数理解析研究所講究録
第 615 巻 1987 年 154-186

$H^1(G\ \ )$ — キヤク表現の分類, —の多様性
作用の摂動

$H^2(G\ \ )$ — 群拡大

表現論及び作用素環論における
低次コホモロジー論概説

$\iota\varphi(G \to U) \to \varphi$

$\varphi(a\cdot b) = \varphi(a)\varphi(b)$

$(d\varphi)_b = (d\varphi)_1$

$(d\varphi)_b = (d\varphi)$

$(d\varphi)(\delta a\cdot b) = (d\varphi)(\delta a)\cdot\varphi(b)$

$c\varphi(aba^{-1}) = \varphi(a)\varphi(b)\varphi(a)^{-1}$

奈良教育大　河上哲（ Satoshi Kawakami ）

$d\varphi([\delta a, b]) = [d\varphi(\delta a), \varphi(b)]$

1．序－定義と例－

本稿では、表現論及び作用素環論において「群及び亜群の１－コホモロジー，２－コホモロジー」の果している役割について概観する。１－コホモロジーは、表現論に於いては既約表現の分類や既約分解の多様性を示す一つの指標となり、作用素環論においては action の摂動、極大可換環の分類、環の同型性等に重要な役割を果している。２－コホモロジーの概念は、代数的には古くから群拡大の概念と平行して存在していたが、今日では、表現論においては表現の拡大や既約表現の決定を行なう上での必要不可欠な概念であり、作用素環論においては環及び action の分類や拡大において必然的に重要な役割を果している。

１－１．定義

純代数的には、次の様に定義される。Ｇ、Ｕを群とする。

［Ｉ］ action がからまない時

（１）　$H^1(G,U) = Z^1(G,U)/\cong$ $= \mathrm{Hom}(G,U)/\mathrm{Ad}\,U$

$Z^1(G,U) \ni c$（１－コサイクル）とは、ＧからＵへの群準同型。

$\alpha_{g_1}\cdot\alpha_{g_2}=c(g_1,g_2)\alpha_{g_1g_2}$ $\quad G\ni g\mapsto\alpha_g\in U$

$(\alpha_{g_1}\cdot\alpha_{g_2})\cdot\alpha_{g_3} = c(g_1,g_2)\alpha_{g_1g_2}\cdot\alpha_{g_3} = c(g_1,g_2)c(g_1g_2,g_3)\alpha_{g_1g_2g_3}$

$\alpha_{g_1}\cdot(\alpha_{g_2}\cdot\alpha_{g_3}) = \alpha_{g_1}\cdot(c(g_2,g_3)\alpha_{g_2g_3}) = c(g_1,g_2g_3)c(g_2,g_3)\alpha_{g_1g_2g_3}$

$\alpha_g,\ \alpha'_g$

$c_1\cong c_2$ とは、$c_2(g)=u^{-1}c_1(g)u$ を満たす $u\in U$ が存在する。

（２） $H^2(G,U)=Z^2(G,U)/\cong$ 但し、U；可換群。~~$\emptyset$~~ $GL(V)$ Center V

$Z^2(G,U)\ni c$（２－コサイクル）とは、

$$c\ ;\ G\times G\longrightarrow U$$

写像と条件

~~α_{g_1} とすると~~

$$c(g_1,g_2)c(g_1g_2,g_3)=c(g_2,g_3)c(g_1,g_2g_3)$$

$\alpha'_{g_1}\cdot\alpha'_{g_2}=c'(g_1,g_2)\alpha'_{g_1g_2}$
$=b(g_1)b(g_2)c(g_1,g_2)b(g_1g_2)^{-1}\alpha'_{g_1g_2}$

を満たす。$c_1\cong c_2$ とは、

$$c_2(g_1,g_2)=b(g_1)b(g_2)c_1(g_1,g_2)b(g_1g_2)^{-1}$$

$b(g_1)^{-1}\alpha'_{g_1}\cdot b(g_2)^{-1}\alpha'_{g_2}=c(g_1,g_2)b(g_1g_2)^{-1}\alpha'_{g_1g_2}$

$\alpha_{g_1}\circ\alpha_{g_2}=c(g_1,g_2)\alpha_{g_1g_2}$

を満たすＧ上のＵ－値関数 b が存在する。

$b(g)^{-1}\alpha'_g\alpha_g^{-1}=\beta_g$ とかくて $g\mapsto\beta_g$ は hom

［ＩＩ］ action がからむ時

α はＧのＵへの action とする。つまり、$\alpha\ ;\ G\longrightarrow \mathrm{Aut}U$；群準同型。

（１） $H^1_\alpha(G,U)=Z^1_\alpha(G,U)/\cong$

$Z^1_\alpha(G,U)\ni c$（α－１－コサイクル）とは、Ｇ上のＵ－値関数であって、$c(g_1g_2)=c(g_1)\alpha_{g_1}(c(g_2))$ を満たす。$c_1\cong c_2$ とは、$c_2(g)=u^{-1}c_1(g)\alpha_g(u)$ を満たす $u\in U$ が存在する事：

（２） $H^2_\alpha(G,U)=Z^2_\alpha(G,U)/\cong$

$\alpha\ ;\ G\ni g\longrightarrow\alpha_g\in\mathrm{Aut}U$ が cocycle crossed action とは、

$c\ ;\ G\times G\longrightarrow U$ が存在して、

$$\alpha_{g_1}\alpha_{g_2}=\mathrm{Ad}\,c(g_1,g_2)\cdot\alpha_{g_1g_2}=c(g_1,g_2)\cdot\alpha_{g_1g_2}\cdot c(g_1,g_2)^{-1}$$

$$c(g_1,g_2)c(g_1g_2,g_3)=\alpha_{g_1}(c(g_2,g_3))c(g_1,g_2g_3)$$

を満たす時に言う。また、この c を α－２－コサイクルとも言い、その集まりを $Z^2_\alpha(G,U)$ と表わす。また、$(\tilde\alpha,\tilde c)\cong(\alpha,c)$ とは、

$$\tilde\alpha_g=\mathrm{Ad}\,b_g\cdot\alpha_g\ ,\quad \tilde c(g_1,g_2)=b_{g_1}\alpha_{g_1}(b_{g_2})c(g_1,g_2)b_{g_1g_2}^{-1}$$

を満たすG上のU−値関数 b が存在する事。任意の c で、$(\alpha, c) \cong (\tilde{\alpha}, \mathbb{1})$ が成立している時、$H^2_\alpha(G,U) = \{0\}$ と書く。Uが可換群の時は、$\mathrm{Ad}\, c(g_1, g_2) = id$ が常に成り立つから、α は普通の action になり、$\tilde{\alpha} = \alpha$ により上の同値関係 $\cong$ が $Z^2_\alpha(G,U)$ の中で定まり、$H^2_\alpha(G,U)$ が定義される。

<u>注意</u>　Gが亜群の時も同様に定義される。G及びUにボレル構造や位相構造がある時は、その構造に付随した写像としてコホモロジーが定義される。

1−2．コホモロジーの出現

表現論及び作用素環論のどういう所で1，2−コホモロジーが出現するのか、話を単純にして観察してみよう。以下、特に断わらない限りGを局所コンパクト群とする。

<u>例1-2-1.</u>　Hを可分ヒルベルト空間とし、U＝U（H）＝｛H上のユニタリー作用素全体｝と置くとUは強作用素位相でPolish群となる。この時、

$T(\mathcal{H}) \Rightarrow \begin{cases} Z^1(G,U) = \{\text{GのHへのユニタリー表現全体}\} \\ H^1(G,U) = \{\text{GのHへのユニタリー表現の同値類全体}\} \end{cases}$

となっている。

<u>例1-2-2.</u>　ボレル空間XにGが作用してるとし、この作用を $X \ni x \longrightarrow g \cdot x \in X$　（$g \in G$）と表わす。μ をX上の擬不変有限測度、つまり、$g \cdot \mu$ と μ が測度として同値であるとする。但し、$g \cdot \mu$ は $g \cdot \mu(E) = \mu(g^{-1} \cdot E)$，E；ボレル集合で定まる測度。この時

$$\rho(g, x) = \frac{d(g\cdot\mu)}{d\mu}(x) -$$

と置くと $\rho(g,x)$ は $G \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$；ボレル関数で、

