数理解析研究所講究録
第617巻 1987年 1-17

多価semi-entire modular formについて

学習院大理　大田　浩（Hiroshi Ohta）

一般にmodular groupの有限指数をもつsubgroupにおけるmodular formに対して，それ自身を根にもつような，modular groupにおけるmodular formを係数とするような多項式を作ることができる。このとき，係数のmodular formは，weightに関してある種の条件を満たす。逆に，この条件を満たすようなmodular formを係数とする多項式を考えれば，この多項式から得られる（解析）函数はmodular formと類似した性質をもつ。

以下に述べる“多価semi-entire modular form”の話しは，上記のことにヒントを得て展開したものである。ここで一言断わっておけば，一般のmodular form，さらには保型形式において話しを進めなかったのは，単に私自身の怠慢さゆえからである。また，“many-valued modular form”という言葉は，Eichler，Zagier [2]，[3] において見られるが，その

定義などを記した文献を見つけることができなかったので，私自身が都合のよいように勝手に定義を与えてしまったが，すでに同じような，あるいは別の定義があるかもしれない。

記号　$\Gamma \underset{\text{put}}{=} SL(2,\mathbb{Z})$

$S\tau \overset{\text{def}}{=} (a\tau+b)/(c\tau+d)$, $S:\tau \overset{\text{def}}{=} c\tau+d$ $\left(S=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma\right)$

$\mathcal{H}$：上半平面　　$\mathcal{F}$：Γの基本領域

$\gamma : \tau_0 \rightarrow \tau_1 \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \gamma$は$\tau_0$と$\tau_1$を結ぶ連続曲線

$f \overset{\gamma}{\rightsquigarrow} g \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} f$と$g$は$\gamma$に沿って解析接続可能

$f \overset{\mathcal{H}}{\rightsquigarrow} g \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} f$と$g$は$\mathcal{H}$上解析接続可能

gが$\tau_0\,(\in\mathcal{H})$の近傍$(\subset\mathcal{H})$で定義された函数のとき，

$$(g|_m S)(\tau) \overset{\text{def}}{=} (S:\tau)^{-m} g(S\tau) \quad (m\in\mathbb{Z},\ S\in\Gamma)$$

によって，$S^{-1}\tau_0$の近傍で定義された函数$g|_m S$を定める。

また，$\mathcal{H}$上の解析函数とは，$\mathcal{H}$上可能な限り解析接続した最っとも極大な解析函数を意味する。さらに，この解析函数の分枝とは，適当な領域における正則函数で，その正則函数を$\mathcal{H}$上解析接続するともとの解析函数となるものを言う。

§1　多価 semi-entire modular form の定義

以後，$k \in \mathbb{Z}$，Γ_1は指数有限なΓの subgroup とする。

<u>定義</u>　$\mathcal{H}$上の多価函数g（真に多価でなくともよい）が次の条件(I)〜(III)を満たすとき，Γ_1に対する weight k の多価 semi-entire modular form であると呼ぶことにする。

(I)　gは$\mathcal{H}$上に分岐点以外の特異点をもたない，$\mathcal{H}$上の解析函数であり，$R \underset{\text{put}}{=} \{\tau : g\text{の分岐点}\}$とおくとき，

$$\#(\mathcal{F} \cap \Gamma R) < \infty$$

かつ，$R \ni {}^\forall \tau$はgの極でも真性特異点でもない。

(II)（gの保型性）　g_iをgの1つの分枝とするとき，

$$g_i|_k S \overset{\mathcal{H}}{\rightsquigarrow} g_i \quad (\text{for } {}^\forall S \in \Gamma_1).$$

(III)　$\mathbb{Q} \cup \{i\infty\} \ni {}^\forall t$　$(St = i\infty,\ S \in \Gamma)$に対して，$t$の十分小さい$\varepsilon(>0)$近傍　$\mathcal{U}_{\varepsilon,t} \overset{\text{def}}{=} \left\{ \tau \in \mathcal{H} \;\middle|\; \operatorname{Im} S\tau > \frac{1}{\varepsilon} \right\}$　でgの任意の分枝g_jは次のように表わされる。

$$(S:\tau)^k g_j(\tau) = C_t^* S\tau + \sum_{\nu \geq 0} C_\nu^{(t)} e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{K} S\tau \cdot \nu}$$

$$(C_t^*,\ C_\nu^{(t)} \in \mathbb{C},\ K(>0) \in \mathbb{Z})$$

特にgがm価のとき，gをm価 semi-entire modular form，(III)においてつねに$C_0^{(t)} = 0$となるとき，gを多価 semi-cusp form，また，${}^\exists C_t^* \neq 0$のとき，gは対数特異点をもつという。

