $h = \text{exp } tQ$ の時 $\langle \pi(h)a, \Phi \rangle = \langle a, \phi(\text{exp } tQ \text{exp } sT) \rangle = \langle a, \phi(\text{exp } sT \text{exp } t e^{-\frac{t}{2}} Q) \rangle = \langle a, e^{-\sqrt{1} \beta t} e^{-\frac{t}{2}} \Phi(s) \rangle$ 故、要求される semi-invariance は

$$\langle a, \Phi(s+t) \rangle = e^{\frac{t}{4}} \langle a, \Phi \rangle,$$

$$\langle a, (1 - e^{-\sqrt{1} \beta t} e^{-\frac{t}{2}}) \Phi(s) \rangle = 0 \quad (\forall t \in \mathbb{R}).$$

第2式より $\beta \neq 0 \Rightarrow a = 0$, i.e. $(\chi_{\pi_{d,p}}^{-\infty})_{H, \chi_{\Delta_{\mathfrak{g}/H}}^{1/2}} = \{0\}$. $\beta = 0$ の時、第1式より

$$\langle a, \Phi \rangle = c \int_{\mathbb{R}} \overline{\Phi(s)} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds \quad (c \in \mathbb{C})$$

となり、実際この a が $(\chi_{\pi_{d,0}}^{-\infty})_{H, \chi_{\Delta_{\mathfrak{g}/H}}^{1/2}}$ の non-zero element (for $c \neq 0$) を与える事は例1と同様にしてわかる。つまり

$$\dim(\chi_{\pi_{d,0}}^{-\infty})_{H, \chi_{\Delta_{\mathfrak{g}/H}}^{1/2}} = 1$$

となり、定理1の状況において、即ち exponential group の real polarization からの monomial 表現を考える時、exceptional な表現 $\pi \in \hat{G}$ に関しては、この単項表現の分解におけるその multiplicity に一致しない $\dim(\chi_{\pi}^{-\infty})_{H, \chi_{\Delta_{\mathfrak{g}/H}}^{1/2}}$ を持つ事がある。

最後に $1 = \alpha T^* \in \mathfrak{g}^*$ に対応する G の character についてはどうであろうか。この character を c_α で表わすと $\Delta_{\mathfrak{g}/H} \equiv 1$ より $(\chi_{c_\alpha}^{-\infty})_{H, \chi_{\Delta_{\mathfrak{g}/H}}^{1/2}} = \{0\}$.

以上よりこの例に関しては少なくとも次は成立している：

$$\Omega(\pi) \cap (f + \eta^\perp) = \emptyset \text{ なる } \pi \in \hat{G} \text{ に対し } (\chi_{\pi}^{-\infty})_{H, \chi_{\Delta_{\mathfrak{g}/H}}^{1/2}} = \{0\}.$$

例4 (cf. [2]). Bernat et al. [2]における一例を follow する事から始めよう。 $\mathbb{R} \in \alpha \neq 0$ として $G = G_\alpha(\alpha) = \exp \mathfrak{g}_\alpha(\alpha)$ 、 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_\alpha(\alpha) = \mathbb{R}h + \mathbb{R}a + \mathbb{R}a'$; $[h, a] = a - \alpha a'$ 、 $[h, a'] = \alpha a + a'$ 、 $[a, a'] = 0$ とする。 $\forall f \in \mathfrak{g}^*$ において $f = \mathbb{R}h \in S(f, \mathfrak{g})$ をとり単項表現 $\tau = \text{ind}_{\mathbb{H}}^G \chi_f$ を分解しよう。 $\alpha = \mathbb{R}a + \mathbb{R}a'$ とおき bijection $\xi a + \eta a' \rightarrow \xi + \sqrt{-1}\eta$ により α を \mathbb{C} と同一視すると $[h, z] = (1 - \sqrt{-1}\alpha)z$ for $\forall z \in \mathbb{C}$. 群 G は $H = \exp \mathbb{R}h$ と $A = \exp \mathbb{C}$ との半直積で $\exp \xi h \exp z = \exp(e^{f(1-\sqrt{-1}\alpha)} z) \exp \xi h$ for $\xi \in \mathbb{R}$ 、 $z \in \mathbb{C}$. $\lambda = f(h)$ とおく。 $\Delta_{\mathfrak{g}/H}(\exp \xi h) = e^{2\xi}$ 、 $\chi_f(\exp \xi h) = e^{\sqrt{-1}\xi \lambda}$

