数理解析研究所講究録
第 615 巻 1987 年 187-191

II_1型のhyperfinite 因子環上の可算な可換離散群の作用に関する双対定理

滋賀県立短期大学　片山　良一　(Yoshikazu Katayama)

歴史.　W^*-algebraやC^*-algebraの自己同型に関するduality theorem はおおくの人たちによって証明されてきた。 それは 下記のようなものである。

（１） G、コンパクト群、 H；局所コンパクト群、 A；C^*-algebraあるいはW^*-algebra

$$\alpha ; G \longrightarrow \mathrm{Aut}(A), \qquad \beta ; H \longrightarrow \mathrm{Aut}(A)$$

作用でＧとＨは可換とする、Ｈ；ergodic on A (C^*-algebraのときはstrongly topologically transitive) 。このとき$\theta \in \mathrm{Aut}(A)$で$\theta|_{A^G} = \iota$ 自明、θとＨは可換ならば$\alpha_g = \theta$となるgがＧに存在する。

良く似た定理に次のようなものもある（実際は同じ［２］）。

（２）αは（１）と同じ条件で、Ｈ－不変なthree point clustering property をみたＡ上の忠実な状態ϕ、すなわち

$$\phi(a\beta_h(b)c) \longrightarrow \phi(a)\phi(b)\phi(c) \qquad (*)$$

をみたす。　このとき$\theta \in \mathrm{Aut}(A)$で$\theta$とＨとは可換で$\theta|_{A^G} = \iota$とするならば、$\theta = \alpha_g$ となる$g \in G$が存在する。

これらは（＊）の性質と$\theta|_{A^G} = \iota$より$\theta \otimes \theta \otimes \cdots \otimes \theta|_{A \otimes A \otimes \cdots \otimes A^G} = \iota$（Ｇの作用は $g \longrightarrow \alpha_g \otimes \alpha_g \otimes \cdots \otimes \alpha_g$ とする）が導ける。これはある意味でθの1-trivial から自動的にcompletely trivialが導けることになる。このことはKastlerの意味でのone point functionあるいはtwo point function全体が環構造を持つことになり、Tannaka's duality theorem にもちこむ。

上記のような、duality theorem にはＧの積分を用いるのでＧのコンパクト性が必要になる、また、1-trivial からcompletely trivialを導くために、Ｇと可換なＨが必要である。ゆえに、Ｇが離散群やnon-compact 群のときはどのような形のduality theoremが成立するか？

Ｇが離散群の場合に、$\theta|_{A^G} = \iota$であるという代数的な条件の代わりにθがαに対して漸近的に不動な元の作る環上、自明であるという解析的な条件のもとで、duality theorem を完成するのが、今回の内容です。注意として、 Ｇが有限群のときは上の二つの条件は同じ条件でありまた主定理も成立するし、環を因子環でよく、ＨＦ II_1因子

環の条件はいらない。

主定理

G；加算な可換離散群　α；HF因子環　R　への　G　のouter な作用、

Rの自己同型　θ　で次を満たす

$$\lim_n \| \theta(x_n) - x_n \|_2 = 0$$

for bdd. seq. $\{x_n\} \subset R$ with $\lim_n \| \alpha_g(x_n) - x_n \|_2 = 0 \quad (g \in G)$.

但し　$\| x \|_2 = \tau(x^* x)$　　τ、ただ1つのR上のトレース。

この時、　$\theta = \alpha_g$　となる　G の元　g が見つかる。

証明を簡単にするために、G ＝ $\mathbb{Z}$（整数）とする。ゆえに　$(R, \mathbb{Z}, \alpha)$；

HFII_1型因子環　R　への　$\mathbb{Z}$　のouter な作用　（このとき、$\alpha_1 = \alpha$　を同一視する。）

定理1　$B_{\mathbb{Z}} = \{a \in R ; \| a x_n - x_n a \|_2 \longrightarrow 0$ when $\| \alpha(x_n) - x_n \|_2 \longrightarrow 0\}$　とすると、このとき　$B_{\mathbb{Z}} = \mathbb{C}1$。

このためには、U.Haagerup［5］と同様にして、次の補題が証明できる。（省略）

補題2、　$C_{\mathbb{Z}}(a, \delta) \cap \mathbb{C} \neq 0 \quad , \forall \delta > 0$ for all $a \in R$

$$\Updownarrow \text{同値}$$

$$B_{\mathbb{Z}} = \mathbb{C}.$$

但し、$C_{\mathbb{Z}}(a, \delta) = \overline{\mathrm{conv}}\{u a u^* ; u \in R, \| \alpha(u) - u \|_2 < \delta\}$。