さらに，$R \ni {}^\forall \tilde{\tau}$に対して

① $\tilde{\tau}$はgの対数分岐点でない

② gの$\tilde{\tau}$における任意の代数要素$g_{\tilde{\tau}}$に対して，

$$\mathrm{ord}_{\tilde{\tau}}(g_{\tilde{\tau}}) \geq 1$$

を満たすとき，gは多価entire modular formであるという。

gを有限多価semi-entire modular formとすれば，gは対数特異点をもたない（i.e. $^{\forall} C_{\tilde{\tau}}^{*} = 0$）。従って，

$$\begin{aligned} & g : \text{entire modular form} \\ \Leftrightarrow \ & g : 1\text{価semi-entire modular form} \end{aligned}$$

となるので，多価semi-entire modular formはentire modular formの定義の拡張となっている。

定義　$\mathbb{Z} \ni n\,(>0)$とする。

$$\begin{cases} F(X,\tau) = X^n + a_1(\tau)X^{n-1} + \cdots + a_n(\tau) \\ a_i\text{はweight } ki\text{ の}\underline{\Gamma\text{に対する}}\text{entire modular form} \end{cases}$$

なるXの多項式を，degree n，weight kのentire modular form多項式と呼ぶ。このとき，$F(g(\tau),\tau)=0$（for $^{\forall}\tau \in \mathcal{H}$）を満たす$\mathcal{H}$上の解析函数$g$が存在するが，特にこの$g$を（$F$から定義される）weight kの代数型entire modular formという。entire modular formのところをすべて，cusp-formにおきかえて，同様にcusp-form多項式，代数型cusp-formを定義

する。

$l(\geq 3) \in \mathbb{Z}$ とするとき，G_l で weight l の Γ の Eisenstein 級数 i.e. $G_l(\tau) \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{\mathbb{Z}^2 \ni (m_1, m_2) \neq (0,0)} (m_1\tau + m_2)^{-l}$ を表わす。$\{ G_4^i G_6^j \mid 4i+6j=l,\ i,j(\geq 0) \in \mathbb{Z} \}$ は，weight l の Γ の entire modular form 全体のなす $\mathbb{C}$-vector space の basis となる。また，G_4, G_6 は $\mathbb{C}$ 上代数的に独立である。このことより，

$F(X,\tau)$: weight k の entire modular form 多項式

$\iff$ $F(X,\tau) \in \mathbb{C}[G_4, G_6][X]$, monic かつ，$X, G_4, G_6$ に weight を $k, 4, 6$ の割り合でつけたとき同次式

が得られる。

また，g を $\tau_0 (\in \mathcal{H})$ の近傍 $(\subset \mathcal{H})$ での函数で，$F(g(\tau), \tau) = 0$ (for $\forall \tau \in \tau_0$ の近傍) を満たすとすれば容易に $F((g|_k S)(\tau), \tau) = 0$ (for $\forall \tau \in S^{-1}\tau_0$ の近傍 $(\subset \mathcal{H})$) を $\forall S \in \Gamma$ に対して満たすこともわかる。

$F(X,\tau)$ の X の多項式としての判別式を $D(F)(\tau)$ とする。$D(F)(\tau)$ は weight $kn(n-1)$ の Γ に対する entire modular form ($n = \deg_X F$, $k = \text{weight}\, F$) となる。

<u>定義</u>　g を(I)の条件を満たす函数とする。このとき，g の

1つの分枝g_0をとり

$$\Gamma_k(g) \overset{\text{def.}}{=} \{ S \in \Gamma \mid g_0|_k S \overset{\mathcal{H}}{\rightsquigarrow} g_0 \}$$