（＊）$\forall g_1, \forall g_2 \in G$, $\rho(g_1 g_2, x) = \rho(g_1, x)\rho(g_2, g_1\cdot x)$ for μ-a.a. $x \in X$

を満たす。ここで、G の $M = L^\infty(X, \mu)$ への作用 α を

$$\alpha_g(f)(x) = f(g\cdot x) \quad , \quad g \in G \ , \ f \in L^\infty(X,\mu)$$

で定義し、 $c^\rho(g) = \rho(g, \cdot) \in L^\infty(X, \mu)$ と置いてみると、

条件（＊）は、 $c^\rho : G \longrightarrow M = L^\infty(X,\mu)$

$$\forall g_1, \forall g_2 \in G, \quad c^\rho(g_1 g_2) = c^\rho(g_1)\alpha_{g_1}(c^\rho(g_2))$$

となり、c^ρ は α－1－コサイクルである。この時、μ が G－不変測度と同値となる為の必要十分条件は c^ρ がコバウンダリーとなる事である。 $\longrightarrow c^\rho(g) = u^{-1}\alpha_g(u)$ ：u は $M = L^\infty(X,\mu)$ の可逆元

例 1-2-3. （X, μ）を G－不変測度空間とする。ここで、

$$(\pi^0_g \xi)(x) = \xi(g\cdot x) \quad , \quad g \in G \ , \ \xi \in L^2(X,\mu)$$

と置くと π^0 は G のユニタリー表現で、$\alpha_g = \mathrm{Ad}\,\pi^0_g$ と置くと

α は $M = L^\infty(X, \mu)$ への G の作用を誘導する。今、

c；$G \times X \longrightarrow \mathbb{T}$；ボレル関数 　　$\pi^0 : G \longrightarrow \mathcal{U}(L^2(X,\mu))$

に対し、 　　$\alpha = \mathrm{Ad}\,\pi^0 : G \longrightarrow \mathcal{U}(M)$

$$(\pi^c_g \xi)(x) = c(g,x)\xi(g\cdot x) \ , \ g \in G \ , \ \xi \in L^2(X,\mu)$$

と置くと、π^c が G のユニタリー表現である（つまり、

$\pi^c_{g_1 g_2} = \pi^c_{g_1}\pi^c_{g_2}$, $g_1, g_2 \in G$）必要十分条件は、c が条件（＊）を満たす事、即ち、u^c が G の $U(M)$－値の α－1－コサイクルとなる事である。但し、$u^c(g) = c(g, \cdot)$。この時、$c_1 \doteqdot c_2$ ならば π^{c_1} と π^{c_2} は同値な表現となる。次の例では、この

$\pi : G \longrightarrow U(\mathcal{H})$

逆のケースを考える。 $B(\mathcal{H}) \supset A \longleftarrow$ {Ad π(G) maximal stable, abel Von Neuman

<u>例1-2-4.</u> π を空間H上へのGの既約表現とする。今、B(H)の中に$Ad\,\pi_g$ による作用でG－不変な極大可換von Neumann 部分環Aが存在したとする。この時、Gの作用する測度空間（X，μ）が存在し、H $\cong L^2$（X，μ），A $\cong L^\infty$（X，μ），$\alpha_g = Ad\,\pi_g$ 。簡単の為、測度μはG－不変としておく。すると、上の例で述べた表現 π^0 が定義され、 $u_g = \pi_g \pi_g^{0*}$ とおくと

$$u_{g_1g_2} = \pi_{g_1g_2}\pi^{0*}_{g_1g_2} = \pi_{g_1}\pi_{g_2}\pi^{0*}_{g_2}\pi^{0*}_{g_1} = \pi_{g_1}\pi^{0*}_{g_1}(\pi^0_{g_1}(\pi_{g_2}\pi^{0*}_{g_2})\pi^{0*}_{g_1})$$
$$= u_{g_1}\alpha_{g_1}(u_{g_2}) \quad (\because \alpha_g = Ad\,\pi^0_g)$$

により、u はU（A）－値のα－1－コサイクルで

$$\pi_g = u_g \pi^0_g .$$

つまり、c ; G × X $\longrightarrow$ **T** ：ボレル関数がとれて、

$$(\pi_g \xi)(x) = c(g,x)\,\xi(g\cdot x) \qquad \text{for } \xi \in L^2(X,\mu)。$$

部分環Aに同一の adjoint作用を誘導する二つの既約表現の同値性は、対応する1－コサイクルの同値性に帰着される。

<u>例1-2-5.</u> 変換群（G，X）のU－値コサイクルcの条件は

$$c(g_1g_2, x) = c(g_1, x)\,c(g_2, g_1\cdot x)$$

である。ここで、 $\mathcal{G}$ ＝G × Xの積を

$$(g_1, x)(g_2, y) = (g_1g_2, x) \quad \text{if } y = g_1\cdot x$$

で定義すると、 $\mathcal{G}$ は亜群となり、cは

$$c(\gamma_1\gamma_2) = c(\gamma_1)\,c(\gamma_2) \qquad \text{for } \gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{G}^{(2)}$$

と書き直される。また、 $r((g,x)) = g\cdot x$, $l((g,x)) = x$, $\mathcal{G}^{(0)}$ = Xと約束すると、二つのコサイクル c_1 と c_2 の同値条件：X上の

U－値関数 b が存在して、

$$c_2(g,x) = b(x)^{-1} c_1(g,x)\, b(g\cdot x)$$

は、条件： $\mathcal{G}^{(0)}$上のU－値関数 b が存在して、

$$c_2(\gamma) = b(\ell(\gamma))^{-1} c_1(\gamma)\, b(r(\gamma)) \quad , \quad \gamma \in \mathcal{G}$$

という形で記述できる。一般の亜群 $\mathcal{G}$ に対しても、この様にして１－コホモロジー群 $H^1(\mathcal{G}, U)$ が定義される。 $\mathcal{G}$ の２－コホモロジー群の定義は、形式的には上の［Ｉ］－（２）と全く同様である。

例1-2-6.（ Skew product ，変換群の拡大） 群Ｇの作用する測度空間（Ｘ，μ）、（Ｙ，ν）に対し、ＸからＹの上へのボレル写像ϕで、 $\phi(g\cdot x) = g\cdot\phi(x)$（Ｇ-equivariant）かつ $\phi_*(\mu) \cong \nu$ を満たすものが存在する時、ＸはＹのＧ－空間としての拡大といわれる。今、変換群（Ｇ，Ｙ，ν）上の局所コンパクト群Ｕに値をもつ１－コサイクル ρ（（＊）を満たす）が与えられたとする。この時、空間Ｘ＝Ｙ×Ｕへの群Ｇの作用を $g\cdot(y,u) = (y, \rho(g,y)u)$で定義しＸ上の測度$\mu$を $\nu\times\tau$（τ；ＵのHaar測度）とすると、Ｇ－空間（Ｙ，ν）の一つの拡大（Ｘ，μ）が得られる。

例1-2-7.（群拡大，Schreier;1926 ） 二つの群Ｋ，Ｎが与えられた時、１ ⟶ Ｎ ⟶ Ｇ ⟶ Ｋ ⟶ １ が exact となる群Ｇの事をＮのＫによる拡大という。今、（α，c）を群ＫのＮ－値 cocycle crossed action（定義[II]-(2)の意味）とする。この時、Ｇ＝Ｎ×Ｋの積を

$$(z_1, k_1)(z_2, k_2) = (\,z_1 \alpha_{k_1}(z_2)\, c(k_1,k_2),\ k_1 k_2\,)$$

で定めると、GはNのKによる拡大になっている。この群を G（N，K，(α, c)）と表わす。逆に、NのKによる拡大Gに対し、 section φ ; $K \longrightarrow G$を一つとると、

$$\varphi(k_1)\varphi(k_2) = c(k_1, k_2)\varphi(k_1 k_2), \qquad k_1, k_2 \in K$$

