数理解析研究所講究録
第 615 巻 1987 年 201-210

Dirac induction of semisimple Lie groups

岡山大教養部　梶原 毅

本論説では connected semisimple Lie group の reduced group C*-algebra の K-theory を考える。これは、講求録 598 "球調和関数並びにそれによるδ超関数の展開" における河上氏との共著の論説 "表現論と K-理論" の補足である。 C*-algebra の K-theory は、 topological K-theory を C*-algebra に移したもので、多くの応用を持っている。ここでは、一般論については述べない。これについては、多くの解説または概説が存在する。いかなる理論においてもそうであるが example の計算は、重要な問題である。Locally compact group の reduced group C*-algebra はたしかに興味ある example を提供しており、これらの K-group を計算することが、当然やらなければならないことである。 Discrete group については、特に興味ある問題であるが、ここでは触れない。Connected Lie group に話を限定する。

1 .歴史

Connected Lie group の K-theory に関する有名な Connes-Kasparov conjecture に触れる前に connected Lie group の K-Theory の歴史について、少し振り返ってみたいと思う。 G を compact Lie group とする。これについては、表現論において古くから知られている Peter Weyl Theorem が C*-algebra のレベルにおいても成立し、

$$C^*(G) = \bigoplus_{\pi \in \hat{G}} M(\mathbb{C}, d(\pi))$$

であるから、compact Lie group の group C^*-algebra の K-group の計算は、matrix algebra の計算に帰着され、これから $K_0(C^*(G)) = R(G)$, $K_1(C^*(G)) = \{0\}$ である。ここで、R(G) とは、G の表現環である。これは、一つの極端な例であるといえよう。

次に G を simply connected solvable Lie group としよう。この種の群は 可解性の定義によって、R の semi-direct product によって、構成されている。従って、R による C^*-crossed product の K-theory が support されていればよい。A.Connes の Thom isomorphism [4] によって、$C^*_r(G)$ の K-group は、R の次元によって、もし even であれば、K_0 が Z で K_1 が 0 であり、odd であれば、この逆になる。Simply connected solvable Lie group の表現論の多様性に対して、この K-theory の単純性は興味深い。これが、もうひとつの極端な例である。

全く異なっているように見える、この二つの定理を統一するものは無いであろうか。Compact group の場合には、群構造を正確に反映しているのに対して、Solvable case では、dimension の parity にのみ依存している。

以上のどちらでもない case を考えるための一つの手掛かりとして、semisimple Lie group のなかで最も簡単であり、また基本的な例である、SL(2,R) をとって考えよう。Classical な Bargmann の表現論を用いると、SL(2,R) の reduced group C^*-algebra の構造を具体的に書き下すことができる。それは、ほぼ G の dual を用いた Fourier transform であるが、dual が Hausdorff でないので少し込み入っている。詳細については Lipsman [7] を参照された

い。

Reduced group C*-algebra は、表現によって、いくつかの part の direct sum に分かれる。Integrable な discrete series は dual の中で open point となる。Integrable でない discrete series は open にはならないが、reduced dual の中で考えると open になっている。このことから discrete series は compact operator algebra を生成するので K-group の generator を与える。

Limit of discrete series の二つの表現は odd principal series の closure に入っている。Even principal series は、topological には、1 次元の cone であるから K-theory 的には null homotopic である。すなわち、even principal series は、K-theory に全く寄与しない。Odd principal series について同様に考えると 1 次元の cone に one point がくっついているような image である。A.Valette [10] の方法で解析すると、この部分は K-theory 的に見れば compact operator algebra と同じように振舞うことが判る。すなわち limit of discrete series の二つの表現は、ひとつの K_0-group の generator を与える。K_1-group については、全て 0 になる。

以上のことから、K-group については、maximal compact subgroup の表現論が非常に密接に関係していることがわかる。今の場合は、単に torus の表現論にすぎないが。具体的に考えると maximal compact subgroup の character から holomorphic induction をおこなうことによって、discrete series は全て得られる。Holomorphic induction とは、要するに G-invariant first order elliptic differential equation の解空間に表現を実現すること

である。則ち、induction プラス elliptic operator である。Limit of discrete series と odd principal series の場合については、それほどはっきりとした対応は見付けられない。