故 \mathcal{H}_τ は関数 $\varphi: G \rightarrow \mathbb{C}$ で

$$\varphi(\hat{g} \exp \xi h) = e^{f(1-\sqrt{1-\lambda})} \varphi(\hat{g}) \quad \text{for } (\xi, \hat{g}) \in \mathbb{R} \times G$$

をみたすものからなる。map $\varphi \mapsto (\tilde{\varphi}: z \rightarrow \varphi(\exp z))$ により \mathcal{H}_τ を $L^2(\mathbb{C}) = L^2(\mathbb{R}^2)$ と同一視する。 $\xi_0 \in \mathbb{R}$, $z_0, z \in \mathbb{C}$, $\varphi \in \mathcal{H}_\tau$ として

$$\begin{aligned} [\tau(\exp \xi_0 h \exp z_0) \tilde{\varphi}][z] &= \varphi(\exp(-z) \exp -\xi_0 h \exp z) \\ &= \varphi(\exp(z e^{-f(1-\sqrt{1-\lambda})} - z_0) \exp(-\xi_0 h)) = e^{f_0(\sqrt{1-\lambda}-1)} (z e^{-f_0(1-\sqrt{1-\lambda})} - z_0). \end{aligned}$$

ここで \mathcal{F} を $L^2(\mathbb{C})$ の Fourier 変換とし $\tau_1 = \mathcal{F} \circ \tau \circ \mathcal{F}^{-1}$ とおき、(1) を $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ の内積、 dz を \mathbb{R}^2 の Lebesgue measure とする。この時 $\hat{g} = \exp \xi_0 h \exp z_0 \in G$, $\psi \in \mathcal{K}(\mathbb{C})$, $v \in \mathbb{C}$ として

$$\begin{aligned} 2\pi [\mathcal{F}(\tau(\hat{g})\psi)](v) &= \int_{\mathbb{C}} (\tau(\hat{g})\psi)(z) e^{\sqrt{1-\lambda}(v|z)} dz \\ &= \int_{\mathbb{C}} e^{f_0(\sqrt{1-\lambda}-1)} \psi(z e^{-f_0(1-\sqrt{1-\lambda})} - z_0) e^{\sqrt{1-\lambda}(v|z)} dz \\ &= \int_{\mathbb{C}} e^{f_0(\sqrt{1-\lambda}+1)} \psi(z') e^{\sqrt{1-\lambda}(v|e^{f_0(1-\sqrt{1-\lambda})}(z_0+z'))} dz' \\ &= 2\pi e^{f_0(\sqrt{1-\lambda}+1)+\sqrt{1-\lambda}(v|e^{f_0(1-\sqrt{1-\lambda})}z_0)} (\mathcal{F}\psi)(e^{f_0(1+\sqrt{1-\lambda})}v). \end{aligned}$$