証明、［4］あるいは［8］により、　$\forall \delta > 0, \exists v \in R$；

$\| v - 1 \|_2 < \delta / 2$、　$\mathrm{Ad}\, v\, \alpha \sim \beta$　(conjugate) 等しいとして証明をつずける、但しβはあるergodic なRの自己同型とする。　$\mathrm{Aut}(R) = \overline{\mathrm{Int}(R)}$　［4］により $\{u_n\}$ unitary in R；

$$\| \beta(x) - u_n x u_n \|_2 \longrightarrow 0 \quad , \| \beta(u_n) - u_n \|_2 \longrightarrow 0$$

を見つけ出す事ができる。すると

$$\| \alpha(u_n) - u_n \|_2 \leqq 2 \| v - 1 \|_2 + \| \beta(u_n) - u_n \|_2$$

により　十分に大きいnに対して、$\| \alpha(u_n) - u_n \|_2 < \delta$　となる。故に

$$C_{\mathbb{Z}}(a, \delta) \supset \{u_n a u_n^* \ ; \ n \ \text{十分大}\}$$

となる。$\lim_n \mathrm{Ad}\, u_n = \beta$かつ$\beta$はergodic により　$C_{\mathbb{Z}}(a, \delta)$　の0からの足は、β-invariantな元になり、これが0でないスカラー作用素となる。

補題3　$(R, \mathbb{Z}, \alpha)$，θは、上と同じ、

$$\theta^n = \mathrm{Ad}\,u\,\alpha^k$$

とすると$u \in \mathbb{C}1$　即ち、　$\theta^n = \alpha^k$。

証明　$\|\alpha(x_i) - x_i\|_2 \to 0$　となる有界数列$\{x_i\} \subset R$　に対して　$\|\theta^n(x_i) - x_i\|_2 \to 0$　となる。ゆえに

$$\|\mathrm{Ad}\,u(x_i) - x_i\|_2 \to 0$$

となり、$u \in B_{\mathbb{Z}}$　が、導ける。定理1より　$u \in \mathbb{C}1$.

補題4　α　と　θは、可換である、即ち　$\alpha\theta = \theta\alpha$。

証明　$\alpha = \lim \mathrm{Ad}\,u_n$　で　$\|\alpha(u_n) - u_n\|_2 \to 0$となる$\{u_n\}$が存在することにより　$\|\theta(u_n) - u_n\|_2 \to 0$　となる。ゆえに
$\alpha\theta = \lim \mathrm{Ad}\,u_n\,\theta = \lim \theta\,\mathrm{Ad}\,\theta(u_n) = \theta \lim \mathrm{Ad}\,u_n = \theta\alpha$。
（補題4　は　以後の証明に断わらずに多く用いる）

定理5　$(R, \mathbb{Z}, \alpha)$，θを上と同じ、するとある整数nがあって　$\alpha^n = \theta$　となる。

証明　証明は、5つの場合に分けて証明する
（1）の場合、$\theta^k = \alpha$と仮定する（$k>0$）（kが負のときも同様）
［8］の1－cohomology消滅定理より、　$k=1$でないとき

$$v \in R_\omega;\quad v^*\theta(v) = \lambda 1,\ \lambda^k = 1,\ \lambda \neq 1$$

（但しR_ωの意味は［7］を見よ、補題3より、この場合、θは$\mathbb{Z}$のouter な作用であることに注意）

$$\alpha(v) = \theta^k(v) = \lambda^k v = v$$

と、θの条件より　$\theta(v) = v$（矛盾）。ゆえに$k=1$でなくてはならない（kが負のときは$k=-1$である）。
（2）　$\theta^k = \alpha^l$、　$(k, l) = 1$、(prime) な場合、

$$\exists (m, n) \in \mathbb{Z}^2,\quad km + ln = 1。$$

$$\alpha^1 = \alpha^{km+ln} = (\alpha^k)^m\,\theta^{kn} = (\alpha^m\theta^n)^k,$$

