数理解析研究所講究録
第616巻 1987年 4-20


# 2. A density theorem for closed geodesics in homology classes

名大理 勝田 篤 (Atsushi Katsuda)

## §1 序

compact負曲率多様体，あるいはより一般に、Anosov型の測地流をもつRiemann多様体Mに対し．$\pi(x)$ をM内の長さ$x$以下の素な閉測地線（他の閉測地線の何重巻かになっていない閉測地線のこと）の数とする。この時，Margulis，Parry-Pollicott らは．次のような“素数定理”の幾何学的類似が成立することを示した。

$$\pi(x) \sim e^{hx}/hx \quad \text{as } x \to \infty$$

ここで．$h$はMの測地流の位相的entropyである。更に．結果だけでなく証明方法も、ゼータ関数を調べるという点で．数論の方法の類似によっている。この延長として、算術級数に対するDirichletの密度定理の幾何学的類似を考えるのは

自然な方向の一つであろう。そこで次の問題を考える。
1次元 homology 類 $\alpha \in H_1(M, \mathbb{Z})$ に対し，$\pi(x, \alpha)$ で長さが $x$ 以下で，その homology 類が $\alpha$ であるような素な閉測地線の数を表わす。

**問題** $\pi(x, \alpha)$ の $x \to \infty$ での様子は何か？

この問題に対する知られている結果を述べる。

1. (Parry-Pollicott, Adachi-Sunada の結果の一部)
$\#(H_1(M, \mathbb{Z})) < +\infty \Rightarrow$

$$\pi(x, \alpha) \sim \#(H_1(M, \mathbb{Z}))^{-1} e^{hx}/hx \quad \text{as } x \to \infty$$

2. (Adachi-Sunada)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \log \pi(x, \alpha) = h$$

今回の結果は，2.の精密化を与える。

**定理1.** Mのみに依存する定数$c>0$が存在して、次をみたす。

$$\pi(x,\alpha) \sim c e^{hx} / e^{1+(b/2)} \quad \text{as } x \to \infty$$

ここで $b$は、Mの第1 Betti数である。

Phillips－Sarnakは、Mが、定負曲率$\equiv -1$をもつ時、次を示した。

**定理2.** Mのみに依存する定数$c_0>0$と、定数$c_i$, $(i \geqq 1)$（$=0$か$\neq 0$かは不明）が存在して次をみたす。

$$\pi(x.\alpha) \sim \left\{ e^{hx} / e^{1+(b/2)} \right\} \left( c_0 + c_1/x + c_2/x^2 + \cdots \right)$$

更に特別な場合、Mがgenus $g$, 定曲率$\equiv -1$のcompact Riemann面の時は、定数が求まる。

**定理3** $$\pi(x.\alpha) \sim (g-1)^g e^x / x^{1+g} \quad \text{as } x \to \infty$$

以上は、砂田利一氏との共同研究に基づくものである。

ここでは、主に compact Riemann 面の場合を述べる。

## §2 Dirichlet の密度定理

モデルになった Dirichlet の密度定理について復習する。乗法群 $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ の元 $\alpha$ に対し、$\pi_N(x.\alpha) = \#\{\mathfrak{p} : 素数 \mid \mathfrak{p} \leqq e^x\}$ とおく。この時、

<u>定理</u> $$\pi_N(x,\alpha) \sim \#|(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times|^{-1} e^x/x \quad \text{as } x \to \infty$$

この証明のため、$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ の1次元指標 $\chi$ に対し、L-関数 $L(s.\chi)$ を次のように定義する。

$$L(s.\chi) = \prod_{\mathfrak{p}} (1 - \chi([\mathfrak{p}])\, p^{-s})^{-1}$$

(ここで、$\mathfrak{p}$ は素数、$[\mathfrak{p}]$ は $\mathfrak{p}$ の $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ への射影である。) 次の性質 P-1〜4 が知られている。

P-1. $L(s.\chi)$ は $\mathrm{Re}\, s > 1$ で絶対収束し、正則。

P-2. $L(s.\chi)$ は $\mathrm{Re}\, s \geqq 1$ の近傍 $U$ に有理型に解析接続できる。

P-3. $\chi \neq \mathbb{1}$ (自明な指標) のとき、$L(s.\chi)$ は $U$ で正則。

P-4. $L(s, \mathbb{1}) = \zeta(s)$ (Riemann zeta 関数) は $U$ 上 $s=1$ のみで極をもち、そこで単純。