SL(2,R) の holomorphic induction は、Blattner [3] によって考えだされ、Kostant によって一般的に定式化された。そのあと、Atiya-Schmidt [1], Parthasarathy [8] は、semisimple Lie group の discrete series の Dirac operator を用いた新たな構成法を与えた。Discrete series については以前 Harish-Chandra によって分類が行われているが、それは具体的な構成を伴ったものではなかった。この話題については、西山氏による論説に詳しい。この理論および Atiya-Singer の elliptic operator の index theory が semisimple Lie group の K-theory に強いインパクトを与えた。

2 .Dirac induction

G は connected Lie group とし、K は maximal compact subgroup とする。K の irreducible representation から $C^*_r(G)$ の K-group の element を具体的に構成することを考える。ただし K-group の element の与え方は Kasparov 流によっておこなう。

q は G/K (vector space) の dimension とする。$\underline{g}$,$\underline{k}$ は G,K の Lie algebra とする。$\underline{g} = \underline{k}+\underline{p}$ で $\underline{g}$ の Cartan decomposition とする。$\underline{g}$ の Killing form B は Cartan decomposition の定義から $\underline{p}$ 上に positive definite な scalar product を与える。このことから K から SO($\underline{p}$) への isotropy representation が定義される。

この表現が Spin($\underline{p}$) まで lift できるとき、G/K は G-invariant spin structure を持つという。このとき、G は acceptable であるという。ただし Spin($\underline{p}$) は SO($\underline{p}$) の double cover であるから G の適当な double cover をとればこの条件は常にみたされている。ここでは、簡単のため G は acceptable であるとする。

S で Spin($\underline{p}$) の spin module を表す。S は [q/2]-dimensional representation で、q が odd ならば irreducible で、even ならばふたつの component S^+ と S^- の direct sum に分解する。我々は、G/K が G-invariant spin structure を持つと仮定しているのだから S を K の表現とみなすことができる。このようにして作られた K の表現を χ と表す。さて、ρ で K の任意の finite dimensional representation を表す。$\rho\otimes\chi$ に associate する G/K 上の homogeneous vector bundle を考える。この bundle の compact support をもつ C^∞ section 全体 $(C_c(G),\rho\otimes\chi)^K$ は次の式で与えられている。

$(C_c(G),\chi\otimes\rho)^K = \{\xi : G\rightarrow \chi\otimes\rho,\ \xi$ is continuous with compact support and, for any $g\in G$, $k\in K$, $\xi(gk) = (\xi\otimes\rho)(k^{-1})\cdot\xi(g)\}$。

The Dirac operator D_ρ with coefficient ρ とは、上の section space の上に作用する G-invariant elliptic differential operator で次の式によって与えられる。$\underline{p}$ の ortho normal basis $(Y_i)_{1\leqq i\leqq q}$をひとつ固定する。

$$D_\rho = \sum_{i=1}^{q} \gamma_i\otimes c(Y_i)\otimes 1$$

ここで c(Y) は vector Y による Clifford multiplication を表す。この operator は elliptic で G-invariant かつ formally selfadjoint である。さらに q が even であれば bundle の grading と anticommute する。このときは、Kasparov [5] によって degree q (mod 2) の unbounded Kasparov element を与える。この $K_q(C^*_\gamma(G))$ の element のことを D_ρ の analytical index と呼び $\mathrm{Ind}_a(D_\rho)$ と表す。ρ から analytic index への map は R(K) から $K_q(C^*_\gamma(G))$ への group homomorphism に拡張することができる。この map を Δ とかいて Dirac induction とよぶ。

さてここに至っていよいよ Connes-Kasparov conjecture を述べることができる。

Conjecture: Dirac induction Δ は group isomorphism を与える。

この conjecture の意味を考えることは、少なくとも素人にとってはたいへん難しい。Kasparov により、proper G-manifold のどのような G-invariant first order elliptic differential operator をとっても K-group の element を与えることが解っている。この conjecture は proper G-manifold G/K の Dirac operator を考えれ、ばそれで K-group を generate してしまうということを意味している。また、深く考えれば analytic index の値は elliptic operator そのものではなく、underlying homogeneous vector bundle にのみ depend するものであるらしい。そうすると Dirac operator が用いられる意味とはなんであろうか。唯一つ私に判ることは、Dirac operator の square はいわゆる Laplacian だから、irreducible representation の space の上では、scalar になり

Parthsarathy の結果 [8] によって比較的容易に計算できることである。

この conjecture はまず R.Plymen によって考察された。かれは complex semi-simple Lie group について、reduced dual が Hausdorff になることから reduced group C*-algebra が flat な continuous field になることを示し K-group を具体的に計算した。彼の最初の preprint では Dirac induction についてはふれられていないが、彼は後に Penington との共著の論文 [9] を発表し、そこで complex group に対して Connes-Kasparov conjecture を完全に解決した。それはやはり Dirac operator の square を具体的に計算するものである。