と定義する。$\Gamma_k(g)$はgの分枝g_0のとり方によらない，Γのsubgroupとなる。

(注)

$$\Gamma_k(g) = \left\{ S \in \Gamma \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathcal{H} \setminus \Gamma R \ni {}^\forall \tau_0,\ {}^\forall g_i : \tau_0 \text{における} g \text{の分枝} \\ \mathcal{H} \setminus \Gamma R \supset {}^\forall \gamma : S^{-1}\tau_0 \longrightarrow \tau_1 \quad (\tau_1 \in \mathcal{H}) \\ {}^\exists g_j : g \text{の分枝} \ s.t.\ g_i|_k S \overset{\gamma}{\rightsquigarrow} g_j \end{array} \right\}.$$

<u>定理1</u>　$k(\geq 0) \in \mathbb{Z}$とするとき，次の(i)，(ii)は同値である。

(i)　gはweight kのΓ_1の有限多価semi-entire modular form

(${}^\exists \Gamma_1$: subgroup of Γ)

(ii)　gはFから定まるweight kの代数型entire modular form

(${}^\exists F$: weight kのentire modular form多項式)

(証明の方針)

(i)⇒(ii)　gをm価とし，$\Gamma_0 \underset{\text{put}}{=} \Gamma_k(g) (\supset \Gamma_1)$，$l \underset{\text{put}}{=} (\Gamma : \Gamma_0)$，$\Gamma = \bigcup_{j=1}^{l} \Gamma_0 S_j$ ($S_j \in \Gamma$) とする。$\mathcal{H} \setminus \Gamma R \ni \tau_0$をとり，$S_j \tau_0$における$g$の$m$個の分枝を，$g_{1j}, \cdots, g_{mj}$とする。さらに，$f_{ij} \underset{\text{put}}{=} g_{ij}|_k S_j$　とする。このf_{ij}をつかい

$$F(X, \tau) \underset{\text{put}}{=} \prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq l}} (X - f_{ij}(\tau))$$

を作り，各係数を$\mathcal{H}$上に解析接続すれば，Fが求める多項式となる。特に

$$f_{ij} \equiv f_{i'j'} \Leftrightarrow (i, j) = (i', j')$$

に注意すれば，Fが$\mathbb{C}[G_4, G_6][X]$上既約であることを得る。

(iii)⇒(i)　F_0をFの$\mathbb{C}[G_4, G_6][X]$における既約因子でgを定義するものとすれば，$(\Gamma : \Gamma_k(g)) \mid \deg_X F_0$がわかり，$g$が$\Gamma_k(g)$のweight kの$\deg_X F_0 / (\Gamma : \Gamma_k(g))$価のsemi-entire modular formとなることが示される。//

定理1より容易に次のことが導びかれる。

<u>系2</u>　Fをweight kのentire modular form多項式で，任意の$\tau \in \mathcal{H}$に対して$D(F)(\tau) \neq 0$とする。このとき，$\mathcal{H}$上の連続函数gで$F(g(\tau), \tau) = 0$を満たすものをとれば（このようなものは必ず存在する），任意の$S \in \Gamma$に対して$g|_k S$は$S^{-1}\Gamma_k(g)S$のweight kのentire modular formとなり，特に次が成立する。

$$F : \text{irred. in } \mathbb{C}[G_4, G_6][X] \Leftrightarrow (\Gamma : \Gamma_k(g)) = \deg_X F$$

（注）　定理1，系2は，cusp-formについても成立する。

§2　多価semi-entire modular formの例

$\omega_1/\omega_2 \in \mathcal{H}$とするとき，$\wp(z, \binom{\omega_1}{\omega_2})$，$\sigma(z, \binom{\omega_1}{\omega_2})$によって

ω_1, ω_2 を周期とする Weierstrass の $\wp$-函数，σ-函数を表わすことにする。

i.e. $$\wp(z, \binom{\omega_1}{\omega_2}) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2 \ni \omega (\neq 0)} \left\{ \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right\}$$

$$\sigma(z, \binom{\omega_1}{\omega_2}) = z \prod_{\mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2 \ni \omega (\neq 0)} \left(1 - \frac{z}{\omega}\right) e^{\frac{z}{\omega} + \frac{z^2}{2\omega^2}} .$$

特に $\tau \in \mathcal{H}$ のとき

$$\wp(z,\tau) \underset{\text{put}}{=} \wp(z, \binom{\tau}{1}), \quad \sigma(z,\tau) \underset{\text{put}}{=} \sigma(z, \binom{\tau}{1}),$$