となる c ; $K \times K \longrightarrow N$ が自然に定まり、 $\alpha_k = \mathrm{Ad}\,\varphi(k)$ （$k \in K$）とおくと、（α，c）は群KのN－値 cocycle crossed actionになり、しかも最初のGはG（N，K，(α, c)）と群拡大として同型になる。GがN $\rtimes_\alpha$ K（半直積）となる必要十分条件は（α，c）; coboundary である。群Nが可換群の時は $\mathrm{Ad}\, c(k_1, k_2) = \mathrm{id}_N$ となるから、αは普通の action になる。更に、NがGの中心に含まれている時、Gは中心拡大と言われ、{NのKによる中心拡大全体}／≅ と２－コホモロジー群 $H^2(K, N)$ の元とが１対１に対応する。特に、N = $\mathbb{T}$ = {１次元トーラス} が重要であり、この場合の２－コサイクルは屡々 multiplier と呼ばれている。 $g \in G \supset N \xrightarrow{\pi}$

G→K

__例1-2-8.__（表現の拡大）　Gを局所コンパクト群（可算基を持つ）とし、Nをその正規閉部分群とする。Nの既約表現πとG ∋ g に対し、 $(g\cdot\pi)(z) = \pi(g^{-1}zg)$ とおくと $g\cdot\pi$ もNの既約表現になる。ここで、 $= \pi \circ \mathrm{Ad}\, g^{-1}(z)$

$$G \supset G(\pi) = \{ g \in G ;\ g\cdot\pi = \pi \text{ in } \hat{N} \} = G^{\pi} \supset N$$

とおく時、Nの表現πはG（π）の表現に拡大できるだろうか？ πの表現空間をHとすると、G（π）∋ g に対し、 $g\cdot\pi \cong \pi$ により、H上のユニタリー作用素 $\tilde{\pi}_g$ が存在して

$$\pi(g^{-1}zg) = \tilde{\pi}_g^{*}\pi_z\tilde{\pi}_g$$

を満たす。表現πの既約性により、$\tilde{\pi}_g$ のとりかたには、スカラー倍の任意性があるから、$\tilde{\pi}$ は、

（＊） $\tilde{\pi}_{g_1}\tilde{\pi}_{g_2}=\sigma(g_1,g_2)\tilde{\pi}_{g_1g_2}$ ， $g_1,g_2\in G$

を満たす。ここに顕われる $\sigma(g_1,g_2)$ は、自動的に群G（π）のmultiplierになり、$\tilde{\pi}_g$ の取り方の任意性は、全くσのコバウンダリーによる摂動に対応する。従って、$\tilde{\pi}_g$ がG（π）のユニタリー表現として拡大できる為の必要十分条件はσのコホモロジー類[σ]が0となる（つまり、σがコバウンダリー）事で与えられる。この類[σ]は、Mackey obstraction と呼ばれている。GがPolish 群になる（従ってHは可分となり、U（H）もPolish 群）事より、$\tilde{\pi}$ は、G$\longrightarrow$U（H）；ボレルで（＊）を満たすように選ぶ事ができる。つまり、一般には、表現πはG（π）の multiplier 表現$\tilde{\pi}$として拡大できる。

<u>例1-2-9.</u>（ Action の共役不変量 Jones,1980 ） ここでは簡単の為、Gを離散群、Mを因子環とする。Gから AutMへの群準同型をGのMへの action と言う。この時、$G\xrightarrow{\alpha}\mathrm{Aut}M$

$G\supset$ N＝｛ $h\in$G； $\alpha_h=\mathrm{Ad}\,u_h$ ，$\exists u_h\in$U（M）｝

はGの正規部分群になる。$\alpha_{h_1}\alpha_{h_2}=\alpha_{h_1h_2}$ より $\mathrm{Ad}\,u_{h_1}u_{h_2}$ ＝ $\mathrm{Ad}\,u_{h_1h_2}$ だから、M'∩M＝$\mathbb{C}$（M；因子環）より

$$u_{h_1}u_{h_2}=\mu(h_1,h_2)u_{h_1h_2}\ ,\ \mu(h_1,h_2)\in\mathbb{T}\ ,\quad h_1,h_2\in N$$

が従う。つまり、uはμを multiplier とする multiplier 表現。上記と同様に、u_h の取り方にはスカラー倍の任意性があるが、これはμ の coboundary による摂動に対応する。また、$g\in$G，$h\in$Nに対し、

$$\alpha_{ghg^{-1}}=\alpha_g\alpha_h\alpha_g^{-1}$$
$$=\alpha_g\circ\mathrm{Ad}u_h\circ\alpha_g^{-1}\,0$$
$$=\alpha_g\left(u_h(\alpha_g^{-1}0)u_h^{-1}\right)$$
$$=\alpha_g(u_h)\cdot 0\cdot\alpha_g(u_h^{-1})=\mathrm{Ad}\,\alpha_g(u_h)$$

$$\mathrm{Ad}\,u_{ghg^{-1}} = \alpha_{ghg^{-1}} = \alpha_g \alpha_h \alpha_g^{-1} = \alpha_g \,\mathrm{Ad}\,u_h \alpha_g^{-1} = \mathrm{Ad}\,\alpha_g(u_h)$$

の関係式より

$$u_{ghg^{-1}} = \lambda(g, h)\alpha_g(u_h)$$

が従う。ここでＧのＮへの作用をN∋$h \longrightarrow ghg^{-1} \in$ N,（g ∈G）と定めると、λは変換群（Ｇ，Ｎ）の１－コサイクルになる。勿論、λとμは相互に関係しているが、この対（λ，μ）に対し、各λ，μが同一の関数 η；N ⟶ T によりcoboundaryとなる時、（λ，μ）が coboundary と約束すれば、重要なある種のコホモロジー群 Λ（Ｇ，Ｎ）が定義される。この［λ，μ］∈ Λ（Ｇ，Ｎ）は action の共役不変量であるばかりでなく cocycle共役という同値関係においても不変になる。ある場合には、 action の完全な分類を与える事が示されている。

例1-2-10．局所コンパクト可換群Ｇの双対群を$\hat{G}$とし、$\mathcal{G}$＝Ｇ×$\hat{G}$とおく。今、 σ；$\mathcal{G}\times\mathcal{G}$ ⟶ T を

$$\sigma((g_1, \chi_1), (g_2, \chi_2)) = \langle \chi_1, g_2 \rangle \quad , g_1, g_2 \in G,\ \chi_1, \chi_2 \in \hat{G}$$

とおくと、σは　可換群$\mathcal{G}$の一つの典型的な multiplier を与える。従って、Heisenberg の交換関係を満たすＧと$\hat{G}$の表現は、$\mathcal{G}$ の multiplier 表現とも解釈できる。

２．Ｍｕｌｔｉｐｌｉｅｒ表現

今後、特に断わらない限り、群、環、及び空間の位相的可分性を仮定しておく。

１９２０年代後半、量子力学は Heisenberg の交換関係や Shrödingerの波動方程式を基本原理にして登場したが、その後

この両者の同等性が Stone(1930) 及び von Neumann(1931) によって示された。Mackey(1949) は、この同等性を表現論の立場から考察し次の様に一般化した。

<u>定理2-1</u> Gを局所コンパクト可換群としその双対群を$\hat{G}$とする。G及び$\hat{G}$のヒルベルト空間Hへの表現 uとvが $u: G \longrightarrow U(\mathcal{H})$ $v: \hat{G} \longrightarrow U(\mathcal{H})$

(1) $u_g v_x = \langle x, g \rangle v_x u_g$ （Heisenberg の交換関係）

(2) $u(G)$ と $v(\hat{G})$ で生成される von Neumann環がB（H）

をみたす時、$(u, v; H) \cong (u^0, v^0; H^0)$。但し、$H^0 = L^2(G) \ni \xi(g)$, $(u^0_h \xi)(g) = \xi(g-h)$, $(v^0_x \xi)(g) = \langle x, g \rangle \xi(g)$。

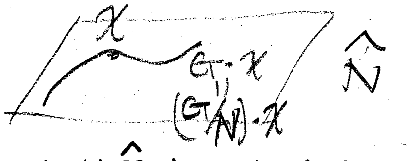
$G = \mathbb{R}^n$ の場合が本来の結果を意味するので、この定理は Stone - von Neumann の定理と呼ばれている。Mackey は、この定理を更に一般化していく事で局所コンパクト群の表現論の基礎理論ー Imprimitive定理(1950)，誘導表現の理論(1951-53)ーを創り上げた。他方、この Stone - von Neumannの定理は、巾零リー群の代表格である Heisenberg 群の既約表現の決定においても本質的に寄与するものであり、また Heisenberg の交換関係は、$\mathcal{G} = G \times \hat{G}$ の multiplier 表現であるとも思える（例1-2-10参照）点に注意しておこう。１９５７年に竹之内[T-1957]は、単連結可解リー群Gが３次の Heisenberg 群を正規閉部分群として含んでいる場合にはGの既約表現は、より次元の低い可解リー群の multiplier 表現に帰着できるという結果を提出し、リー群の multiplier 表現の重要性を訴えている。１９５８年に、Mackey[M-1958]は、multiplier表現の一般論を展開すると同時に、上の竹之内の結果を発展させた形で、

