数理解析研究所講究録
第 615 巻 1987 年 192-200

群の作用の Poisson 境界について

大分大教育　大内本夫　(Moto O'uchi)

§ 0. はじめに

群の Poisson 境界については自由群や SL（2, $\mathbb{R}$）について近年さかんに研究されており、　SL（n, $\mathbb{R}$）の離散部分群等の研究においてはその有効性がわかっている （[1]を参照）。 そこで、SL（n, $\mathbb{Z}$）の部分群の n次元トーラス $\mathbb{T}^n$上への作用を研究する時、この作用に付随する groupoid に対して Poisson 境界と類似のものを考えることは有効ではないかということは当然考えられることである。ここでは、そのようにして一般化した ポアソン境界が上の例においては自明なものになってしまうと思われることである。 このことはまだ証明できていないが、もしそうであるなら今後の課題として、上の例においては自明にならないように群の作用の Poisson 境界を定義するほうが良いとおもわれる。

§ 1. 群の Poisson 境界

この節では群の Poisson 境界について H.Furstenberg [1] と R.J.Zimmer [2] に基づいて説明する。

Gを第2可算公理を満たす位相群とする。 Gの境界Bとは要するにGの元の 積 $g_1 g_2 \cdots\cdots g_n$ が n→∞ の時になんらかの意味で収束した点ξの集合のことである。 Poisson 境界とはそのような境界の中で最大のものである。このような観点から群の Poisson 境界を定義してみる。 μ_o をG上の確率測度とし、$\Omega=\Pi_{n=1}^{\infty} G_n$, $P=\Pi_{n=1}^{\infty}\mu_n$ とおく、ただし、$G_n=G$, $\mu_n=\mu_o$ である。 $w_n:\Omega\to G_n$ を射影とした時、列 $\{w_n\}$ は a stationally sequence of independent random variables with distribution μ_o と呼ばれる。 G上の連続関数 f で 各 $g\in G$ に対して $f(gw_1\cdots w_n)$ が n→ ∞ の時にΩ上で確率1で収束するようなものの全体が作る可換 C^*環を $\mathcal{A}$ とする。$\mathcal{A}$

の 元fで 各gに対して、f $(g w_1 \cdots\cdots w_n) \to 0$ $(n \to \infty)$ が Ω 上で確率1で成り立つようなもの全体が作る $\mathcal{A}$ の閉イデアルを $\mathcal{L}$ とする。$\mathcal{H} = \mathcal{A}/\mathcal{L}$を商$C^*$環とする。$\mathcal{A}$ 上へのGの作用を $(g \cdot f)(g') = f(g'g)$ $f \in \mathcal{A}$, g, $g' \in G$ によって定義すると、$\mathcal{H}$上へのGの作用が得られる。 $f \in \mathcal{A}$ に対して$\mathcal{H}$上の state φ を

$$\varphi(\langle f \rangle) = \int_{\Omega} \lim_n f(w_1(\omega)\cdots w_n(\omega))\, dP(\omega)$$

によって定義する、 ここで$\langle f \rangle$は fを代表元とする$\mathcal{H}$の元を表す。この時、 compact Hausdorff G-space B′ と B′ 上の確率測度ν'が存在して、G-space として $\mathcal{H}$と $C(B')$ は同型であり、 $\varphi(h) = \int_{B'} h(\xi)\, d\nu'(\xi)$ $(h \in \mathcal{H})$ となる。ところで、G が compact でないなら一般に$\mathcal{H}$は可分とは限らないから、 B′ は第二可算公理を満たすとは限らない。 そこで、次のような議論が必要になる。 Gは第二可算公理を満たすから、 $L^\infty(B', \nu')$ は可分である。 したがって $L^\infty(B', \nu')$の可分な部分環 $\mathcal{H}_0$で 各 $L^p(B', \nu')$ $(p<\infty)$ で 密なものを取るもとができる。更に、G は可分であるから、$\mathcal{H}_0$は G-不変であるようにできる。$\ni 1$と仮定してよい。よって第二可算公理を満たすcompact Hausdorff G-space B が存在して、 G-space として $\mathcal{H}_0$と $C(B)$ が同型になる。自然な写像 $B' \to B$ のもとでの ν' の像をνとする。この時、$L^p(B, \nu) = L^p(B', \nu')$ となる。このようにして定義された G-space(B, ν) を (G, μ) の Poisson 境界と呼ぶ。ただし、 B は位相空間としては G-space であるが、一般に ν は G に関して quasi-invariant にはならないように思われる。 ([1]の定理 3.1(ii) において B の部分集合 A が null set であるということを $\nu(gA) = 0$ for $^\forall g \in G$ によって定義している。) G が離散であり、 supp μ_0が G を生成すると仮定するなら、νは quasi-invariant になる。我々が考えている例においては