とする。

$N (\neq 0) \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\Lambda_N(z,\tau) \overset{\text{def}}{=} \sigma^2(Nz,\tau) / \sigma^{2N^2}(z,\tau)$$

$$\Phi_N(z,\tau) \overset{\text{def}}{=} \wp(Nz,\tau)\, \Lambda_N(z,\tau)$$

と定義する。このとき

$$\Lambda_N(z,\tau),\ \Phi_N(z,\tau) \in \mathbb{Z}[15G_4(\tau), 35G_6(\tau)][\wp(z,\tau)]$$

となる。従って

$$\exists\, \lambda_N(X,\tau),\ \exists\, \phi_N(X,\tau) \in \mathbb{Z}[15G_4(\tau), 35G_6(\tau)][X]$$

$$\text{s.t. } \lambda_N(\wp(z,\tau),\tau) = \Lambda_N(z,\tau),\ \phi_N(\wp(z,\tau),\tau) = \Phi_N(z,\tau) .$$

特に $\frac{1}{N^2}\lambda_N, \phi_N$ はそれぞれ degree N^2-1, N^2 の weight 2 の entire modular form 多項式となる (c.f. Cassels [1])。

$\mathcal{H} \ni \tau$ とするとき，$\lambda_N(X,\tau) = 0$ の根は

$$\left\{ \wp\left(\frac{a\tau+b}{N}, \tau\right) \;\middle|\; \mathbb{Z}^2 \ni (a,b) (\neq (0,0)) \bmod N \right\}$$

$\phi_N(X,\tau) = 0$ の根は，$\wp(\alpha\tau+\beta,\tau) = 0$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ とすれば

$$\left\{ \wp\left(\frac{(\alpha+a)\tau + (\beta+b)}{N}, \tau\right) \;\middle|\; \mathbb{Z}^2 \ni (a,b) \bmod N \right\}$$

となる。

以後，$N>1$ とする。

$\wp_{N,\binom{a}{b}}(\tau) \underset{\text{put}}{=} \wp\left(\frac{a\tau+b}{N}, \tau\right)$ $\left(\mathbb{Z}^2 \ni (a,b) (\neq (0,0)) \bmod N\right)$

とする。$\wp_{N,\binom{a}{b}}$ は $\frac{1}{N^2}\lambda_N$ から定義されるweight 2の1価代数型 entire modular formとなることが，$\wp_{N,\binom{a}{b}}$ のつくり方よりわかるので，weight 2のentire modular formとなる（cf. §1）。われわれは，この $\wp_{N,\binom{a}{b}}$ を N^{th} $\wp$-division valueと呼んでいる。この函数は，頂度 $\wp$-函数にその極の等分点を代入したものである。そこで，ϕ_N から定義されるweight 2の代数型 entire modular formが頂度 $\wp$-函数にその零点の等分点を代入して得られることから，N^{th} $\wp$-zero division value と呼び $\mathfrak{z}_N$ で表わすことにする（今のところ ϕ_N から定義される $\mathcal{H}$ 上の解析函数 i.e. 代数型 entire modular formが何個あるかわからないが，$\mathfrak{z}_N$ とかけば，そのうちの1つを意味するものとする）。

$\lambda_2(X,\tau) = 4X^3 - 60G_4(\tau)X - 140G_6(\tau)$ より，$\mathcal{H} \ni \tau_0$ とし，$\wp(\alpha\tau_0+\beta, \tau_0) = 0$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ とすれば

$$\tau_0 \in \Gamma\sqrt{-1} \Leftrightarrow 2\alpha, 2\beta \in \mathbb{Z}$$

がわかる。これより

$$\tau \in \Gamma\sqrt{-1} \Leftrightarrow D(\phi_N)(\tau) = 0 .$$

従って，$\{\tau : \mathfrak{z}_N \text{の分岐点}\} \subset \Gamma\sqrt{-1}$ となる。特に $\Gamma\sqrt{-1} \ni \tilde{\tau}$ にお