今日では little group method と呼ばれている理論を創り、以後の表現論に決定的な影響を与えている。これは次の様な定理で代表される。

<u>定理2-2.</u>（ Mackey [M-1958]） $N \triangleleft G \xrightarrow{U}$

Nを局所コンパクト群Gの正規I型閉部分群とする。Gの因子表現Uに対し、$\hat{N}$上にG－quasi-orbit[μ]と multiplicity mが存在し、

$$U|_N \cong m\int_{\hat{N}}^{\oplus} \pi^x \, d\mu(x)$$



を満たす。測度μが推移的の時、つまり、μが$\hat{N}$上のあるG－軌道$G\cdot x$に concentrate している時、$H_x = \{ h \in G ; h\cdot x = x \}$ とおくと、$N \subset H_x$ の因子表現π（$\pi|_N \cong m\cdot\pi^x$ を満たす）が存在し、$U \cong \mathrm{Ind}_{H_x}^G \pi$ となる。また、このπは次で与えられる。$[\sigma(x)] \in H^2(H_x/N, \mathbf{T})$ をNの表現π^xの Mackey obstruction（例1.2.8参照）とし、π^xのH_xへの拡大（$\sigma(x)^{-1}$－表現）を$\tilde{\pi}$とする。この時、H_x/Nの$\sigma(x)$－表現ρ（これは自然にH_xの multiplier 表現と思える）が存在して、 $\pi \cong \rho \otimes \tilde{\pi}$ となる。更に、対応 $\rho \longrightarrow \mathrm{Ind}_{H_x}^G \rho\otimes\tilde{\pi}$ は、表現の既約性や型を保つ。

つまり、Gの$\hat{N}$への作用が smooth の時は、Gの任意の因子表現は、H_x/Nの multiplier 因子表現に帰着できる事を主張している。また、原論文では、multiplier表現Uに関する命題で述べられている。

この方法は多くの具体的な群の既約表現を決定する際に基本的な役割を果している。例えば可解リー群の表現論においては

Auslander-Moore[A-M-1966], Auslander-Kostant[A-K-1971], Pukanszky[P-1971]、一般のリー群の表現論においては Duflo [D-1980]等が、multiplier表現の取り扱いに苦慮している。

可換群の multiplier そのものについては、Schur(1906)（有限可換群）、Calabi(1951), Bargmann(1954)（可換リー群）等に引き続き、Kleppnerが[K-1965]において、かなり多くの局所コンパクト可換群Gに対し、

$H^2(G, \mathbb{T}) \cong$ {G上の anti-symmetric bicharacter 全体}

が成立する事を示す等、その構造を解析している。

可換群の multiplier 表現に関しては次の通り。Pukanszky [Pk-1971] は、可解リー群の表現論を展開する中で、可換群の multiplier表現に言及している。Baggett-Kleppner[B-K-1973] は Stone-von Neumannの定理（定理２－１）を一般化する形で、次の様に、可換群GのＩ型 multiplier 表現論を展開している。σをGの一つの multiplier とする。この時、$\sigma^{(2)}(g_1, g_2) = \sigma(g_1, g_2) \times \sigma(g_2, g_1)^{-1}$はGの bicharacter で、$\langle h_\sigma(g_1), g_2 \rangle = \sigma^{(2)}(g_1, g_2)$ を満たすGから$\hat{G}$への連続準同型 h_σ が定まる。ここで、$S_\sigma = \{h \in G ; \sigma(h, g) = \sigma(g, h) \text{ for } \forall g \in G\} = \mathrm{Ker}\, h_\sigma$ とおくと、$S_\sigma = \{0\}$ の時、σ は totally skew と呼ばれる。この場合は、σ がＩ型である必要十分条件は h_σ が同相写像であり、かつこの時既約 σ－表現の同値類は、唯一つとなる。一般には、σ がＩ型 $\Longleftrightarrow$ h_σ が開写像，$(G, \sigma)^{\wedge} \cong \hat{S}_\sigma$ が成立。Backhouse [B-B-1972, Bck-1973] 達も同様の考察をしている。更に、Kleppnerは、[K-1975]において、非Ｉ型 multiplier 表現につ

いて、次の様に論じている。Prim$C^*(G, \sigma)$は$\hat{S}_\sigma$で（連続的に）parametrizeされる。σがtotally skewの時は、$C^*(G, \sigma)$は、単純でしかもunique traceを持ち、Gのtraciable因子σ－表現の擬同値類は唯一つである。Greenは、[G-1978]において、twisted covariance algebraの研究の中で、上の二つの結果[B-K-1973],[K-1975]に対する新しい簡単な証明や補充を与えている。Mitchell[Mt-1984]は、$\mathbb{Z}^2$の非I型multiplier正則表現の既約分解の多様性を論じている。multiplier表現に関するPlancherel公式についてはKleppnerとLipsmanが[K-L-1972,73]において考察している。

可解リー群Gに関するAuslander-Kostant理論をMoscovici-Verona [Ms-v-1978]は、multiplier表現について展開し興味ある結果を得ている。また、Sund [Sd-1978]は指数型リー群のmultiplier表現について考察してる。

Holzher[Hlz-1981,85]は、Robertson(1967), Kaniuth(1971), Taylor(1976)等の有限次元表現を持つ群に関する結果をmultiplier表現について考察している。ここでは、局所コンパクト群Gのmultiplier σに対し、G^σ（Gのσ－中心拡大）の正則表現の自然な分解とGのσ^n（$n \in \mathbb{Z}$）－表現との関係を土台にGのσ－正則表現が有限次元部分表現を持つ為の必要十分条件を群Gの構造に関する性質で与えている。類似の結果は、離散群Gに対し、Kleppner[k-1983]によっても、独立に与えられている。

亜群のmultiplier表現については、Ramsay[1976]がMackey

1-cocycle ⟷ キヤク表現

理論を一般化し、本格的な measured 亜群の表現論を展開している。また、Hahn[H-1978]は、principal ergodic 亜群の multiplier表現の型の判定等を含むより詳しい結果を得ている。最近では、山上[Y-1985]が、principal とは限らない ergodic 亜群の multiplier 表現の因子分解について、言及している。

３．表現論と１－コサイクル．

例1-2-3 からわかる様に、変換群（G $\overset{\alpha}{\curvearrowright}$ X，μ）上のＵ（Ｈ）－値の１－コサイクルは、群Ｇのユニタリー表現を定める。逆に、例1-2-4 から予想されるように、群Ｇのすべての既約表現は、この形で得られる（ある１－コサイクルから誘導される）という思想に基いて、Mackey は、「virtual subgroupとその homomorphism」[M-1963,66] の考えを提出した。同じ頃 Moore は、低次コホモロジー論の本格的研究[Mo-1964] を表現論を念頭において開始し[A-Mo-1966]、その後更に、Westman[Wst-1969] や Moore自身[Mo-1976] の手により開拓発展されている。他方、Ramsay [R-1971,76] は、亜群の表現論を Mackey の表現論の analogy の形で展開した。例1-2-5 が指摘するように、変換群の１－コサイクルは亜群の準同型（表現）として把握される点を注意しておく。その後、亜群の表現論は、Hahn [H-1978]，Connes [C-1979] 等により、また、亜群 C^*－環の表現論は、Renault [Rn-1980] 等により、発展整備されている。他方、Zimmer [Z-1975,76] は変換群の拡大理論を展開してゆく中で、１－コサイクルの誘導表現や分解の理論を主要な武器としてい

る。特に、ある種の変換群の拡大は例1-2-6 のような形で与えられるという構造定理やその一意性定理の議論においては、1ーコサイクルの表現論は欠かせないものとなっている。また、同じ頃 Westmann [Wst-1976], Series [Sr-1977] 等もエルゴード理論とも関連させて、1ーコサイクルについて研究している。 Zimmer も含め彼らは、1ーコサイクルの値域に強い関心を寄せている。というのも、この概念は、ある時は変換群の分類[H-O-O-1974]、またある場合は III型因子環の分類[C-1973]に本質的な役割を果しているという背景からも当然であろう。