これより、次の Dirichlet 級数

$$F_\alpha(s) = -\sum_{\chi} \chi(-\alpha)\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}$$

$$= \Big(\sum_{\substack{\mathfrak{p},k \\ [\mathfrak{p}^k]=\alpha}} (\log \mathfrak{p})\, \mathfrak{p}^{-ks}\Big) \times \left(\#(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times}\right)$$

は $s=1$ でのみ単純な極を持ち、留数は1だから、Tauber型定理を適用して、上の定理は得られる。

幾何の場合も、$H_1(M,\mathbb{Z})$ の1次元指標 $\chi$ に対し、L-関数 $L(s,\chi)$ を

$$L(s,\chi) = \prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - \chi([\mathfrak{p}])\, e^{-sh\,l(\mathfrak{p})}\right)^{-1}$$

(ここで、$\mathfrak{p}$ は素な閉測地線、$[\mathfrak{p}]$ は $\mathfrak{p}$ の homology 類、$l(\mathfrak{p})$ は $\mathfrak{p}$ の長さを表わす。) で定義すれば、Selberg, Bowen, Ruelle Parry-Pollicott, Adachi-Sunada らにより、性質 P-1 〜 4 は示されているので、$\#(H_1(M,\mathbb{Z})) < +\infty$ の時は、同様にできる。$\#(H_1(M,\mathbb{Z})) = +\infty$ の場合は、$F_\alpha(s)$ の定義中に表われる $\chi$ に関する和が無限和となるので、このままではうまくい

かない。

## §3. Twisted Laplacian の固有値の変化。

$E_\chi$ を，指標 $\chi$ に付随する M上の flat line bundle，$\Delta_\chi$ をその上の Laplacian，$\Delta_\chi$ の固有値を $\{0 \leqq \lambda_0(\chi) \leqq \lambda_1(\chi) \leqq \cdots\}$ とする。$\lambda_0(\chi) = 0$ と $\chi = \mathbb{1}$ は同値であり，$\lambda_0(\mathbb{1}) \lneqq \lambda_1(\mathbb{1})$ である。$\lambda_0(\chi)$ の $\chi$ に関する変化を調べるために，指標群 $\hat{H}$ と harmonic 1-form の空間 $A(M)$ (= Albanese torus) を次のように同一視する。

$$A(M) \ni \omega \longrightarrow \chi_\omega = \exp\left(2\pi\sqrt{-1}\int_{C(\gamma)} \omega\right) \in \hat{H}$$

(ここで $C(\gamma)$ は $[C(\gamma)] = \gamma$ となる閉曲線を表わす。) この時，

<u>命題(3.1)</u> (1) $\left.\dfrac{d}{dt}\right|_{t=0} \lambda_0(\chi_{t\omega}) = 0$

(2) $\left.\mathrm{Hess}\right|_0 \lambda_0(\omega, \omega) = \dfrac{8\pi^2}{\mathrm{vol}(M)} \displaystyle\int_M \|\omega\|^2$

(ここで $\|\ \|$ は余接空間のノルム)

(証明) Mの普遍被覆 $\tilde{M}$ の1点，$\tilde{p}_0$ をとり，関数 $\tilde{s}_\omega$ を

$$\tilde{s}_\omega(\tilde{p}) = \exp\left(2\pi\sqrt{-1}\int_{\tilde{p}_0}^{\tilde{p}} \tilde{\omega}\right)$$

で定義する。(ここで $\tilde{\omega}$ は $\omega$ の lift)。すると $\tilde{S}_\omega(\gamma\tilde{p})=\chi_\omega(\gamma)\tilde{S}_\omega(\tilde{p})$, $\gamma\in\pi_1(M)$ が成り立つので、$\tilde{S}_\omega$ は $E_{\chi_\omega}$ の section $S_\omega$ の lift とみなせる。$E_{\chi_\omega}$ の section $f_\omega$ は $f_\omega = S_\omega f$ なる関係で $M$ 上の関数 $f$ と同一視できる。これにより固有方程式

$$\Delta_{\chi_\omega} = \lambda_k(\chi_\omega) f_{k,\omega}$$

は次の $f_k$ に関する方程式と同値になる。

$$\Delta f_k + 4\pi\sqrt{-1}\,(df_k,\omega) + 4\pi^2\|\omega\|^2 f_k = \lambda_k(\chi_\omega) f_k$$