いて

$$\phi_N(X,\tilde{\tau}) = \begin{cases} X\prod_{i=1}^{[\frac{N^2}{2}]}(X-\alpha_i)^2 & (N: odd) \\ \prod_{i=1}^{[\frac{N^2}{2}]}(X-\alpha_i)^2 & (N: even) \end{cases}$$

$$(\alpha_i \neq 0,\ \alpha_i \neq \alpha_j\ (i \neq j))$$

となるので，$\wp_N$の$\tilde{\tau}$における分岐度は高々1である。$N=2$の場合を考える。$\tilde{\wp}_2$を$\wp_2$の$\tilde{\tau}$における代数要素（一般にϕ_Nの$\tilde{\tau}$における様子から，$\tilde{\tau}$の近傍において$\wp_N$は極要素をもたないことがわかる）とする。$\tilde{\wp}_2$はPuiseux級数によって

$$\tilde{\wp}_2(\tau) = c_0 + c_1(\tau-\tilde{\tau})^{d_1} + c_2(\tau-\tilde{\tau})^{d_2} + \cdots$$

$$\frac{1}{2}\mathbb{Z} \ni d_i\,(>0),\quad d_i<d_j\ (i<j),\quad c_0 \neq 0$$

と表わされる。$\tilde{\tau}$の近傍において，$\phi_2(\tilde{\wp}_2(\tau),\tau)=0$を満たすことに注意して，$\phi_2(X,\tau)=(X^2+15G_4(\tau))^2+280G_6(\tau)X$に代入することにより，$d_1=\frac{1}{2}$を得る。故に$\wp_2$は$T_{\mathcal{F}}$で分岐する。

$\mathcal{H}$上の解析函数uで，$\wp(u(\tau),\tau)=0$を満たすものが存在する。このようなuを1つ固定する。

次の命題は，Eichler, Zagier [2] の中に見られるが，その厳密な証明は記されていない。

命題3　(1)　$\{\tilde{\tau} : u\text{の分岐点}\} = T_{\mathcal{F}}$

(2) $\Gamma\sqrt{-1}\ni\tilde{\tau}$, u_0を$\tilde{\tau}$の近傍におけるuの分枝とし

$$\lim_{\tau\to\tilde{\tau}} u_0(\tau)=\frac{l_1}{2}\tilde{\tau}+\frac{l_2}{2}\quad(l_1,l_2\in\mathbb{R})$$

($u_0(\tau)$は連続函数として$\tilde{\tau}$まで延長できるので, $\lim_{\tau\to\tilde{\tau}} u_0(\tau)$を以後単に$u_0(\tilde{\tau})$で表わす)と表わしておく。このとき,

$\Gamma[2]\underset{\text{def}}{=}\left\{S\in\Gamma \mid S\equiv\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\bmod 2\right\}$とすれば

$$\Gamma[2]\sqrt{-1}\ni\tilde{\tau}\iff l_1,l_2:\text{odd}$$

$$\Gamma[2](\sqrt{-1}+1)\ni\tilde{\tau}\iff l_1:\text{odd},\ l_2:\text{even}$$

$$\Gamma[2]\frac{\sqrt{-1}+1}{2}\ni\tilde{\tau}\iff l_1:\text{even},\ l_2:\text{odd}$$

であり, 変数τが$\tilde{\tau}$を1まわりすると$u_0(\tau)$は$-u_0(\tau)+l_1\tau+l_2$にうつる。従って, $\tilde{\tau}$はuの分岐度1の代数特異点である。

(証明の方針)

(1) $\{\tilde{\tau}:u\text{の分岐点}\}\subset\Gamma\sqrt{-1}$は明らかである。そこで, u_0がある$\tilde{\tau}\in\Gamma\sqrt{-1}$で分岐しないとする。$\Phi_2(X,\tau)=0$の$\tilde{\tau}$の近傍における根は, $\wp\left(\frac{u_0(\tau)}{2},\tau\right)$, $\wp\left(\frac{u_0(\tau)+\tau}{2},\tau\right)$, $\wp\left(\frac{u_0(\tau)+1}{2},\tau\right)$, $\wp\left(\frac{u_0(\tau)+\tau+1}{2},\tau\right)$と表わされる。$u_0$が$\tilde{\tau}$で分岐しないことより, これらは$\tilde{\tau}$で分岐しない。これは$\xi_2$が$\tilde{\tau}$で分岐することに矛盾する。