また Kasparov は Connes とは独立に amenable Lie group に対して上の conjecture を証明している。また 彼は、Lorentz group 等の特別な real rank 1 semi-simple Lie group に対して、conjecture を abstract な方法によって示している。ただし Kasparov の論文は非常に読みにくいのが特徴であり、証明の内容などよく判らない。

次に、conjecture を出した Connes の弟子である A.Valette は [11], [12] において、real rank 1 の場合、及び、Cartan subalgebra の conjugacy class が unique な場合に対して検証を行った。前者の example は SO(n,1), SU(n,1) などである。Real rank 1 であれば表現論も比較的扱い易く、またすでに Lipsman [7] によって dual topology が完全に決定されている。q が even な場合 K_0-group の element を与えるのは discrete series 及び reducible principal series である。それに対して、q が odd の場合には

K_0-group は 0 になってしまう。これは Kasparov が最初に考えだしたことであるが、K-theory の研究は discrete series の存在及び principal series の reducibility と深い関係を関係を持っている。

後者の典型的な例は complex semisimple Lie group で、やはり dual が Hausdorff になり C*-algebra の構造ははなはだ簡単である。ただし・reduced dual の元は cuspidal parabolic subgroup からの induced representation として与えられる。一般には cuspidal parabolic subgroup の conjugacy class は unique ではない。Cartan subalgebra が unique で complex でない典型的な例は SL(3,R) である。

Valette の論文が書かれた直後、この conjecture は linear semisimple の場合まで A.Wasserman [13](入手不能), および Penington (ph.D) によって独立に証明され、linear という仮定は、その直後に誰かによってはずされた。彼等の証明は、semisimple Lie group の表現論の非常に深い結果、Plancherel formula, limits of discrete series, intertwining operator, theory of K-type, classification of tempered irreducible representation などをフルに用いるものではなはだ解析的であり、全く Kasparov の精神にもとるものである。

さて、以上でこの話は終わりである。しかし表現論を全く用いない geometric な証明が出現するまで、決して本当に終わったとはいえないであろう。そのような証明はもし可能であれば connected Lie group の K-theory に関する Connes-Kasparov conjecture を特別な例としてふくむ極めて一般的な、いわゆる Baum-Connes conjecture [2] の証明のあるべき姿を示唆するであろう。また、表現論の方に帰れば、 discrete series の存在に関する Harish-Chandra の定理、また principal series の reducibility に関する Knapp-Stein [6] の定理の、より判りやすい別証明を与えることになるであろう。

References

[1] M.Atiyah and W.Shmidt, A geometric construction of the discrete series for semisimple Lie groups, Inv.Math., 42(1977)1-62.

[2] P.Baum and A.Connes, Geometric K-theory for Lie groups and foliations, preprint.

[3] R.J.Blattner, On induced representation II : Infinitesimal induction, Amer.J.Math., 83(1961)499-512.

[4] A.Connes, An analogue of Thom isomorphism for crossed products of a C*-algebras by an action of R, Adv.Math., 39(1981)31-55.

[5] G.G.Kasparov, The operator K-functor and extensions of C*-algebras, Izv.Akad.Nauk.SSSR.Math., 44(1980)133-150.

[6] A.W.Knapp and E.M.Stein, Intertwinig operators for semisimple Lie groups, Ann.Math., 93(1971)489-578.

[7] R.L.Lipsman, The dual topology for the principal series and discrete series on semisimple groups, Trans.AMS

152(1970)399-417.

[8] K.R.Parthasarathy, Dirac operators and discrete series, Ann.Math., 96(1972)1-30.

[9] M.G.Penington and R.J.Plymen, The Dirac operator and the principal series for complex semi-simple Lie groups, J.Funct.Anal., 53(1983)269-286.

[10] A.Valette, Notes on the structure and the K-theory of the C*-algebras associated with SL(2,R), to appear in Bull.Soc.Math.Belgique.

[11] A.Valette, K-theory for the reduced C*-algebra of a semi simple Lie group with real rank 1 and finite center, to appear in Quarterly J.Math.

[12] A.Valette, Dirac induction for semi-simple Lie groups having one conjugacy class of Cartan subgroups, preprint

[13] A.Wasserman, A proof of Connes-Kasparov conjecture for linear reductive Lie groups, preprint.