1ーコホモロジー群そのものについては、上述の Moore, Westman 以外に Schmidt [Sch-1974,76] が具体的に（特に $\mathbb{Z}$ ーaction の場合）詳しく調べている。また、ある可換群Gの dense な部分群K（K≠G）は、translation を action とする non-smooth な変換群（K，G）を引き起こす。このケースの1ーコホモロジー群については、Helson[Hls-1965,69,72], Gamelin[Gml-1961] の流れに乗って、Bagchi-Mathew-Nadkarni [B-M-N-1974]等が、explicite な定式化を試みている。同じ流れの中で、Ismagilov[I-1969] は、位数 n の極をもつある複素関数とn次元既約1ーコサイクルとをある変換（フーリエ変換のようなもの）によって対応付けている点は興味深い。他方、Brown[Brw-1973] は、「連結巾零リー群のすべての既約表現は monomial」という Kirillov 理論の結果を、有限生成の離散巾零群に対し考察し、その中で non-monomial 既約表現の存在をある1ーコサイクルを explicite に与える事で示している。

また、[Kw-1982] においては、非I型因子表現の既約分解の多様性が弱（射影的）1－コホモロジー群 $\tilde{H}^1(G, X, \mathbb{T}) = H^1(G, X, \mathbb{T}) / \hat{G}$ （Gはある可換群）をパラメーターにして得られる事を示している。無理数回転の action については、[Kw-1981] では、$\tilde{H}^1 \supset \mathbb{Q}$ （パラメーター1/2 に対応するコサイクルが上の Brown の与えた例）である事を、また、[Kw-Kj-1983] においては、$\tilde{H}^1$ が非可算無限である事を示しているが、Merrill[Mr-1984] は、連分数展開の理論を駆使して、$\tilde{H}^1 \supset \mathbb{R}$ を具体的なパラメーターの下で得た。Mackey 理論に従えば、これらは Mautner群や離散 Heisenberg 群の既約表現を expliciteに与える事に対応する[Kw-1982,Kw-Kj-1982, B-M-1984,B-M-R-1984]。上述の非I型表現の既約分解の多様性は、Zimmer流の1－コサイクルの誘導表現の分解理論と1－コホモロジー群の消滅定理とを結合させると見通しが良くなるし、視点を変えれば極大可換部分環の分類[Kw-1983] とも対応する点に注意しておく。

1－コホモロジー群に関する基本的な性質に次の様なものがある。

<u>性質3-1.</u>自由作用の位相変換群（G，X）において、

[1]（消滅性）任意の Polish 群Aに対し、$H^1(G, X, A) = \{0\}$ となる必要十分条件は変換群（G，X）が smooth 。

[2] 群Gが従順で（G，X）が non-smooth の時、推移的でない任意のG－quasi-orbit $[\mu]$ と任意の Polish 可換群A（$\neq \{0\}$）に対し、常に、$H^1(G, X, [\mu], A) \neq \{0\}$。

これらは、亜群の立場からは次の様に拡張されている。

性質3-2. principalボレル亜群Rに対し、

［1］［F-Mo-1977］RがI型（つまり smooth ）である必要十分条件は任意の Polish 可換群Aに対し$H^1(R, A) = \{0\}$。

［2］［Mo-S-1980］Rが非I型有限近似的エルゴード亜群の時は任意の Polish 可換群A（$\neq \{0\}$）に対し、$H^1(R, A) \neq \{0\}$。

4．Actionとコホモロジー群

4－1．twisted 接合積

multiplier で捻りを入れて定義されるtwisted 接合積についての本格的な記述は Zeller-Meier [Z-M-1968] に始まると思われる。その後、Busby-Smith [B-S-1970] は Banach*－環の twisted接合積の表現論を Mackey の理論と$L^1(G)$の表現論を念頭におき、 Zeller-Meier の結果を拡張させる方向で研究している。 Green [G-1978] は、twisted C^*－接合積をもっと一般化した twisted共変環を研究対象にし、この環の表現論を Mackey や Riefell の誘導表現の理論を踏まえて展開し、重要な多くの結果を得ている。その他、双対性と関連する話題としては、Quigg[Q-1983]，Brabanter[Brb-1983] 等の仕事がある。

他方、von Neumann 環の twisted 接合積は、環の同型性や自己同型写像の解析に端を発している。 Connes[C-1975] の与えた自分自身と anti-同型でない因子環の例においては、mult iplier が本質的な役割を演じている。これらに刺激を受けて Sutherland[S-1980]は、局所コンパクト群による von Neumann 環の twisted 接合積の一般論を展開している。詳細は上記引用文献に譲る。

４－２． action の分類

例1-2-9 で見たように、群Ｇの因子環Ｍへの action の同値類の不変量としてある種のコホモロジーが顔を出す。 action の同値類として単なる共役類を考えるのは、色々と強すぎる為、意味のある自然な同値関係として、「コサイクル共役」（別名「外部的共役」）をまず action 達の中で考える。これは、ある１－コサイクルで摂動させた action と共役になるという事で定義される。また、互いにコサイクル共役な二つの action に対応する von Neumann接合積は互いに同型となっている点に注意しておく。以上の発想は、 Connes の一連の仕事[C-1975, 77] が原点になっている。ハイパー II_1型因子環をＲで表わすと、ここでは、Ｒの外部的自己同型の外部的共役類（つまりＲへの可換群 $\mathbb{Z}$ の自由 action のコサイクル共役類）が唯一つである事と、この事実を基にしてすべての自己同型の外部的共役類をある種の不変量を用いて完全に決定した。その後、Jones[J-1980] は有限群ＧのＲへの action の分類問題を考察する中で、上の Connes の仕事を発展させると伴に諸概念を明確にした。つまり、有限群ＧのＲへの action のコサイクル共役（安定共役）類は、Ｇの正規部分群Ｎとコホモロジー群 Λ（Ｇ，Ｎ）の

元 [λ, μ] (例1-2-9 参照) により完全に決定される事を証明した。更に、Ocneanu [Oc-1985] は、離散従順群に対しても同様の事実が成立する事を示したが、この中で、1-, 2-コホモロジー群の消滅性(後述)が一つの鍵になっている事を指摘している。以上の結果を踏まえて、Jones-Takesaki[J-T-1982] は、「G;コンパクト可換群, M=R」または「G;離散可換群, M;単射的 von Neumann環」の状況の下で、更に、Sutherland-Takesaki [S-T-1984] においては、「G;離散従順群, M;単射的 von Neumann環」または「G;従順亜群, M;単射的因子環」の状況の下で action の分類問題を研究し、コホモロジーと関係する不変量でもってコサイクル共役類を決定している。この理論の中では、「コホモロジー補題」と呼ばれる命題(後述)を実にうまく使っている点が光を放っている。

4-3. コホモロジー群の消滅性とコホモロジー補題

Ocneanu は [Oc-1985] の中で、コホモロジー群の消滅性の重要性を指摘しており、彼自身の議論の中で本質的役割を果たしている。この背景には、Rohlin の定理や従順群の paving 構造定理及び測度空間への従順 action の2-コホモロジー群の消滅定理等がある。さて、今Gを離散従順群、Mを von Neumann環とする。両者伴可分性は仮定しておく。

<u>コホモロジー群の消滅定理</u>([Oc-1985])

(α, c) をGのMへの centrally free cocycle crossed action (1-1-[11]を参照)で $\alpha|Z(M)$ は $\phi|Z(M)$ ($\phi \in M_*^+$

$G \overset{(\alpha,c)}{\curvearrowright} M \supset Z(M)$

；忠実）を保つとする。この時、c は α－coboundaryとなる。つまり、$H^2_\alpha(G, U(M)) = \{0\}$。

この命題を示す準備として、次の様なコホモロジー群の近似的消滅性をまず証明している。ultra-filter ω に対して、Mの中心化環を M_ω とすると、Gの M_ω への「良い（強くfree）」action α に対し、$H^1_\alpha(G, U(M_\omega)) = \{0\}$ かつ $H^2_\alpha(G, U(M_\omega)) = \{0\}$。一般に、値となる群Uが土台となる群Gに比して相対的に大きくなれば、そのコホモロジー群は消滅し易い事はその定義から予想される。上の場合は、Gに比べ $U(M_\omega)$ は十分に大きい。逆に、Gが有限群（十分に小さい）の時は、自由 action α に対し $H^1(G, U(M)) = \{0\}$。この視点に立って、Jones の仕事[J-1980]を反省してみると、理論の見通しも良くなり、action の「共役類」まで決定できる理由がこの1－コホモロジー群の消滅性に因る事が判明する。