$(\,,\,)$ は余接空間の内積である。両辺をM上積分すると $\omega$ が harmonic であることより、

$$4\pi^2\int_M \|\omega\|^2 = \lambda_k(\chi_\omega)\int_M f_k$$

が得られる。$k=0$, $\omega=t\omega$ を代入し、$f_0\equiv 1$ に注意すれば、(2)が導かれる。(1) は容易。

## §4. 定理3の証明 (I) ([1]の方法)

ここで述べる証明は§2の方法の延長上にある方法である。Compact Riemann 面の場合、§2で定義したL-関数 $L(s,\chi)$ は Selberg zeta 関数 $Z(s,\chi)$ と $L(s,\chi) = Z(s+1,\chi)/Z(s,\chi)$ なる関係で結びついており、性質 P-1〜4以上に次がいえる。

命題(4.1) $\dfrac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} + \sum \dfrac{1}{s-f_k(\chi)}$ は $\mathrm{Re}\, s > \frac{1}{2}$ で正則。

(ここで、$f_k(\chi) = (1+\sqrt{1-4\lambda_k(\chi)})/2$，和は $\lambda_k(\chi) < \frac{1}{4}$ なる $k$ についてとるものとする。)

$H_1(M,\mathbb{Z}) \ni \alpha$ に対し、$F_\alpha(s)$を次のように定義する。

$$F_\alpha(s) = -\int_{A(M)} \chi(-\alpha)\left(-\frac{d}{ds}\right)^g \frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}\, d\chi$$

(ここで $d\chi$ は normalized Haar 測度)

§2での $F_\alpha(s)$ の直接の類似としては $(-d/ds)^g$の部分がないものが考えられるが、これは、$F_\alpha(s)$の singularity の形を $1/(s-1)$ の typeにするためにつけたものである。指標の直交関係より、

$$F_\alpha(s) = \sum_{\substack{k=1 \\ k[\gamma]=\alpha}}^{\infty} \sum_{\gamma} k^g\, l(\gamma)^{g+1} e^{-sk\,l(\gamma)}$$

とかける。次の補題は我々の証明では本質的である。

$c = (g-1)^g / \mathrm{vol}(A(M))$，(但し、$\mathrm{vol}(A(M))$は harmonic 1-forms の $L^2$内積から導かれる体積) とおく。

補題(4.2) (1) $F_\alpha(s)$は $\mathrm{Re}\, s \geq 1$上 $s=1$ 以外で連続。

(2). 局所可積分関数 $h(t)$ が存在して，$\varepsilon>0$，$s=1+\varepsilon+it$ とおくとき．次が成り立つ。

$$\left| F_\alpha(s) - \frac{c}{s-1} \right| \le h(t).$$

（証明の方針） (1)は性質 P-3, 4 より得られる。
(2)を示す。 簡単のため．変数変換等にともなう定数はすべて．$c>0$ であらわす。（上の $c$ とはもちろん異なる。）
命題(3.1)より，Morse の補題を用いると．$A(M)\ni \mathbb{1}$ の近傍 $V'$ 上の局所座標 $\{x_i(w)\}_{i=1}^{2g}$ で

$$(1)\qquad \begin{aligned} & f_0(x_w) = f(x) = 1-|x|^2 \\ & x(\mathbb{1}) = 0 \end{aligned}$$

とかけるものが存在する。 この時．座標変換にともなう Jacobian は $c+O(|x|)$，$x_w(-\alpha)$ は $1+O(|x|)$ である。
$V' \supset V=\{|x|\le a\}$ とする。

$$F_\alpha(s) = -c\left(\int_V + \int_{A(M)-V}\right)$$

右辺第2項は．$L'(s,\chi)/L(s,\chi)$ が．$A(M)-V$ に属する $\chi$ については、$U\supset\{\mathrm{Re}\, s\ge 1\}$ 上正則なことより $\int_{A(M)-V}$ も $U$ 上正則。 以下において，$h_i(s)$ は $U$ 上正則な関数である。