μ_0はこの条件を満たすので、νは quasi-invariant であると仮定して差しつかえない。 $h\in L^\infty(G)$ が μ_0- 調和関数であるということを、すべての $g\in G$ に対して

$$h(g)=\int_G h(gg')\,d\mu_0(g')$$

が成り立つことであると定義する。 $f\in L^\infty(B)$ に対して $h\in L^\infty(G)$ を

$$h(g)=\int_B f(g\xi)\,d\nu(\xi)$$

によって定義すると、h は μ_0-調和関数になる。逆に μ -調和関数 h に対して、$f\in L^\infty(B)$が存在して $h(g) = \int_B f(g\xi)d\nu(\xi)$ $({}^\forall g\in G)$ が成立する。νがquasi-invariantの時、このようなhとfの対応は1対1対応になっている。以上の議論はFurstenberg [1] によっている。ただし、[1] においてはPoisson境界はすべての境界の中で最大のもので、すべての調和関数を上のように表現できるものとして定義されており、上のPoisson境界の構成法は存在を示すための証明の中から取った [1, 定理3.1]。

次にZimmer [2] によるPoisson境界の別の構成法を説明する。以下Gは離散で suppμ_0 がGを生成すると仮定する。この時νはquasi-invariantである。 [2] においてはGは一般の位相群でμ_0に関する制限もつけられていない。しかし、議論の中で一部不明瞭な部分があると思われるので、あえて上のような制限をつけた。

測度空間(Ω,P)を先に述べたようなものとし、$\Omega_0 = \prod_{n=1}^\infty G_n^0$ とおく、ここで G_n^0 はμ_0 の support である、i.e. $G_n^0=\{g\in G;\mu_0(\{g\})>0\}$。dgをG上のHaar測度で各点での測度が1となるようなものとし、PのΩ_0への制限もPと書くことにする。$G\times\Omega_0$ から $G\times\Omega_0$ への写像T_0 を

$$T_o(g,g_1,g_2,\cdots,g_n,\cdots)=(gg_1,g_2,\cdots,g_n,\cdots)$$

によって定義する。dg×P-null set E に対して、T_oE 、$T_o^{-1}E$ もまた dg×P-null set となる。（[2] においては T_o を G×Ω から G×Ω への写像として考えている。しかしその時は E⊂G×Ω が dg×P-null set であっても $T_o^{-1}E$ は null set とは限らない。このような不都合をなくすため Ω_o を考えた。また一般の位相群においてはたとえ μ_o の support を考えたとしても null set での議論がうまく行かないように思われる。このような困難を切り抜けるうまい方法があるかもしれないが、その点についてはまだ十分考察していない。なお、[2，§5] の記号 Ω、Ω_o と本稿での記号 Ω、Ω_o とは一致していないことを注意しておく。）G の $G\times\Omega_o$ 上への作用を $h(g,g_1,g_2,\cdots)=(hg,g_1,g_2,\cdots)$ により定義する。$\mathcal{B}(G\times\Omega_o)$ を $G\times\Omega_o$ の可測集合全体の作る集合を dg×P-null sets 全体の集合で割ることによって得られる σ-Boolean algebra とする。これは上の G の作用によって G-space となる。$\mathcal{B}_o$ を $\mathcal{B}(G\times\Omega_o)$ の T_o-invariant な元全体の作る σ-Boolean subalgebra とする。（ここで，E が dg×P-null set であるなら $T_o^{-1}E$ もまたdg×P-null set であるという事実を使うように思われる。しかし、T_oは $\mathcal{B}(G\times\Omega)$ での写像として well-defined であるので、$\mathcal{B}(G\times\Omega)$においては形式的に T_o^{-1} を考えることができ，T_o-不変な元というものもかんがえることができる。このように考えれば問題ないのかもしれないが、G×Ω の部分集合としての対応を考えれば多少気持ちがわるい。）T_o と G の作用は可換であるから、$\mathcal{B}_o$ も G-space となる。よって測度空間（$\mathcal{B}$,m) で $\mathcal{B}$ は G-space，m は G-quasi-invariant, $\mathcal{B}(B,m)\cong\mathcal{B}_o$となるものが存在する。更に、$T_o$- 不変、G-equivariant な写像 $p:G\times\Omega_o\to B$ で measure class を保存し、Boolean 同型 $p^*:\mathcal{B}(B,\nu)\cong\mathcal{B}_o$を誘導するものが存在する。（ここでもまた一般の位相群の場合には T_o- 不変な null set に関する議論が必要である。）写像 $i:\Omega_o\to G\times\Omega_o$ を $i(\omega)=(e,\omega)$ によって定義し、$\nu=(p\circ i)_*(P)$ とおく。この時 (B,ν) が Poisson 境界になる。