さて a, a' の dual basis を a^*, a'^* で表し α 同様 α^* を bijection $\alpha^* \ni \xi a^* + \eta a'^* \rightarrow \xi + \sqrt{1-\lambda} \eta \in \mathbb{C}$ により \mathbb{C} と同一視する。exp th. $(\xi a^* + \eta a'^*) = \xi' a^* + \eta' a'^*$ with $\xi' = e^{-t}(\xi \cos \alpha t + \eta \sin \alpha t)$, $\eta' = e^{-t}(\xi \sin \alpha t + \eta \cos \alpha t)$ 故 $\xi = \cos \theta$, $\eta = \sin \theta$ とおくと $\xi' = e^{-t} \cos(\theta - \alpha t)$, $\eta' = e^{-t} \sin(\theta - \alpha t)$ となり $e^{\sqrt{1-\lambda}\theta}$ を通る coadjoint orbit は $e^{-t}(\cos(\theta - \alpha t) + \sin(\theta - \alpha t)) = e^{-t+\sqrt{1-\lambda}(\theta - \alpha t)}$, かつ変数変換 $(\xi', \eta') \rightarrow (t, \theta)$ に関しては

$$\left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi'}{\partial t} & \frac{\partial \xi'}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \eta'}{\partial t} & \frac{\partial \eta'}{\partial \theta} \end{pmatrix} \right| = e^{-2t} .$$

以前同様 $\hat{\mathfrak{g}} = \exp \xi_0 \cdot h \exp z_0 \in G$ に対し

$$\begin{aligned} (\tau_1(\hat{\mathfrak{g}})\varphi)(e^{-t+\sqrt{\lambda}(\theta-\alpha t)}) &= e^{f_0(\sqrt{\lambda}\lambda+1)+\sqrt{\lambda}} (e^{-t+\sqrt{\lambda}(\theta-\alpha t)} | e^{f_0(1-\sqrt{\lambda}\alpha)z_0}) \\ &\quad \times \varphi(e^{f_0(1+\sqrt{\lambda}\alpha)} e^{-t+\sqrt{\lambda}(\theta-\alpha t)}) \\ &= e^{f_0(\sqrt{\lambda}\lambda+1)+\sqrt{\lambda}} (e^{-t+\sqrt{\lambda}(\theta-\alpha t)} | e^{f_0(1-\sqrt{\lambda}\alpha)z_0}) \\ &\quad \times \varphi(e^{(-t+f_0)(1+\sqrt{\lambda}\alpha)+\sqrt{\lambda}\theta}). \end{aligned}$$

従って各 coadjoint orbit 上の L^2 -function は τ_1 で不変。そこでこの表現が $\cos \theta + i \sin \theta \in \sigma^*$ から出発して構成される $\pi_0 \in \hat{G}$ に他ならない事をみよう。

φ を π_0 の表現空間の元、 $\hat{\mathfrak{g}}$ は上の通りとすると

$$\begin{aligned} (\pi_0(\hat{\mathfrak{g}})\varphi)(\exp x h) &= \varphi(\exp z_0 \cdot \exp \xi_0 \cdot h \exp x h) = \varphi(\exp z_0 \cdot \exp(x - \xi_0) h) \\ &= \varphi(\exp(x - \xi_0) h \exp e^{f_0(x)(1-\sqrt{\lambda}\alpha)z_0}) \\ &= e^{\sqrt{\lambda}(e^{\sqrt{\lambda}\theta} | e^{f_0(x)(1-\sqrt{\lambda}\alpha)z_0})} \varphi(\exp(x - \xi_0) h). \end{aligned}$$

即ち π_0 は $L^2(\mathbb{R})$ に

$$(\pi_0(\hat{\mathfrak{g}})\varphi)(x) = e^{\sqrt{\lambda}(e^{\sqrt{\lambda}\theta} | e^{f_0(x)(1-\sqrt{\lambda}\alpha)z_0})} \varphi(x - \xi_0)$$

で実現される。ここで $\Phi(x) = e^{(1+\sqrt{\lambda}\lambda)x} \varphi(x)$ とおき map $\varphi \leftrightarrow \Phi$ により π_0 を

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-2x} |\Phi(x)|^2 dx < +\infty$$