次に、コホモロジー補題について説明する。1－コサイクルの値域の重要性は多くの人々によって指摘されているが（たとえば、[A-W-1968],[Kr-1968,70],[C-1973],[Z-1976],[F-H-M-1978]）この補題は、値域の取り替え可能性に関する極めて有用な命題で、[J-T-1982],[S-T-1984] の議論の中では、一つの鍵になっている。ここでは、Connes, Krieger 等の結果を少し拡張した Sutherland の結果（の概略）を述べる。

<u>コホモロジー補題</u>（Connes-Krieger-Sutherland [S-1985]）

Gをハイパー型測度亜群、Uを Polish 群とし、VをUの正

規ボレル部分群とする。$\rho_1, \rho_2 \in Z^1(G, U)$ が $\rho_1 = \rho_2 \mod \overline{V}$ の時、$\overline{V}$－値１－coboundary で ρ_1 を摂動させる事で、$\tilde{\rho}_1 = \rho_2 \mod V$ とできる。

５．エルゴード理論と von Neumann環

群Ｇの測度空間（Ｘ，μ）への action に関するエルゴード理論は、群Ｇの von Neumann環への action に関する非可換エルゴード理論へと拡張される可能性を内に備えており、実際、von Neumann による作用素環論の創始以来両者は密接に刺激し合って発展して来ている。近年、これらの理論も発展整備されてきたが、この中でもコホモロジーは重要な役割を演じている。特に Dye の軌道同型に関する結果は、作用素環論における構造解析の発展の礎となり Krieger, Connes, Feldmann, Weiss, Moore 等により、拡張整理されている。ここでは、変換群の軌道同型は測度亜群の同型として把握される。この立場に立って、これらの理論の森をしばらく散策してみよう。

Ｒを測度の付随した同値関係から定まる測度亜群とし、以下単に亜群と呼ぶ。standard 測度空間（Ｘ，μ）に局所コンパクト群Ｇが作用している（以下単に変換群（Ｇ，Ｘ，μ）と呼ぶ）時には、

$R_G = R(G, X) = \{(x, y) \in X \times X \ ; \ y = g \cdot x, \ g \in G\}$

とおくと、Ｇの Haar 測度とＸ上のＧ－擬不変測度に付随して、自然な亜群を得る。この時、二つの変換群（G_1，X_1，μ_1）と（G_2，X_2，μ_2）が軌道同型である必要十分条件は、Ｒ（G_1，X_1）

と $R(G_2, X_2)$ が同型（以下単に $R_{G_1} \cong R_{G_2}$ 等と表わす）という形で与えられる。また、自明な亜群 I として、$I = I_0 \times I_0$, $I_0 =$ ([0,1]，ルベーグ測度）も定義され、$R \times I$ 等の亜群としての直積も考えられる。今、二つの亜群 R_1 と R_2 が、$R_1 \times I \cong R_2 \times I$ の時、R_1 と R_2 は安定同型（$R_1 \sim R_2$ と書く）であると言われる。

亜群 R の一般的構造に関しては次の事が知られている。

<u>定理 5-1</u>（ Feldman-Moore [F-M-1977] ）

R を離散亜群とすると、$X (= R^{(0)})$ に作用する離散群 G がとれて、$R \cong R_G$ 。（群 G の取り方には随分任意性がある。G－作用がいつ自由作用として可能かいう問題は未解決。）

<u>定理 5-2</u>（ Ramsay [R-1980]）

任意の亜群はある離散亜群と安定同型である。（いかなる状況の下で、「安定同型 $\Rightarrow$ 同型」が導かれるかは、一つの基本的問題として今も研究されている。）

亜群 R と Polish 群 U に対し、例 1-2-5 の拡張として、n 次コホモロジー（群）$H^n(R, U)$ が定義され、これらについては、Westmann[W-1971], Feldman-Moore[F-M-1977], Series[Sr-1980] 等によって調べられている。ここで、変換群 (G, X, μ) に対しては、$U(X, U) =$ {X 上の U－値可測関数全体} /（μ－測度＝0）とおくと、G の作用が自由の時、

<u>注意 5-3</u> $H^n(G, U(X, U)) \cong H^n(R(G, X), U)$

の関係が成立している。また、一般に、$H^n(R, U) \cong H^n(R \times I, U)$ が成立する事より、

注意 5-4　H^n（R、U）は亜群Rの安定同型に関して不変。という性質は重要である。

さて、作用素環論における III型環の構造解析に一役買った近似的比集合（[A-W-1968]，[Kr-1968-70]）の概念や古典エルゴード理論における Poincare flow の概念も、この亜群R上に自然に拡張され重要な役割を担っている。今、ρ をR上のU－値1－コサイクル（$\rho \in Z^1$（R，U）つまり ρ；R $\longrightarrow$ U：準同型）とすると、前者はRとUの ρ による skew 積（例1-2-6 参照）のエルゴード分解に現われる基空間へのU－作用（U＝Rの場合が代表的）として、後者は、ρ の値域に関するある漸近的集合として定義される。両者伴、二つの（R_1，ρ_1），（R_2，ρ_2）に対し、（R_1，ρ_1）$\simeq$（R_2，ρ_2）（つまり、$R_1 \sim R_2$ の安定同型が $\rho_1 \cong \rho_2$ を与えている）の関係の下で不変になっている点が重要である。

ここで、U＝U（H）（Hはヒルベルト空間）にとると、$\rho \in Z^1$（R，U）はRの一つの表現を与える。また、Z^2（R，$\mathbf{T}$）$\ni \sigma$ に対し、Rの σ－表現も群の場合と同様に定義される。つまり、ρ は、ρ；R $\longrightarrow$ U（H）；ボレルで

$$\rho(\gamma_1)\rho(\gamma_2) = \sigma(\gamma_1, \gamma_2)\rho(\gamma_1, \gamma_2) \quad ((\gamma_1, \gamma_2) \in R^{(2)}) 。$$

σ－表現 ρ から定まる enveloping von Neumann 環をM（ρ，σ）と表わす。この時、（R_1，ρ_1）$\simeq$（R_2，ρ_2）ならばM（ρ_1，σ）$\otimes$B（L^2（I））$\cong$ M（ρ_2，σ）$\otimes$ B（L^2（I））つまり M（ρ_1，σ）とM（ρ_2，σ）は von Neumann環として安定同型になっている。

さて、σ－表現　としてRのσ－正則表現ρをとると、Rとσに付随した von Neumann環M（R，σ）（＝M（ρ，σ））とその可換部分環A（R，σ）が自然に定まる。亜群Rが変換群（G，X，μ）から得られる時は、M（R，σ）$\cong L^{\infty}(X,\mu) \rtimes^{\sigma} G$，A（R，$\sigma$）$\cong L^{\infty}(X,\mu)$となっている。また、$\theta \in Z^1(R,\mathbf{T})$に対しては$\alpha_\theta | A(R,\sigma) = id_A$　を満たす　M（R，σ）の自己同型α_θ　も自然に定義される。実はこの逆が成立している。その本質は例1-5-7 の発想と同じ。

<u>定理　5-5</u>（[F-M-1977],[C-T-1977]）

$\alpha | A(R,\sigma) = id_A$　を満たす任意の$\alpha \in \mathrm{Aut}M(R,\sigma)$に対し、$\theta \in Z^1(R,\mathbf{T})$が存在し、$\alpha = \alpha_\theta$　。更に、

$$\alpha_\theta \in \mathrm{Int}M(R,\sigma) \Longleftrightarrow \theta \in B^1(R,\mathbf{T})。$$