（一般の位相群の場合にはこのようにして作られた (B,ν) は境界にはなるが必らずしも Poisson 境界になるとは限らない。Poisson境界になるためには μ_0 に条件が必要である [2, 定理 5.1]。）

§ 2．群の作用の Poisson 境界：第一の試み

この節では前節で述べた Zimmer による構成法を群の作用に付随する groupoid に適用することを試みる。G を可算離散群、μ_0 を G 上の確率測度で $\mathrm{supp}\,\mu_0$ が G を生成するものとする。標準（standard）測度空間が自由な G-space であるとし、μ は G-不変確率測度とする。G の X への作用は右からの作用として書く、i.e. $(x,g)\in X\times G\mapsto xg\in X$。$\Gamma=X\times G$ を付随する groupoid とし、 range map, source map をそれぞれ $r(x,g)=x$, $s(x,g)=xg$ によって定義する。 この時 groupoid の積は $(x,g)(xg,h)=(x,gh)$ である。Borel 空間 Ω_0' を次のように定義する
;

$$\Omega_0'=\{(\gamma_1,\cdots,\gamma_n,\cdots):\ \gamma_n\in X\times G^\circ,\ s(\gamma_n)=r(\gamma_{n+1})\},$$

但し、$G^\circ=\mathrm{supp}\ \mu_0$ である。この時、$\Omega_0'=X\times\Omega_0$ と同一視できる。fibered product $\Gamma\rtimes\Omega_0'=X\times G\times\Omega_0$ に注意して、$\mathcal{B}_0$ を $\mathcal{B}(X\times G\times\Omega_0,\ \mu\times dg\times P)$ の T_0-不変な元全体の作る σ- Boolean algebra とすると、$\mathcal{B}_0\cong\mathcal{B}(X\times B,\ \mu\times m)$ である。G の単位元 e のかわりに Γ の unit space $\Gamma^{(0)}=X$ を考えることにより、前節と同様にして $X\times B$ 上の確率測度 $\mu\times\nu$ を得る。次に $X\times B$ 上の Γ の作用を考えてみる。$E=\Gamma\rtimes\Omega_0'$ とおき $\xi'=(\gamma,\gamma_1,\gamma_2,\cdots)\in E$ に対して $r(\xi')=r(\gamma)$ と定義する。$E_x=\{\xi'\in E;r(\xi')=x\}$ $(x\in X)$ とおいた時、$\gamma'\in\Gamma$, $\xi'\in E_{s(\gamma')}$ に対して、$\gamma'\xi'=(\gamma'\gamma,\gamma_1,\gamma_2,\cdots)$ と定義することにより、γ' は $E_{s(\gamma')}$ から $E_{r(\gamma')}$ への写像と考えることができる。このような Γ の E 上への作用は T_0' と可換であるから、次のような Γ の $X\times B$ 上への作用が得られる；$\gamma'=(xg^{-1},g)\in\Gamma$, $(x,\xi)\in X\times B$ に対して、$\gamma'(x,\xi)=(xg^{-1},g\xi)$。このことから G の $X\times B$ 上への作用として

$(x,\xi)g=(xg,g^{-1}\xi)$ となるものを考えることができる。以上の議論から、上のような作用を持った G-space $(X\times B,\mu\times\nu)$ を (X,μ) 上の G の作用と G 上の測度 μ_0 に付随する Poisson 境界と見なすことができると思われる。

今までの考えを更に正当化するために次のようなことをかんがえてみる。X を更に位相空間とし、G は X 上に同相写像として作用しているものと仮定する。f を X×B 上の G-不変関数とする, i.e. $f(xg,\xi)=f(x,g\xi)$。$\tilde{f}(x,g)=\int_B f(x,g\xi)d\nu(\xi)$ とおくと、ν は確率測度だから、$\tilde{f}$ は X×B 上の連続関数である。この時、$\tilde{f}(x,hg)=\tilde{f}(xh,g)$ で、各 $x\in X$ に対して $g\in G\to\tilde{f}(x,g)$ は μ_0-調和関数である。X 上の連続関数 h を $h(x)=\tilde{f}(x,e)$ により定義すると、上の事実から、

