数理解析研究所講究録
第615巻 1987年 102-109

可解リー群の character と orbit method

山上　滋（琉球大　理学部）

この小論で問題とするのは、単連結可解リー群の normal 表現の幾何学的構成法（いわゆる orbit method）についてである。単連結可解リー群のユニタリー表現論は Kirillov の理論を発展させることにより、Ｉ型の場合には［A-K］で既約表現の構成がＩ型の判定条件とともに得られ、さらに Pukanszky はＩ型とは限らない一般の場合に、指標が定義できる表現（normal 表現と呼ばれる）を orbit method 風に記述することに成功した（［Ｐ１］、［Ｐ２］）。彼の理論の要点は

１）　Prim（G）

２）　C^*(G）の character

３）　generalized orbit

がすべて同一視できるところにある。１）と２）の対応は C^*(G）の character からＧのユニタリー表現をＧＮＳ構成法で作り、その表現の核をとればよい。２）と３）との対応は generalized orbit に対してＧの normal 表現（の同値類）を構成することによって与えられる。

ここで generalized orbit から作られる normal 表現を注意して見てやると character から定まるＧＮＳ表現とは一般に一致しないことがわかる。あるいは normal 表現の quasi-equivalence class の中で generalized orbit から作られる表現の位置が明確でなく、 generalized orbit の幾何学的必然性もはっきりしない。そこで次ぎの問題を考察したい。

（ｉ）C^*(G）の character のＧＮＳ表現と直接結び付けられるような幾何学的対象は何か。

さらに、

(ii) generalized orbit を含む広い幾何学的対象を設定し、 normal 表現の幾何学的構成法を一般化し、そのような表現相互の同値性を判別する不変量（これは表現の multiplicity に相当するものである）を幾何学的不変量と結び付けてgeneralized orbit の幾何学的意味が明らかにされれば申し分ない。

この最後の問題は monomial 表現の multiplicity の幾何学的表示、解析的表示とも関連する問題である。これについては、この講究録のなかの藤原氏の解説を参照されたい。以下では最初の問題について解説を試みる。

上で述べたようにここでの問題は character の GNS 表現の幾何学的構成法である。この表現は、Hilbert algebra が内在しているのが１つの特徴である。Hilbert algebra を幾何学的に作る一般的方法は亜群を経由するものである。Pukanszky に従って、G の quasi coadjoint orbit (= coadjoint orbit の local closure = Pukanszky の R-orbit) $\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}^*$ を出発点とする。 $\mathcal{O}$ はG不変な locally closed manifold で (ii)任意の G-orbit は $\mathcal{O}$ で dense になっている。(ii) $\mathcal{O}$ は G-orbit を leaf とする葉層構造をもつ。そこでこの G-orbit 葉層から作られる亜群が１つの候補として考えられる。例えばよく使われるホロノミー亜群は今の場合、G-orbit の定める同値関係（のグラフ） $\{(x,y) \in \mathcal{O} \times \mathcal{O} \ ; \ G.x = G.y\}$ に一致する。一方、表現を作るためには G が equivariant に作用する line bundle が必要であるが、一般に G の $x \in \mathcal{O}$ での stabilizer G(x) の infinitesimal character $ix|_{\mathfrak{g}(x)}$ は G(x) の連結成分までしか積分できないので、ホロノミー亜群のかわりに leaf に沿った道のホモトピー類から作られる亜群 (fundamental groupoid) $\Gamma_\circ$ を考えてみる。$\Gamma_\circ$ の１つの構成法は $G \times \mathcal{O}$ を同値関係 $(g,x) \sim (g',x') \Leftrightarrow x=x', g^{-1}g' \in G(x)_\circ$ でわったものに亜群の構造を

$$t\,[g,\,x]_\circ = g\,x, \qquad s\,[g,\,x]_\circ = x$$

$$[g, x]_0 [g', x']_0 = [gg', x']_0$$

$$[g, x]_0^{-1} = [g^{-1}, gx]_0$$

で入れる。 Γ_0 の上には line bundle B_0 を

$B_0 = G \times \mathcal{O} \times C/\sim$ 、 $(g, x, z) \sim (g', x', z') \Leftrightarrow x = x', g^{-1}g' \in G(x)_0$ 、 $z' = z e^{-ix}(g^{-1}g')$

で定義できる。さらに B_0 には Γ_0 上の groupoid ring の構造を

$$[g, x, z]_0 [g', x', z']_0 = [gg', x', zz']_0$$

$$[g, x, z]_0 = [g^{-1}, gx, z]_0$$

$$([g, x, z]_0 \mid [g, x, z']_0) = zz'$$

で定義することができる。従って、必要とする測度はすべてルベーグ測度（と同値な測度）にとって、（Γ_0 、B_0）から Hilbert algebra を作ることができる（［Y］参照）。さらに Γ_0 の stabilizer は［Y］の意味で uniformly abelian であることがわかる。まず $G(\mathcal{O}) = \coprod_{x \in \mathcal{O}} G(x) \subset G \times \mathcal{O}$ とおくと $G(\mathcal{O})$ は $G \times \mathcal{O}$ の closed submanifold になることがわかる。$G(\mathcal{O})$ の連結成分全体の集合を S で表す。$x \in \mathcal{O}$ に対して $G(x)$ を $G(x) \times \{x\} \subset G(\mathcal{O})$ と同一視することにより、$G(x)/G(x)_0$ から S への写像が得られるが、これが全単射であることがわかる。さらにこの対応で $G(x)/G(x)_0$ の群構造を S に入れたものは $x \in \mathcal{O}$ の取り方によらないこともわかる。従って