なる Φ の space 上に実現したものを $\hat{\pi}_\theta$ とすると、

$$\begin{aligned} (\hat{\pi}_\theta(\hat{g})\Phi)(x) &= e^{(1+\sqrt{1-\lambda})x} \pi_\theta(\hat{g})(e^{-(1+\sqrt{1-\lambda})x} \Phi(x)) \\ &= e^{(1+\sqrt{1-\lambda})x} e^{\sqrt{1-\lambda}\theta} |e^{(\xi-x)(1-\sqrt{1-\lambda})} z_\theta| e^{-(1+\sqrt{1-\lambda})(x-\xi)} \Phi(x-\xi) \\ &= e^{\xi(1+\sqrt{1-\lambda})+\sqrt{1-\lambda}\theta} |e^{(\xi-x)(1-\sqrt{1-\lambda})} z_\theta| \Phi(x-\xi) \end{aligned}$$

而るに上記 τ_1 の $e^{\sqrt{1-\lambda}\theta}$ を通る coadjoint orbit 上への制限に関し $\Psi(t) = \varphi(e^{-t(1+\sqrt{1-\lambda})+\sqrt{1-\lambda}\theta})$ ($t \in \mathbb{R}$) とおくと τ_1 は

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-2t} |\Psi(t)|^2 dt < +\infty$$

なる Ψ の space 上に実現され、今この表現を $\hat{\tau}$ と記すと明らかに

$$(\hat{\tau}(\hat{g})\Psi)(t) = e^{\xi(1+\sqrt{1-\lambda})+\sqrt{1-\lambda}\theta} |e^{(\xi-t)(1-\sqrt{1-\lambda})} z_\theta| \Psi(t-\xi).$$

以上より $\hat{\pi}_\theta \simeq \hat{\tau}$ 、つまり

$$\tau \simeq \int_{[0, 2\pi]}^\oplus \pi_\theta d\theta$$

となり、 τ は multiplicity free かつその分解における measure は $\mathfrak{f} + \mathfrak{h}^\perp$ における Lebesgue measure の image measure である。

この note を終えるにあたり 1つだけ定理を記しておこう。それは巾零群に対する Howe の結果 (cf. [7]) の拡張である。

定理3. $G = \exp \mathfrak{g}$: exponential group, $f \in \mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{h} \in \mathcal{I}(f, \mathfrak{g})$, $\pi \in \hat{G}$ とする。この時

$$\dim(\pi(-\infty)_{\mathfrak{h}} \chi_f \Delta_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}^{1/2}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \Omega(\pi) = G.f. \\ 0 & \text{if } \Omega(\pi) \neq G.f. \end{cases}$$

References

- [1] Y. Benoist, Espaces symétriques exponentiels, These 3^e cycle, Univ. Paris VII, 1983.
- [2] P. Bernat et al., Représentations des groupes de Lie résolubles, Dunod, Paris 1972.
- [3] L. Corwin, F.P. Greenleaf and G. Grélaud, Direct integral decompositions and multiplicities for induced representations of nilpotent Lie groups, to appear.
- [4] H. Fujiwara, Certains opérateurs d'entrelacement pour des groupes de Lie résolubles exponentiels et leurs applications, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. A, 36(1982), 13-72.
- [5] H. Fujiwara, Polarisation réelles et représentations associées d'un groupe de Lie résoluble, J. Func. Anal., 60(1985), 102-125.
- [6] H. Fujiwara, Représentations monomiales des groupes de Lie nilpotents, to appear.
- [7] R. Howe, On a connection between nilpotent groups and oscillatory integrals associated to singularities, Pacific J. Math., 73(1977), 329-364.
- [8] A.A. Kirillov, Unitary representations of nilpotent Lie groups, Usp. Mat. Nauk 17(1962), 57-110.
- [9] R. Penney, Abstract Plancherel theorems and a Frobenius re-

reciprocity theorem, J. Func. Anal., 18(1975), 177-190.

- [10] M. Vergne, Étude de certaines représentations induites d'un groupe de Lie résoluble exponentiel, Ann. scient. Éc. Norm . Sup., 3(1970), 353-384.