$$h(xw_1w_2\cdots w_n)=\tilde{f}(x,w_1w_2\cdots w_n)$$

は $n\to\infty$ の時 Ω 上で確率1で収束する。すなわち、h が G の作用に対する調和関数と考えられるわけである。しかしながら、G として $\begin{pmatrix}1&2n\\0&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0\\2n&1\end{pmatrix}$ によって生成される $SL(2,\mathbb{Z})$ の部分群、X として 2次元 トーラス $\mathbb{T}^2$ を取り G が X 上に線型自己同型として作用している場合を考える。G は2つの生成元を持つ自由群であるから、 その Poisson 境界 B として標準的なものを取ることにする（［1，§4．1］参照）。この時、G の X×B 上への作用はエルゴード的になり、上のような調和関数は自明なものしか存在しない。同様に $G=SL(n,\mathbb{Z}),X=\mathbb{T}^n$ としても G の X×B 上への作用はエルゴード的になると思われる（まだ厳密に証明していないので間違っているかもしれない）。したがって上のような
Poisson 境界の定義では我々の目的には不充分であることがわかる。

§3．群の作用の Poisson 境界：第2の試み

前節で述べたように群の作用がエルゴード的であることが問題とな

ることがわかった。つまり、群の作用で不変な関数が自明なものしか存在しないことが問題になるわけだから、そのかわりに Connes の非特異積分の概念を導入すればよいのではないかということはすぐに思いつく。そこで、ここではこのような方向での考察を行ってみる。なお、ここでの議論はまだ厳密な証明をしていない部分もあるので、特に null set の取り扱い等について不備がある可能性もあることを断わっておく。

記号は前節と同じものを使用する。$\widetilde{\Gamma} = X\times B\times G$ を G の $X\times B$ 上への作用に付随する groupoid, G 上の canonical な Haar measure dg に対応する$\widetilde{\Gamma}$の left regular 表現を (H,U) とする。$r((x,\xi),g)=(x,\xi)$, $s((x,\xi),g)=(xg,g^{-1}\xi)$, $((x,\xi),g)((xg^{-1},g^{-1}\xi),h)=((x,\xi),gh)$ である。

$$\mathcal{H} = \int_{X\times B} H_{(x,\xi)}\, d(\mu\times\nu)(x,\xi)$$

とおくと、$H_{(x,\xi)} = \ell^2(G)$ だから、 $\mathcal{H} \cong L^2(X\times B\times G)$ である。 $T = \int^{\oplus}_{X\times B} T_{(x,\xi)}\, d(\mu\times\nu)(x,\xi) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ を (H,U) の intertwining 作用素とする、i.e.

$$T_{(x,\xi)}U_{((x,\xi),g)} = U_{((x,\xi),g)}T_{(xg,\, g^{-1}\xi)} \quad {}^{\forall}(x,\xi)\in X\times B \quad .$$

$\hat{H}_x = \int^{\oplus}_B H_{(x,\xi)}d\nu(\xi) \cong L^2(B\times G)$ 上の作用素 $\hat{T}(x)$ を

$$\hat{T}(x) = \int^{\oplus}_B T_{(x,\xi)}\, d\nu(\xi)$$

によって定義する。$T = \int^{\oplus}_X \hat{T}(x)d\mu(x)$ である。$h\in G$ に対して $H_{(x,h\xi)}$ から $H_{(xh,\xi)}$ 上への等長作用素 $V_{(x,h)}$ を

$$(V_{(x,h)}\phi_{(xh,\xi)})(g) = \phi_{(x,h\xi)}(hg)$$

によって定義する。この時

$$V_{(x,h)}T_{(x,h\xi)}V_{(x,h)}^{*} = T_{(xh,\xi)}$$

である。（実際、$V_{(x,h)}\phi_{(xh,\xi)} = U_{((xh,\xi),h^{-1})}\phi_{(xh,\xi)}$ となっている。）$X\times B\times G$上への G の作用を $(x,\xi,g)h = (xh,h^{-1}\xi,h^{-1}g)$ によって定義し、$\mathcal{H}$ の G-不変な元全体が作る Hilbert 部分空間を $\mathcal{K}$ とする。$\mathcal{H}$ の元は（したがって $\mathcal{K}$ の元も）、場合によって $\int^{\oplus}_{X\times B} H_{(x,\xi)}d(\mu\times\nu)(x,\xi)$ の元と考えたり、$\int^{\oplus}_X \hat{H}_x d\mu(x)$ の元と考えたりする。$\phi\in\mathcal{K}$ なら $V_{(x,h)}\phi_{(x,h\xi)} = \phi_{(xh,\xi)}$ $({}^{\forall}h\in G)$ となる。ϕ、$\psi\in\mathcal{K}$ に対して次の式が成り立つ：