命題(4.1)より.

$$-\int_V \chi(-\alpha)\left(-\frac{d}{ds}\right)^g \frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}\,d\chi$$

$$= -\int_V \chi(-\alpha)\left(-\frac{d}{ds}\right)^g \frac{-1}{s-s_0(\chi)}\,d\chi \quad + \quad h_1(s)$$

(1)より

$$= -\int_V (1+O(|\chi|))\left(-\frac{d}{ds}\right)^g \frac{-1}{s-1+|\chi|^2}\,d\chi \; + \; h_1(s)$$

極座標 $(r,\theta_1,\ldots\theta_{2g-1}) = (r,\Omega)$ に変換して

$$= -c\int_{S^{2g-1}} d\Omega \int_0^a \left(-\frac{d}{ds}\right)^g \left(1+O(|\chi|)\right) \frac{-r^{2g-1}}{s-1+r^2}$$

$$\times\left(1+O(|\chi|)\right)dr \; + \; h_1(s)$$

(2) $$= -c\int_0^a \left(-\frac{d}{ds}\right)^g \frac{-r^{2g-1}}{s-1+r^2}\,dr + \left(-\frac{d}{ds}\right)^g \int_0^a \frac{\phi(r,\Omega)}{s-1+r^2}\,dr$$

$+ h_1(s)$

(ここで $\phi$ は. $|\phi(r,\Omega)| \le c\, r^{2g}$ をみたす関数。)

(2)の第1項 $$= -c\int_0^a \left(-\frac{d}{ds}\right)^g \left((1-s)^{g-1}\frac{r}{s-1+r^2}\right)dr$$

$$-c\int_0^a \left(-\frac{d}{ds}\right)^g \sum_{i=0}^{g-2} (1-s)^i\, r^{2g-2i-3}\,dr$$

$$= -c\left(-\frac{d}{ds}\right)^{g}(1-s)^{g-1}\left(\log(s-1)-\log(s-1+a)\right)$$

$$+\ h_3(s)$$

$$= -\frac{c}{s-1} + h_4(s)$$

となるから、(2)の第2項が $\mathrm{Re}\, s=1$ 上で $t$ の関数として局所可積分であることを示せばよい。このことは、$\mu>0$ に対し、$\displaystyle\int_{-\mu}^{\mu}\int_0^{a}\frac{r^{2g}}{(t^2+r^4)^{(g-1)/2}}\,dr\,dt < +\infty$ より得られる。

上の補題にTauber型定理を適用する。

<u>Tauber型定理</u>　$\varphi(x)$ を $\varphi(0)=0$ をみたす、非負、単調非減少関数とし、$f(s)$ を

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx}\,d\varphi(x)$$

で定義する。$f(s)$ が次の性質をもつとする。

(1) $f(s)$ は $\mathrm{Re}\, s>1$ 上有限の値を持つ。

(2) 定数 $c>0$ が存在して、$\varepsilon>0$, $s=1+\varepsilon+\sqrt{-1}\,t$ に対し

$$j_\varepsilon(t) = f(s) - \frac{c}{s-1}$$

とおく時、$j(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} j_\varepsilon(t)$ がほとんど至る所存在し、また、局所可積分関数 $h(t)$ が存在して $|j_\varepsilon(t)| \leq h(t)$ をみたす。

この時、
$$\varphi(x) \sim c e^x$$
が成り立つ。

今、$\varphi(x) = \sum_{\substack{k=1 \\ k l(\gamma) \leq x \\ k[\gamma] = \alpha}}^{\infty} \sum_{\gamma} k^g \, l(\gamma)^{g+1}$ とおくと、$F_\alpha(s) =$

$\int_0^\infty e^{-sx} d\varphi(x)$ になるから $\varphi(x) \sim c e^x$ が得られる。

これより、定理3を導くことは、数論の場合同様、初等的に示せる。

以上の議論において、きちんと計算していくと、定理3の定数 $(g-1)^g$ は $(g-1)^g / \mathrm{Vol}(A(M))$ になる。一方、$\mathrm{Vol}(A(M)) = 1$ であることはよくしられている。