$x \in \mathcal{O}$ ごとに群の同型 $\iota_x : S \to G(x)/G(x)_\circ$ が得られるが、$G(x)/G(x)_\circ$ は $(\Gamma_\circ)_x^x = \{[g, x]_\circ ; g \in G(x)\}$ と自然に同一視されるので結局 $\iota_x : S \to (\Gamma_\circ)_x^x$ とみなしてよい。この同型の族 $\{\iota_x\}_{x \in \mathcal{O}}$ が $\Gamma_\circ$ の stabilizer の uniformity を与える。そこで [Y] の結果が使えて S の subgroup Σ があって $(\Gamma_\circ, B_\circ)$ から作られた Hilbert algebra は $\Sigma^\wedge$ をパラメータにして直和分解される。今、我々がほしいのは因子表現であるから、$\Gamma_\circ$ では covering の取り方が大きすぎる。正しい covering を得るために $G(x)$ の subgroup $\underline{G}(x)$ を

$$\iota_x(\Sigma) = \underline{G}(x)/G(x)_\circ$$

で定義して

$$\Gamma = G \times \mathcal{O}/\sim, \quad (g, x) \sim (g', x') \Leftrightarrow x = x', \ g^{-1}g' \in \underline{G}(x)$$

とおく。 Γ は $\Gamma_\circ$ のときと同様に亜群になる。$\underline{G}(x)$ は一般に連結とは限らないので、 line bundle を作るためには $\underline{G}(x)$ の character 指定しなくてはならない。そのために、

$$G^*(\mathcal{O}) = \{(x, \chi) ; x \in \mathcal{O}, \chi \text{ は } \underline{G}(x) \text{ の unitary character で } d\chi = i x|_{\mathfrak{g}(x)} \text{ となるもの}\}$$

とおく。$\underline{G}(x)$ は reduced stabilizer $\overline{G}(x)$ に含まれることが示せるので、この集合は空ではない。$G^*(\mathcal{O})$ には G を $g(x, \chi) = (gx, \chi \ \mathrm{Ad}\, g^{-1})$ で作用させることができる。さらに $G^*(\mathcal{O})$ に位相を $(\chi_i, x_i) \to (\chi, x)$ とは「$x_i \to x$ かつ $(x_i, g_i) \to (x, g)$ in $G(\mathcal{O})$ となる列 $\{g_i\}$ に対して $\chi_i(g_i) \to \chi(g)$ が成り立つ」 ことと定義して

やれば　$\forall\,\omega \in G^*(x) = \{(x,\ \chi) \in G^*(\mathcal{O})\}$

1)　$\mathcal{O}$ から $G^*(\mathcal{O})$ への連続な G-equivariant 切断で ω を通るものが1つだけ存在する。

2)　それを s_ω で表すとき $G^*(x)\times\mathcal{O} \ni (\omega,\ y) \mapsto s_\omega(y) \in G^*(\mathcal{O})$ は同相（言い替えれば $G^*(\mathcal{O})$ は $\Sigma^\wedge\times\mathcal{O}$ と同相）になる、

ことがわかる。以上のことから、$G^*(\mathcal{O})$ における G-orbit の閉包 Ω は $\mathcal{O}$ の上に同相に project される。以下 Ω を固定する（場合によっては Ω と $\mathcal{O}$ とを同一視する）。さて Ω に対して Γ 上の line bundle B を

$$B = G\times\mathcal{O}\times C/\sim\ ,\quad (g,\ x\ ;\ z) \sim (g',\ x'\ ;\ z')$$
$$\Leftrightarrow\ x = x',\ g^{-1}g' \in \underline{G}(x),\ z' = z\,x(g^{-1}g')^{-1}$$

で定義し B_0 のときと同じように groupoid ring の構造を入れておく。このとき

> （Γ，B）から作られる Hilbert algebra は factor を生成する

ことがわかる。factor を生成する Hilbert algebra は得られたが、このままではGの表現としては大きすぎて character が定義できない。Γ を削るためにまず $G\times G$ の Γ への作用を $(g_1,\ g_2)[g,\ x] = [g_1 g g_2^{-1},\ g_2 x]$ で定める。$\Gamma \ni [g,\ x] \to (gx,\ x) \in \mathcal{O}\times\mathcal{O}$ を考えると、Γ の GxG-orbit は GxG の coadjoint orbit の covering になっていることがわかるので、