他方、A（R，σ）はM（R，σ）の Cartan 部分環となるが、実はこの逆も成立している。

<u>定理　5-6</u>（[F-M-1977]）

Aを von Neumann環Mの Cartan 部分環とすると、離散亜群Rと　$\sigma \in Z^2(R,\mathbf{T})$が存在し、（M，A）$\cong$（M（R，$\sigma$），A（R，$\sigma$））。しかも、$[\sigma] \in H^2(R,\mathbf{T})$は unique に定まる。

<u>注意　5-7</u>　ここで、$H^2(R,\mathbf{T}) = 0$のケースでは、 Cartan 部分環（の共役類）はMの中で unique である事が直ちに分かる。

次に環や亜群の従順性(amenability)、ＡＦ性(approximate finiteness)の話題を取り上げる。von Neumann 環Mが有限次元部分環の増加列の和の閉包として得られる時、MはＡＦ環と

呼ばれ、昔から重要な研究対象とされている。Zimmer は [Z-1977,78]において、群Gの従順性の概念を変換群（G，X）における作用の従順性の概念に拡張し、更に亜群Rの従順性という概念をその自然な拡張として定義し、次の結果を示した。

定理 5-8（[Z-1977]）

亜群Rが従順である必要十分条件はM（R）がAF環。

また、type I（つまり smooth ）亜群達の帰納極限として定義される亜群はAF亜群と呼ばれるが、

定理 5-9（ Connes-Feldman-Weiss[C-F-W-1980] ）

R；AF亜群 $\Longleftrightarrow$ R；従順亜群 $\Longleftrightarrow$ M（R）；AF環。

Dye の軌道同型に関する構造定理（[D-1959,63]）：離散群Gが測度μを不変にしながら空間Xに作用する時、空間Xに群$\mathbb{Z}$の作用が存在し、R（G，X）＝R（$\mathbb{Z}$，X）を満たす：の自然な拡張と亜群の構造に関する定理（定理 5-1,5-2）を考慮に入れると次を得る。

定理5-10　RをAF亜群とすると、X（＝$R^{(0)}$）への群$\mathbb{Z}$の自由作用が存在し、R～R（$\mathbb{Z}$，X）。

従って、注意5-3,5-4 により、H^n（R，U）$\cong H^n$（R（$\mathbb{Z}$，X），U）$\cong H^n$（$\mathbb{Z}$，U（X，U））となり、これは $n \geqq 2$ の時消滅する。特に、H^2（R，$\mathbb{T}$）＝0。故に、定理5-6 と注意5-7 により、AF環の Cartan 部分環の一意性がこのコホモロジー的性質から直ちに判明する。

最後に亜群Rの性質Tに関して触れておく。1967年 Kazhdan は群の従順性と相反する概念として、性質Tという概念を定め

た。その後、この概念は、変換群や亜群及び von Neumann環へと多くの人達（Zimmer[Z-1981], Schmidt[Sch-1980], Connes-Weiss[C-W-1980]）によって拡張されて研究されている。このうち、コホモロジーについての性質としては、次の事が示されている。

定理5-11（[Z-1981],[Sch-1980]）

性質Tをもつエルゴード亜群Rに対し

(1) $B^1(R, \mathbb{T})$ は $Z^1(R, \mathbb{T})$ の中で開部分群。従って、$H^1(R, \mathbb{T})$ は可算離散群。

(2) Uが（非自明）コンパクト部分群をもたない従順群の時、$H^1(R, U) = 0$。特に、$H^1(R, \mathbb{R}) = 0$。

例えば、性質Tをもつ因子環Mとその Cartan 部分環Aに対しては、定理5-5,5-6より「$\mathrm{Out}(M, A) \cong H^1(R, \mathbb{T})$；位相群として可算離散群」等が直ちに分かる。

References

[A-W] Araki,H & Wood,E.J.
1968: A classification of factors,Publ.RIMS,Kyoto Univ.,3,51-130.
[A-M] Auslander,L. & Moore,C.
1966: Unitary representations of solvable Lie groups, Memo.AMS,62.
[A-K] Auslander,L. & Kostant,B.
1971: Polarization and unitary representations of solvable Lie groups, Inv.Math.,14,255-354.
[Bck-B] Backhouse,N.B. & Bradley,C.J.
1972: Projective representations of abelian groups, Proc.AMS,36, 260-266.
[Bck] Backhouse,N.B.
1973: On the form of the finite-dimensional projective representations of an infinite abelian group, Proc.AMS,41,294-298.
[B-K] Baggett,L. & Kleppner,A.
1973: Multiplier representations of abelian groups, J.Functional Analysis,14,299-324.
[B] Baggett,L.
1976: Multiplier extensions other than the Mackey extension, Proc. AMS,56,351-356.
1978: Representations of the Mautner group I, Pacific J.Math.,77, 7--22.
[B-M-R] Baggett,L. & Mitchell,W.E. & Ramsay A.
1984: Representations of the discrete Heisenberg group and cocycles of an irrational rotation, Michigan Math.J.,31,263-273.
[B-M] Baggett,L. & Merrill,K.
1984: Representations of the Mautner group II, preprint.
[B-M-N] Bagchi,B.C. & Mathew,J. & Nadkarni.
1974: On systems of imprimitivity on locally compact abelian groups with dense actions, Acta Math.,133,287-304.
[Brb] Brabanter,M.
1983: Decomposition theorems for certain C*-crossed products,Math. Proc.Camb.Soc.,94,265-275.
[Brw] Brown,I.D.
1973: Representation of finitely generated nilpotent groups, Pacific J.Math.,45,13-26.

[B-S] Busby,R.C. & Smith,H.A.
1970: Representations of twisted group algebras, Trans.AMS,149,503-537.
[C] Connes,A.
1973: Une classification des facteurs de type III, Ann.Sci.Ec. Norm.Sup.4me ser.t.6,fasc.2,133-252.
1975: A factor not anti-isomorphic to itself, Ann.Math.,101,536-554.
1975: Outer conjugacy classes of automorphisms of factors, Ann. Sci.Ec.Norm.Sup.4me ser.t.8, 383-420.
1976: Classification of injective factors, Cases $II_1, II_\infty, III_\lambda, \lambda=1$, Ann.Math.,104,73-115.
1976: On the classification of von Neumann algebras and their automorphisms, Symposia Math.,XX,435-478.
1977: Periodic automorphisms of the hyperfinite factor of type II_1, Acta Sci.Math.,39,39-66.
1979: Sure theorie noncommutative de l'integration, Lec.Notes in Math.,Springer-Verlag,725,19-143.
[C-T] Connes,A. & Takesaki,M.
1977: The flow of weights on factors of type III, Tohôku Math.J., 29,473-575.
[C-F-W] Connes,A. & Feldman,J. & Weiss,B.
1981: An amenable equivalence relation is generated by a single transformation, Ergodic Theory Dyn.Sys.,1,431-450.
[D] Duflo,M.
1980: Construction de représentations unitaires d'un groupe de Lie, Preprint.
[Dy] Dye,H.A.
1959: On groups of measure preserving transformations I,Amer.J. Math.,81,119-159.
1963: ______________ II,__________ ,85,551-576.
[F-M] Feldman,J. & Moore,C.C.
1977: Ergodic equivalence relations, cohomology, and von Neumann algebras,I;II, Trans.AMS,234,289-324;325-359.
[F-H-M] Feldman,J. & Hahn,P. & Moore,C.C.
1978: Orbit structure and countable sections for actions of continuous groups, Adv. in Math.,28,186-230.
[Frs] Furstenberg,H.

1980: Rigidity and cocycles for ergodic actions of semisimple groups, Sem.Bourbaki,No.559.

[Gml] Gamelin,T.W.

1967: Remarks on compact groups with ordered duals, Rev.U.Math. Arg.,23,97-108.

[G] Green,P.

1978: The local structure of twisted covariance algebras, Acta Math.,140,191-250.

[H] Hahn,P.

1978: The regular representations of measure groupoids, Trans.AMS, 242,35-72.

[H-O-O] Hamachi,T. & Oka,Y. & Osikawa,M.

1974: A classification of ergodic non-singular transformation groups, Mem.Fac.Science, Kyusyu Univ., 28, 113-133.

[Hlz] Holzher,A.K.

1981: Discrete-groups whose multiplier representations are type I, J.Austral.Math.Soc., 31, 486-496.

1985: Groups with finite-dimensional irreducible multiplier representations, Can.J.Math., 37, 635-643.

[Hls] Helson,H.