§5 定理3の証明(II)([3]の方法)

Selberg の跡公式を思い出す。

$$\sum_j \hat{h}(r_j(\chi)) = 2(g-1) \int_{-\infty}^{\infty} r \tanh(\pi r) \hat{h}(r) dr$$

$$+ \sum_{\gamma:\mathrm{prime}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi([\gamma])\, \ell(\gamma)}{\sinh(k\ell(\gamma)/2)}\, h(k\ell(\gamma))$$

(ここで $\hat{h}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{irs} h(s)\, ds$, $\lambda_k(\chi) = \frac{1}{4} + r_k^2(\chi)$ である。)

さて、$h(r)$を次のようなものにする。まず $k(s)$を、compact support, $\int_{-\infty}^{\infty} k(s)\, ds = 1$, $k(s) \geq 0$ の偶関数とし、$k_\varepsilon(s) = \frac{1}{\varepsilon} h(\frac{s}{\varepsilon})$, $h(s) = \chi_{[-T,T]} * k_\varepsilon(s)$ ($*$は convolution) とおくと、$\hat{h}(r) = (2 \sin Tr / r)\, \hat{k}_\varepsilon(r)$, $\hat{k}_\varepsilon(r)$ は急減少関数となる。

両辺に $\chi(-\alpha) = \exp(2\pi\sqrt{-1}\langle\theta,\alpha\rangle)$ をかけて $A(M)$上積分する。

$$\begin{aligned} &\sum_j \int_{A(M)} \hat{h}(r_j(\chi))\, e^{-2\pi\sqrt{-1}\langle\theta,\alpha\rangle}\, d\chi \\ &= 2(g-1)\, \delta_{\alpha,0} \int_{-\infty}^{\infty} r \tanh(\pi r)\, \hat{h}(r)\, dr \\ &\quad + \sum_{\substack{\gamma:\mathrm{prime} \\ k[\gamma]=\beta \\ \ell(\gamma)\leq T}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ell(\gamma)\, h(k\ell(\gamma))}{\sinh(k\ell(\gamma)/2)} \end{aligned} \tag{1}$$

**命題(5.1)** $(L) =$ (1)の右辺

$$(2) \qquad = \int_V \hat{h}(r_0(x))\, e^{-2\pi\sqrt{-1}\langle\theta,\alpha\rangle}\, dx$$

$$+\, O(T/\varepsilon^2 + e^{\nu T}) \qquad (\nu < \tfrac{1}{2})$$

（証明の方針）　$r_0(x)$ に対する積分 $\int_{A(M)-V}$ は $e^{\nu T}$ で評価できる。$j \neq 0$ なる $r_j(x)$ は有限個は虚数、それ以外は実数である。虚数の部分は、$\tilde{M}$ での $M$ の基本領域における Neumann 問題の固有値 $0=\mu_0<\mu_1\leqq\mu_2\cdots$ に対し、$\mu_j \le \lambda_j(x)$ がなりたつことより $e^{\nu T}$ で評価できる。実数の部分は、$\hat{k}_\varepsilon(r)$ が急減少であることを用いると $T^2/\varepsilon$ で評価できることがわかる。

さらに (2) の右辺の積分で $\hat{h}(r_0) = 2\sinh(-iTr_0)/(-ir_0)\times$ $\hat{k}_\varepsilon(r_0)$, $k_\varepsilon(r_0)$ $1+O(\varepsilon)$, $\sinh(-ir_0T)$ を $e^{-ir_0T/2}$ でおきかえると、

$$(3) \qquad (L) = 2e^{T/2}\int_V e^{(-ir_0(x)-\frac{1}{2})T}\, \frac{e^{-2\pi\sqrt{-1}\langle\theta,\alpha\rangle}}{-ir_0(x)}\, dx$$

$$+\, O(\varepsilon e^{T/2} + T/\varepsilon^2 + e^{\nu T})$$

次に (2) の右辺 = (R) を計算する。

**命題(5.2)**

(4)
$$(R) = \sum_{\substack{\gamma:\text{prime} \\ k[\gamma]=\alpha \\ \ell(\gamma)\le T}} \frac{\ell(\gamma)}{\sinh(\ell(\gamma)/2)} + O(T^2 + \varepsilon e^T)$$