$\alpha^m\theta^n$はθと同じ条件を満たすので（1）により$k=\pm1$でなくてはならない　ゆえ

に（1）を用いると $1 = \text{エ}1$ となり　$\theta \in \mathbb{Z}$ となる。

（3）$\theta^k = \alpha^k$ の場合

$(\theta\alpha^{-1})^k$ は自明な自己同型である。また、$\theta\alpha^{-1}$ は θ と同じ性質を持つので $\theta\alpha^{-1}$ を θ と思うと、$\theta^k = \iota$　（自明）と仮定してよい。ここで k が正で θ が outer（$0 < l < k$）とも仮定する。いま θ が自明でない自己同型と仮定すると

$$v \in R \ ; \ \theta(v) = \gamma v$$

但し、$\gamma^k = 1$、$\gamma \neq 1$。ここで

$$\theta(v^* \alpha(v)) = \theta(v^*)\alpha(\theta(v)) = v^* \alpha(v)$$

なので、$v^* \alpha(v) \in R^\theta$ となる。α の R^θ 上での1-cohomology消滅定理より（［8］をみよ）

$$u \in R^\theta \ ; \ v^* \alpha(v) = u^* \alpha(u).$$

故に $uv^* = \alpha(uv^*)$ となり条件より $uv^* = \theta(uv^*)$ これは $\theta(v) = v$ を意味する（矛盾）。ゆえに θ は自明な同型写像でなくてはいけない。$\theta\alpha^{-1}$ で考えると $\theta = \alpha$ あるいは $\theta = \alpha^{-1}$ でなくてはならない

（4）一般の場合、$\theta^{kl} = \alpha^{mk}$、$(m, l) = 1$ とする。

$(\theta^{-l}\alpha^m)^k = \iota$ となり（3）と同様の証明により、$\theta^{-l}\alpha^m = \iota$ となり（2）より $\theta = \alpha^{-m}$ あるいは $\theta = \alpha^m$ のどちらかである

（5）（4）の場合を否定すると、$\alpha \times \theta$ は

$$\alpha \times \theta \ : \ (n, m) \in \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \alpha^n \cdot \theta^m$$

補題（4）より R 上の outer な作用と仮定してもよい。［8］の定理により $R \otimes R$ 上の $\alpha \otimes \theta$ と R 上の $\alpha \times \theta$ とは cocycle conjugate である。簡単のために $\alpha \otimes \theta = \alpha \times \theta$ とすると

$$(R \otimes R)_\omega^{\alpha \otimes \theta} = R_\omega^{\alpha \times \theta}$$

θ の条件により $(R \otimes R)_\omega^{1 \otimes \theta} \supset R_\omega^\alpha$ であるので

$$(R \otimes R)_\omega^{1 \otimes \theta} \supset (R \otimes R)_\omega^{\alpha \otimes 2} \supset 1 \otimes R_\omega.$$

ゆえに $R_\omega^\theta \supset R_\omega$ となり［3］より θ は内部自己同型となり補題3より θ は自明な自己同型である。すなわち $\theta = \alpha_0$。

［注意1］Gがanemable離散群でないならば主定理は成立しない。

例、(R, G, α) Bernoulli shift とする

このとき $\|\alpha_g(x_n) - x_n\|_2 \to 0$　$(g \in G)$ ならば $\|x_n - \tau(x_n)\|_2 \to 0$ となる（［6］を見よ）故にすべての自己同型が条件を

満たすことになり定理は成立しない

［問題］ Gがamenable離散群のときは主定理は成立するか？。

References

[1]H.Araki,D.Kastler,M.Takesaki and R.Haag;Extension of KMS-states and chemical potentials, Comm. Math. Phys.,53(1977) 97-134.

[2] O. Bratteli, G.A. Elliott and D.W. Robinson, Strong topological transitivity and C^*-dynamical systems, J. Math. Soc. Japan 37(1985)115-133.

[3] A.Connes, Periodic automorphisms of the hyperfinite factor type ,Acta Sci. Math., 39(1977)39-66 .

[4]A. Connes, Outer conjugacy classes of automorphisms of factors,Ann. Sci.Ec. Norm.Sup.4me serie,t. 8(1975)383-420.

[5]U.Haagerup, Connes'bicentralizer problem and uniqueness of the injective factor of type,(preprint) .

[6]V.F.R.Jones, A converse to Ocneanu's theorem, J. Op. Theory 10(1983)61-63.

[7]D.McDuff, Central sequences and the hyperfinite factor, Proc. London Math . Soc., 21(1970)443-461.

[8]A.Ocneanu, Actions of discrete amenable groups on factors, Lect.Note in Math., no 1138,Springer-Verlag Heidelberg and New York,(1985).