$$
\begin{aligned}
&(\hat{T}_{(x w_1 \cdots w_n)} \ \phi_{(x w_1 \cdots w_n, \xi)} \mid \psi_{(x w_1 \cdots w_n)}) \\
&= \int_B (T_{(x w_1 \cdots w_n, \xi)} \phi_{(x w_1 \cdots w_n, \xi)} \mid \psi_{(x w_1 \cdots w_n, \xi)}) d\nu(\xi) \\
&= \int_B (T_{(x, w_1 \cdots w_n \xi)} V^{*}_{(x, w_1 \cdots w_n)} \ \phi_{(x w_1 \cdots w_n, \xi)} \mid V^{*}_{(x, w_1 \cdots w_n)} \psi_{(x w_1 \cdots w_n, \xi)} \\
&) d\nu(\xi) \qquad = \int_B (T_{(x, w_1 \cdots w_n \xi)} \phi_{(x, w_1 \cdots w_n \xi)} \mid \psi_{(x, w_1 \cdots w_n \xi)}) d\nu(\xi)
\end{aligned}
$$

。

§１で述べた事実により最後の積分は殆どすべての x に対して、Ω 上で n→∞の時、確率１で収束する。すなわち、$\hat{T}(x w_1 \cdots w_n)$ はほとんどすべての X に対してΩ上で n→∞の時確率１で　において弱収束する。

(H,U) の intertwining 作用素全体が作る von Neumann 環は接合積 $W^*(X \times B, G)$ であり、$\mathcal{K}$ はその不変部分空間となっている。$W^*(X \times B, G)$ の $\mathcal{K}$ への制限によってできる von Neumann 環を $\mathcal{M}$ と書く。$\mathcal{M}$ の元 $\hat{T}$ でほとんどすべての X に対して弱位相のもとで $\hat{T}(x w_1 \cdots w_n) \to 0$ (n→∞)が Ω上で確率１で成り立つようなもの全体が作る μ の閉イデアルを $\mathcal{L}$ とする。§１の議論からの類推により、$P = \mu / \mathcal{L}$ を G の X上への作用に付随する非可換 Poisson 境界と呼べるのではないかと思われる。

以上の考えを正当化するために次のようなことを考えてみる。X=G，μを G上の確率測度で supp μ=G となるようなものとする（μは G-不変でないことに注意）。この時、$\mathcal{K} \cong L^2(B \times G)$ であり、$L^\infty(X \times B)$ の G-不変な元全体は $L^\infty(B)$ と同型である。 $L^\infty(X \times B)$ の G-不変な元全体は $W^*(X \times B, G)$ の中心と同一視できるから、 $L^\infty(B)$ の元は $\mathcal{P}$の中心の元ときなることができる（更に、$\mathcal{R}(G)$を G の群- von Neumann 環とすると、$\mathcal{P} \cong L^\infty(B) \times \mathcal{R}(G)$ が成立するのではないかと思われる。）

再び §２の最後に述べた例を考えてみると、ここでもまた同じ問題が生じてくる。すなわち、まだはっきりとは言えないが、$\mathcal{K}$　が trivial になってしまうのではないかということである。このことは $X = T^n$が compact、あるいは G の作用がI_1型であるということとも関係しているものと思われる。群の作用の Poisson境界はむしろⅢ型の作用の研究に対して有効性を発揮するかもしれない。

§4．おわりに

いままで見てきたように、群の作用に対して Poisson 境界を拡張するという試みはあまりうまくいっていない。我々の問題意識としては、SL(2, $\mathbb{Z}$) の部分群（特に自由群）の $\mathbb{T}^2$上への作用の Poisson 境界を計算してもとの作用の軌道同型の分類を行いたいということであるから、定義された Poisson 境界が自明なものでも困るし、あまり複雑なものでも役に立たないということになる。更に§２で述べた Poisson 境界はもとの作用の作用の軌道同型に対する不変量にはならないとおもわれるし、§３で述べた Poisson 境界も G-不変な元を考えたりするので軌道同型に対する不変量になるかどうかはまだはっきりしない。また群が同型でない場合には、Poisson 境界は群上の確率測度に依存しているから、軌道同型との関係はますますあいまいになってくる。以上のようなわけで、今のところ群の作用の軌道同型の分類に Poisson 境界の考え方を役立てることからはほど遠いと言わざるを得ない。

References

[1] H. Furstenberg, Random walks and discrete subgroups, in "Advances inProbability", vol.1,pp.1-63,Dekker,New York,1971.

[2] R.J. Zimmer, Amenable ergodic group actions and an application to Poisson boundaries of random walks, J. Functional Anal. 27(1978),350-372.