(証明の方針) まず、Margulisらの幾何学的素数定理より

$$\sum_{\substack{\gamma:\text{prime} \\ T<\ell(\gamma)<T+\varepsilon}} 1 = O(\varepsilon e^T)$$

である。 $k>1$ での和の部分は $O(T^2)$, $k_\varepsilon$ での smoothing は $\varepsilon e^{T/2}$ で評価できる。

(3), (4) より.

(5)
$$P(s) := \sum_{\substack{\gamma:\text{prime} \\ k[\gamma]=\alpha \\ \ell(\gamma)\le T}} \frac{\ell(\gamma)}{\sinh(\ell(\gamma)/2)}$$

$$= e^{T/2} \int_V e^{(-\sqrt{-1}\, r_0(x) - \frac{1}{2})T} \cdot \frac{e^{-2\pi\sqrt{-1}\langle\theta,\alpha\rangle}}{-i\, r_0(x)}\, dx$$

$$+ O(e^{\nu_2 T}) \qquad (\nu_2 < \tfrac{1}{2})$$

(5)の右辺は、次の補題により計算できる。

<u>補題(5.3)</u>　$\rho(x)$ を $x=0$ の近傍 $V$ 上の $C^\infty$ 関数で、$\rho(0)=0$、$\rho(x)>0$ $(x\neq 0)$、$\partial^2\rho/\partial x_i\partial x_j=-b_{ij}$、$(b_{ij})$ は positive definite とし、$f(x)$ が $V$ 上 $C^\infty$ ならば

$$\int_V e^{T\rho_0(x)} f(x)\,dx \sim \frac{\pi^g}{T^g\sqrt{\det B}}\left(f(0)+\frac{C_1}{T}+\frac{C_2}{T^2}\cdots\right)$$

(証明の方針)　Morse の補題を $\rho_0(x)$ に適用し、そのときの座標に関し、$f(x)$ を Taylor 展開する。

以上から、定理2及び3は、$g(T)$

$$=\sum_{\substack{\gamma:\text{prime}\\ [\gamma]=\alpha\\ l(\gamma)\le T}} 1 = \int_0^T \frac{\sinh(s/2)}{s}\,d\rho(s)$$

を用いて、導かれる。

§6　定理1の証明について

今の所、一般の負曲率多様体に対しては、Selberg 型の跡公式が成立するかどうかは不明であるので、§5の方法は適用できない。(§5 の方法の方が、第1 Betti 数が奇数の時も同時に扱うことができ、簡明。)　そこで §4 の方法を用

いるのであるが、命題(4.1)や、$L(s,\chi)$ の singularity が、Laplacian の固有値であらわされるかはやはり不明。そこで $M$ の測地流 $(UM, \varphi_t)$ を、Bowen に従って、Symbolic dynamics(有向有限グラフによる"近似")を用いる。その時、Laplacian のかわりになるもの(Ruelle operator $L$)が存在する。$L$ の最大固有値 $\mu(\chi)$ が、$\lambda_0(\chi)$ のかわりの役目をはたす。一般に $L$ は自己共役かどうかは不明であるが、測地流 $\varphi_t$ の $\varphi_{-t}(-v) = -\varphi_t(v)$ なる関係を用いると $\mu$ が、実数で正であることはわかる。命題(3.1)同様、Hessian $\mu$ が、definite であることもわかる。以下は、第1 Betti 数が、偶数の場合は、§4 の方法がそのまま使えるのであるが、奇数の場合は、修正(例えば、Tauber型定理)を要する。詳しくは [2] を参照して下さい。

## References.

[1.] A. Katsuda and T. Sunada, Homology and closed geodesics in a compact Riemann surface, preprint.

[2] ——————————, in preparation.

[3] R. Phillips and P. Sarnak, Geodesics in homology classes

[4], T. Sunada. 数学, 38巻4号. 289–301 (他の文献はこれの文献表をみて下さい。)