1965: Compact groups with ordered duals I, Proc.London Math.Soc., 14A, 144-156.

1969: ______________________ II, J.London Math.Soc., 1, 237-242.

1972: ______________________ III, _______________ 4, 573-575.

[Hls-K] Helson,H. & Kahane,J-P.

1972: Structure of Blaschke cocycles, Studia Math., 44, 493-500.

[I] Ismagilov,R.S.

1969: On irreducible cycles, related to a dynamic system, Functional Anal.Appl., 3, 249-251.

[J] Jones,V.F.R.

1980: Actions of finite groups on the hyperfinite type II_1 factor, Memo.AMS.,237.

[J-T] Jones,V.F.R. & Takesaki,M.

1982: Actions of compact abelian groups on semifinite injective factors, preprint.

[Kw] Kawakami,S.

1981: Irreducible representations of non-regular semi-direct product groups, Math.Japon.,26,No.6(1981),667-693.

1982: On decompositions of some factor representations, Math. Japon.,27, 521-534.
1982: Representations of the discrete Heisenberg group, Math. Japon.,27, 551-564.
1983: On the weak cohomology groups and the diversity of MASA's in the hyperfinite type II factor; Abstracts of 3th U.S.A.-Japan seminar "Geometric Method in Operator Algebras" .
1984: A remark of decompositions of the regular representations of semi-direct product groups; J.Math.Soc.Japan,36,No.1(1984), 121-130.
[Kw-Kj] Kawakami,S. & Kajiwara,T.
1982: Representations of certain non-type I C*-crossed products; Math.Japon.,27 675-699.
1983: Weak cohomology and the diverse possibility of decompositions of representations; Math.Japon.,28,181-186.
[K] Kleppner,A.
1962: The structure of some induced representations, Duke Math.J., 29, 555-572.
1965: Multipliers on abelian groups, Math.Ann., 158, 11-34.
1975: Non type I multiplier representations of abelian groups, Technical Report,Univ.Maryland, 1975.
1983: Multiplier representations of discrete groups, Proc.AMS, 88, 371-375.
[K-L] Kleppner,A. & Lipsman,R.L.
1972: The Plancherel formula for group extensions,I, Ann.sci.Ec. Norm.Sup., t.5, 459-516.
1973: ________________ ,II, ________ , t.6, 103-132.
[Kr] Krieger,W.
1969: On non-singular transformations of a measure space I;II, Z.Wahr. und Ver.W.Gebiete, 83-97; 98-119.
1970: On constructing non-*isomorphic hyperfinite factors of type III, J.Func.Anal.,6, 97-109.
1970: On the Araki-Woods ratio set and non-singular transformations, Springer Lecture Notes in Math., 160, 158-177.
1971: On a class of hyperfinite factors that arise from null-recurrent Markov chains, J.Func.Anal., 7, 27-42.
1976: On ergodic flows and isomorphism of factors, Math.Ann., 223, 19-70.

[M] Mackey,G.W.
1958: Unitary representations of group extensions I, Acta Math., 99, 265-311.
1963: Infinite dimensional group representations, Bull.AMS, 69, 628-686.
1966: Ergodic theory and virtual groups, Math.Ann., 166, 187-207.
1978: Unitary group representations in Physics, Probability, and number theory, Benjamin/Cummings,Reading Mass.
[Mr] Merrill,K.D.
1984: Cohomology of step functions under irrational rotations, Preprint.
[Mt] Mitchell,E.
1984: The σ-regular representation of $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, Michigan Math.J., 31, 259-262.
[Mo] Moore,C.C.
1964: Extensions and low dimensional cohomology theory of locally compact groups, I; II, Trans.AMS, 113, 40-63; 64-86.
1976: Group extensions and cohomology for locally compact groups, III; IV, Trans.AMS, 22, 1-34; 35-58.
1982: Ergodic theory and von Neumann algebras, Proc.Symp.Pure Math.AMS, 38, 179-226.
[Mo-S] Moore,C.C. & Schmidt,K.
1980: Coboundaries and homomorphisms for non-singular actions and a problem of H.Helson, Proc.London Math.Soc., 40, 443-475.
[Ms-V] Moscovici,H. & Verona,A.
1978: Cocycle representations of solvable Lie groups, Math.Z., 160, 183-194.
[Oc] Ocneanu,A.
1985: Actions of discrete amenable groups on von Neumann algebras, Springer Lecture Notes, 1138.
[O-P-T] Olsen,D. & Pedersen,G.K. & Takesaki,M.
1980: Ergodic actions of compact abelian groups,J.Operator Theory, 3, 237-269.
[P] Packer,J.
1982: On the normalizer of certain subgroups of group-measure factors, Bull.AMS, 7, 397-401.
1982: Von Neumann algebras associated to ergodic actions of countable groups, thesis.

1983: On the embedding of subalgebras corresponding to quotient actions in group-measure factors, Preprint.
1983: Point spectrum of ergodic abelian group actions and the corresponding group-measure factors, Preprint.
[Pk] Pukanszky,L.
1971: Unitary representations of solvable Lie groups, Ann.Sci.Ec. Norm.Sup., t.4, 457-608.
[Q] Quigg,J.C.
1983: Two applications of reduced twisted C*-crossed product duality, Preprint.
[R] Ramsay,A.
1971: Virtual groups and group actions, Adv. in Math., 6, 253-322.
1976: Nontransitive quasiorbits in Mackey analysis of group extensions, Acta Math., 137, 17-48.
1980: Subobjects of virtual groups, Pacific J.Math., 87, 389-454.
1980: Constructing topologies on measured groupoids, Preprint.
[Rn] Renault,J.
1980: A groupoid aproach to C*-algebras, Springer Lec.Notes, 793.
[Sch] Schmidt,K.
1974: Cohomology and skew products of ergodic transformations, Warwick.
1976: Lectures on cocycles of ergodic transformation groups.
1977: Infinite invariant measures on the circle,Symp.Math(Academic Press, London),XXI,37-43.
1980: Amenability, Kazhdan's property T, strong ergodicity and invariant means for ergodic group actions, Preprint.
[Sr] Series,C.
1977: Ergodic actions of product groups, Pacific J.Math., 70, 519-547.
[Sd] Sund,T.
1978: Multiplier representations of exponential Lie groups.
[S] Sutherland,C.E.
1980: Cohomology and extensions of von Neumann algebras, I; II, Publ.RIMS,Kyoto Univ., 16, 105-133; 135-174.
1983: On a construction of unitary cocycles and the representation theory of amenable groups, Ergod.Th. & Dyn.Sys., 3, 129-135.
1985: A Borel parametrization of Polish groups, Preprint.

[S-T] Sutherland,C.E. & Takesaki,M.
1984: Actions of discrete amenable groups and groupoids on von Neumann algebras, Preprint.
[T] Takenouchi,O.
1957: Families of unitary operators defined on groups, Math.J. Okayama Univ., 6, 171-179.
[W] Wassermann,A.
1981: Automorphic actions of compact groups on operator algebras, Thesis, Univ. of Pennsylvania.
[Wst] Westman,J.J.
1969: Cohomology for ergodic groupoids, Trans.AMS, 146, 465-471.
1976: Virtual group homomorphisms with dense range, Illinois J. Math., 20, 41-47.
[Y] Yamagami,S.
1985: On factor decomposition of an ergodic groupoid, Preprint.
[Z] Zimmer,R.J.
1975: Extensions of ergodic actions and generalized discrete spectrum, Bull.AMS, 81, 633-636.
1976: Extensions of ergodic group actions, Illinois J.Math., 20, 373-409.
1976: Ergodic actions with generalized spectrum, Illinois J.Math., 20, 555-588.
1977: Hyperfinite factors and amenable ergodic actions, Invent. Math., 41, 23-31.
1978: Amenable ergodic actions and an application to Poisson Boundaries of random walks, J.Funct.Anal., 27, 350-372.
1981: On the cohomology of ergodic actions of semisimple Lie groups and discrete subgroups, Amer.J.Math., 103. 937-950.
1982: Ergodic theory, group representations and rigidity, Bull. AMS, 6, 383-416.
1985: Ergodic theory and semisimple groups, Mono.Math.,Birkhaser.
[ZM] Zeller-Meier,G.
1968: Products croisés d'un C*-algebre par un groupe d'automorphismes, J.Math.Pure Appl., 47, 101-239.