Γ は symplectic foliation の構造をもつ（［P］参照）

ことがわかる。そこで Γ の適当な polarization を用意して、（Γ, B）を '量子化' することにより表現のサイズを小さくしよう。$\mathfrak{f} = \{\mathfrak{f}_x\}_{x \in \mathcal{O}}$ を $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の subalgebra の family で

（i）$\mathfrak{f}_x$ は $x \in \mathcal{O}$ での positive polirization で Pukanszky condition をみたす、
（ii）$\mathfrak{f}_{gx} = \mathrm{Ad}\,g\,(\mathfrak{f}_x)$, $g \in G$, $x \in \mathcal{O}$,
（iii）$E = \{\mathfrak{f}_x \cdot x\}_{x \in \mathcal{O}}$ は $T^{\mathbb{C}}\mathcal{O}$ の C^{∞}-subbundle,

となるものを考える。今 $E \boxtimes \overline{E}$ を $(t, s) : \Gamma \to \mathcal{O} \times \mathcal{O}$ でひきもどすことにより Γ の polarization P を定めることができる。さらに $\mathcal{O}/G$ の横断測度 Λ を用意すれば、（Γ, B）を P により量子化して Hilbert space $\mathcal{H}(\Omega, \mathfrak{f}, \Lambda)$ が得られる。そこで（Γ, B）に対応する Hilbert algebra の構造をうつしてやることにより、$\mathcal{H}(\Omega, \mathfrak{f}, \Lambda)$ の dense subspace として Hilbert algebra $\mathcal{G}(\Omega, \mathfrak{f}, \Lambda)$ が得られる。

$\mathcal{G}(\Omega, \mathfrak{f}, \Lambda)$ は factor を生成する。

$\mathcal{H}(\Omega, \mathfrak{f}, \Lambda)$ における左移動から定められるGのユニタリー表現を $\rho(\Omega, \mathfrak{f}, \Lambda)$ で表す。

$\rho(\Omega, \mathfrak{f}, \Lambda)$ は $\mathcal{G}(\Omega, \mathfrak{f}, \Lambda)$ の right multiplication と可換。

さて $a \in C^{*}(G)$ に対して $\mathcal{G}(\Omega, \mathfrak{f}, \Lambda)^{2}$ 上の conjugate linear functional を

$$\Sigma_i \xi_i \eta_i^* \to \Sigma_i (\xi_i \mid \rho(\Omega, f, \Lambda)(a)\eta_i)$$

で定める。これが $\mathcal{H}(\Omega, f, \Lambda)$ の bonded liniear functional になる、すなわち、 $\exists\ \zeta \in \mathcal{H}$

$$\Sigma_i (\xi_i \mid \rho(\Omega, f, \Lambda)(a)\eta_i) = \Sigma_i (\xi_i \eta_i^* \mid \zeta)$$

となるような $a \in C^*(G)$ 全体を考えて、対応する ζ 全体を $C^*(G) \cap \mathcal{g}(\Omega, f, \Lambda)$ で表す。 $\rho(\Omega, f, \Lambda)$ が求める character 表現であるかどうかは

Quetion： $C^*(G) \cap \mathcal{g}(\Omega, f, \Lambda)$ は $\mathcal{H}(\Omega, f, \Lambda)$ で dense か？

ということになる。この問題は易しくないが、上が成り立つ f 、Λ の存在は ［A－K］，［P］ に従えば容易に示せる。$\mathfrak{n}$ を $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ を含む $\mathfrak{g}$ の nilpotent ideal とする。このとき f が $\mathfrak{n}$-admissible という概念を想像どおり定義することができて

$\mathfrak{n}$-admissible な f が存在する

ことがわかる。さらに Λ に対しても

Λ として C^∞ なものが取れる。そしてこのような Λ は定数倍を除いて一意的である（［P］）。

$\mathfrak{f}$ を $\mathfrak{n}$-admissible, Λ を C^{∞} とすると $C^{*}(G) \cap \mathcal{G}(\Omega, \mathfrak{f}, \Lambda)$ は $\mathcal{H}(\Omega, \mathfrak{f}, \Lambda)$ で dense である。このとき得られる character は (Ω, Λ) だけにより $\mathfrak{f}$ の取り方にはよらない。それを $\tau_{\Omega, \Lambda}$ で表せば

$\tau_{\Omega, \Lambda} = \tau_{\Omega', \Lambda'} \Leftrightarrow \Omega = \Omega', \Lambda = \Lambda'$。

この結果により、$C^{*}(G)$ の character の新しい parametrization が得られた。ここの Ω と Pukanszky の generalized orbit とはある意味で Fourier 変換の関係にある（［Y］参照）。この辺の事情はもっと詳しく解析されるべきであるが、曖昧なことをこれ以上書いてもしようがないので、ここはひとまずおしまいにする。

参考文献

［A－K］Auslander and Kostant, Polarization and unitary representations of solvable groups, Invent.Math.14(1971)255-354.

［P］ Pukanszky,Unitary representation of Lie groups and generalized symplectic geometry, Proc. Symp. Pure Math.38(1982),Part 1.

［Y］Yamagami, On factor decomposition of an ergodic groupoid (preprint).