(2) 前半は省略する。後半は, $\wp\left(\frac{u_0(\tau)+a\tau+b}{N},\tau\right)$ $(a,b\in\mathbb{Z})$がξ_Nの分枝となることと, 任意のodd $N(\geq 3)$に対して, 必ず$\Phi_N(X,\tilde{\tau})$が単根をもつこと, さらに(1)よりu_0が$\tilde{\tau}$で分岐することより導びく。//

0は$\wp$-函数の極であるから，$u(\tilde{\tau})\neq 0$ (for $\forall\tilde{\tau}\in\Gamma\sqrt{-1}$) である（このことは(2)からもわかる）。従って，uは$\Gamma\sqrt{-1}$で極要素をもたない。さて，u_0を$\mathcal{H}\setminus\Gamma\sqrt{-1}\ni\tau_0$における$u$の分枝とすれば，$S^{-1}\tau_0$ $(S\in\Gamma)$ の近傍において

$$\begin{aligned}0&=\wp(u_0(S\tau),S\tau)=\wp\left(u_0(S\tau),\frac{1}{S:\tau}S\binom{\tau}{1}\right)\\&=(S:\tau)^2\wp\left((S:\tau)u_0(S\tau),S\binom{\tau}{1}\right)\\&=(S:\tau)^2\wp\left((u_0|_{-1}S)(\tau),\tau\right)\end{aligned}$$

となるから，uは$\Gamma_{-1}(u)$のweight -1の多価semi-entire modular formとなるのではないかという期待がもたれる。以後このことを示す方針を述べる。

まず，$\Sigma\overset{\text{def}}{=}\{\tilde{u}:\mathcal{H}$上の解析函数$\mid\wp(\tilde{u}(\tau),\tau)=0\}$ が有限集合ならば，$(\Gamma:\Gamma_{-1}(u))\leq\#\Sigma$ となることを示す。実際$M\overset{\text{def}}{=}\#\Sigma$とし，$(\Gamma:\Gamma_{-1}(u))>M$とすれば

$$\exists S_1,\cdots,S_{M+1}\in\Gamma\ \text{ s.t. }\ \Gamma_{-1}(u)S_i\neq\Gamma_{-1}(u)S_j\ \ (i\neq j).$$

u_0を上記と同様に$\mathcal{H}\setminus\Gamma\sqrt{-1}\ni\tau_0$における$u$の分枝とする。上の$S_i$を用いて，$\gamma_i: S_i^{-1}\tau_0\rightsquigarrow\tau_0$ $(\subset\mathcal{H}\setminus\Gamma\sqrt{-1})$なる連続曲線を決め，$u_0|_{-1}S_i\overset{\gamma_i}{\rightsquigarrow}u_i$ とすると，函数関係不変の原理より，τ_0の近傍で$\wp(u_i(\tau),\tau)=0$を満たす。従って，仮定より

$$\exists i,j\ (i\neq j)\ \text{ s.t. }\ u_i\overset{\mathcal{H}}{\rightsquigarrow}u_j.$$

よって，$u_0|_{-1}S_i\overset{\mathcal{H}}{\rightsquigarrow}u_0|_{-1}S_j$。故に，$u_0|_{-1}S_iS_j^{-1}\overset{\mathcal{H}}{\rightsquigarrow}u_0$となり矛盾する。

<u>補題4</u>　$\wp(u(\tau),\tau)=0$ なる $\mathcal{H}$ 上の解析函数 u は無限多価．かつ，$\#\Xi=\#\{\tilde{u}:\mathcal{H}$ 上の解析函数 $|\ \wp(\tilde{u}(\tau),\tau)=0\}<\infty$．特に，$(\Gamma:\Gamma_{-1}(u))<\infty$ である。

（証明の方針）　u_0 を $\sqrt{-1}$ の近傍における u の分枝とし，これを $\sqrt{-1}+1$，$\frac{\sqrt{-1}+1}{2}$ の近傍まで解析接続したものを同じ記号 u_0 で表わす。命題3より

$$u_0(\sqrt{-1})=\frac{l_1}{2}\sqrt{-1}+\frac{l_2}{2}\qquad(l_1,l_2:\text{odd})$$
$$u_0(\sqrt{-1}+1)=\frac{m_1}{2}(\sqrt{-1}+1)+\frac{m_2}{2}\quad(m_1:\text{odd},\ m_2:\text{even})$$
$$u_0\left(\frac{\sqrt{-1}+1}{2}\right)=\frac{n_1}{2}\left(\frac{\sqrt{-1}+1}{2}\right)+\frac{n_2}{2}\quad(n_1:\text{even},\ n_2:\text{odd})$$

