数理解析研究所講究録
第616巻 1987年 65-70

9. On compact complex analytic 3-folds with nontrivial Albanese tori.

Kenji Ueno
京大理 上野健爾

§0　Mをコンパクト複素多様体，$\alpha : M \longrightarrow Alb(M)$をアルバネーズ写像とする。$M$の小平次元$\kappa(M)$が0のときのアルバネーズ写像の構造を調べることを，特に3次元の場合に行うことを目標とする。Mが3次元代数多様体または3次元Kähler多様体の時はUeno [U4] Viehweg [V]によって，Mの適当な双有理型モデル$\hat{M}$をとれば，アルバネーズ写像は$Alb(\hat{M}) = Alb(M)$上の小平次元0の多様体をファイバーとするエタール（もしくは解析的）ファイバー束であることが知られている。この事実がどれ位一般の場合も成立つかが問題である。実は30年位前にBlanchard [B], Atiyah [A]達によって，アルバネーズ写像がファイバー束にならない例が本質的に作られている。また Persson [P], Nishiguchi [N], Ueno [U2], Fujimoto [F]によって，Kähler性を仮定しないと，曲面の退化として種々の病的現象が生ず

ることが知られている。この小論の目的はこの2つの現象のみが Kähler 性を仮定しない一般の場合に新しくつけ加える現象であることを示すことにある。詳しくは近刊予定の論文〔U3〕を参照されたい。

§1　主定理をまず述べる。

主定理．　V は小平次元 $\kappa(V)$ が 0 の3次元コンパクト複素多様体とし，$\alpha: V \longrightarrow Alb(V)$ はアルバネーズ写像とする。以下 $A(V) = Alb(V)$ とおき，$\dim A(V) \geqq 1$ を仮定する。

a)　アルバネーズ写像が全射でなければ，$C = \alpha(V)$ は種数 $g \geqq 2$ の非特異代数曲線であり，$\alpha: V \to C$ のファイバーはすべて連結である。α の非特異ファイバーはすべて2次元複素トーラスまたは K3 曲面と双有理型同値であり，ほとんどすべてのファイバーは非代数的曲面である。この時 V は Kähler 多様体と双有理型同値でない。

b)　アルバネーズ写像が全射の時は以下の3通の場合がある．

1)　$\dim A(V) = 3$ であればアルバネーズ写像は双有理型同値写像を与える。

2)　$\dim A(V) = 2$ であれば　$\alpha: V \longrightarrow A(V)$ はモジュライが一定の3次元楕円ファイバー空間を与える。しかも α による特異ファイバーの像は有限個の点よりなる。

3) $\dim A(V)=1$ であれば，$\alpha : V \longrightarrow A(V)$ のすべてのファイバーは連結であり，α の一般ファイバー F は小平次元 $\kappa(F)=0$ の曲面である。もし F が 2 次元複素トーラスおよび K3 曲面と双有理型同値でなければ，α の一般ファイバーの双有理型モジュライは一定である。さらに V が Kähler 多様体と双有理型同値であれば，$\alpha : V \longrightarrow A(V)$ は $A(V)$ 上の F の極小モデル F_0 をファイバーとする解析的ファイバー束と双有理型同値である。

注意．上の定理のあらゆる場合が実際に生じることが分かっている。([U3], §6 Examples を参照のこと。)

§2 主定理の証明のあらすじ。

もしアルバネーズ写像が全射でなければ，アルバネーズ写像の基本定理 [U1, Theorem 10,9] によって，

$$\kappa(\alpha(V)) \geqq 1$$

が成立つ。従って Stein 分解

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & & \alpha(V) \\ & W \arrow[ur, "\gamma"'] & \end{tikzcd}$$

によって $\kappa(W) \geq \kappa(\alpha(V)) \geq 1$ が言える。

$\dim V = 3$ なので $\dim W = 2, 1$ である。

1) $\dim W = 2$ のとき。このとき $\beta : V \to W$ の一般ファイバーは種数gの曲線であり，$\kappa(V) = 0$ なので $g \geq 1$ である。この時次の定理が成立つ。

<u>定理</u>　$f : X^n \longrightarrow Y^{n-1}$ を n次コンパクト複素多様体 X から $n-1$次元コンパクト複素多様体 Y^{n-1} への全射正則写像とし，fの一般ファイバー F は種数 $g \geq 1$ の曲線とする。このとき

$$\kappa(X) \geq \kappa(X) + \kappa(F)$$

が成立つ。

この定理によって，我々の場合 $0 = \kappa(V) \geq \kappa(W) \geq 1$ となって矛盾する。

2) $\dim W = 1$ のとき。この時は曲線のヤコビ多様体の理論によって，$W = \alpha(V)$ であり，かつ Wは非特異であることが分かる。従って特に $\alpha : V \longrightarrow \alpha(V)$ のファイバーは連結である。

この時は次の定理が重要である。

<u>定理</u>　$f : V \longrightarrow C$ は3次元複素多様体Vから非特異代数曲線Cへの全射正則写像とし，fの一般ファイバーFは解析曲面とする。さらにFは2次元複素トーラスおよび

K3曲面と双有理型同値でないとする。このとき

$$\kappa(V) \geq \kappa(F) + \kappa(C)$$

が成立つ。

この定理を $\alpha : V \to \alpha(V)$ に適用する。α の一般ファイバー F は $\kappa(V)=0$ より $\kappa(F) \geq 0$ であるが、F が複素トーラスおよびK3曲面と双有理型同値でなければ

$$0 = \kappa(V) \geq \kappa(F) + \kappa(\alpha(V)) \geq \kappa(\alpha(V)) \geq 1$$

となって矛盾する。こうして主定理の a) の主要部分が証明された。

上の2つの定理および主定理の証明の細部は [U3] を参照されたい。

文献

[A] Atiyah, M. F : Some examples of complex manifolds. Bonner Math. Schriften 6. (1958)

[B] Blanchard, A : Sur les variétés analytiques complexes. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 73, 157 — 202 (1956)

[F] Fujimoto, :

[N] Nishiguchi, K : Degeneration of surfaces with trivial canonical bundles. Proc. Japan Acad. 59, 304-307 (1983)

[P] Persson, U. : Degenerations of algebraic surfaces. Memories of AMS., 189 (1977)

[U1] Ueno, K. : Classification theory of algebraic varieties and compact complex spaces. Lecture Notes in Math. 439, Springer (1975)

[U2] ———— : Degeneration of elliptic surfaces and certain non-Kähler manifolds. Progress in Math. 39, 545 – 566, Birkhäuser (1983).

[U3] ———— : On compact analytic threefolds with non-trivial Albanese tori. To appear in Math. Ann.

[U4] ———— : Classification of algebraic varieties, II. Proc. Intern. Symp. Algebraic geometry, Kyoto, 1977, ed. M. Nagata, 693 – 708, Kinokuniya, Tokyo (1978)

[V] Viehweg, E. : Klassifikationstheorie algebraischer Varietäten der Dimension Drei. Compositio Math. 41, 361 – 400 (1980)