と表わされる。再び，命題3より変数 τ が，$\sqrt{-1}$，$\sqrt{-1}+1$ を1まわりすれば，$u_0(\tau)$ は $u_0(\tau)+(m_1-l_1)\tau+(m_2-l_2)$ にうつることがわかる。同様に，$\sqrt{-1}$，$\frac{\sqrt{-1}+1}{2}$ を1まわりすれば，$u_0(\tau)$ は $u_0(\tau)+(n_1-l_1)\tau+(n_2-l_2)$ にうつる。ここで，$m_2-l_2\neq 0$，$n_1-l_1\neq 0$ となることに注意すれば，$\sqrt{-1}$ の近傍における Ξ の元 $\tilde{u}$ の任意の分枝は，$\pm u_0(\tau)+m\tau+n$　$(m,n\in\mathbb{Z})$ で与えられることより，$\#\Xi<\infty$ となる。//

（注）　$|m_1-l_1|,|m_2-l_2|,|n_1-l_1|,|n_2-l_2|$ は u および u_0 のとり方によらず $\wp$ のみによって定まる数である。

<u>定理5</u>　$\wp(u(\tau),\tau)=0$ を満たす $\mathcal{H}$ 上の解析函数 u は，$\Gamma_{-1}(u)$ に対する weight -1 の無限多価 semi-entire modular form である。

(証明)　$(\Gamma:\Gamma_1(u))<\infty$ であり，定義の(I)，(II)についてはすでに示してある。(III)については，Eichler，Zagier [3] の Theorem 1.2，3.6，11.1 より，$\mathbb{Q}\cup\{i\infty\}\ni{}^\forall\gamma$ に対して，u の γ の近傍における任意の分枝 u_0 は

$$(S:\tau)^{-1}u_0(\tau)=C_\gamma^{*}S\tau+\sum_{\nu\geq 0}C_\nu^{(\gamma)}e^{2\pi\sqrt{-1}S\tau\cdot\nu}$$

$$\left(C_\gamma^{*}\in\mathbb{Z},\quad C_0^{(\gamma)}\in\pm\frac{\log(5+2\sqrt{6})}{2\pi\sqrt{-1}}+\frac{1}{2}+\mathbb{Z}\right)$$

と表わされることがわかるのでよい。//

u の分岐点は $\Gamma\sqrt{-1}$ であるから，$\mathrm{Im}\,\tau\geq 1$ で連続，$\mathrm{Im}\,\tau>1$ で正則となる u_1 で，$\wp(u_1(\tau),\tau)=0$ なるものが存在する。上の証明中の cusp での展開式より

$$\exists\, C\in\mathbb{Z}\quad s.t.\quad u_1(\tau+1)=u_1(\tau)+C\quad(\mathrm{Im}\,\tau\geq 1).$$

そこで，$u_1(\sqrt{-1})=\frac{l_1}{2}\sqrt{-1}+\frac{l_2}{2}$ とすれば

$$u_1(\sqrt{-1}+1)=\frac{l_1}{2}(\sqrt{-1}+1)+\frac{2C-l_1+l_2}{2}$$

となることがわかる。また，$T=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$，$U=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\in\Gamma$ とし $u_2(\tau)\underset{\text{put}}{=}(u_1|_{-1}T)(\tau)$ とすれば，u_2 は $\mathrm{Im}\,T\tau\geq 1$ で連続，$\mathrm{Im}\,T\tau>1$ で正則な函数で，$\wp(u_2(\tau),\tau)=0$ を満たす。

$$u_2(TU^{-1}T\tau)=\frac{1}{\tau+1}u_1(\tau)-\frac{C}{\tau+1}\tau$$

に注意すれば，$TU^{-1}T\sqrt{-1}=\frac{\sqrt{-1}+1}{2}$ より

$$u_2\left(\frac{\sqrt{-1}+1}{2}\right)=\frac{l_1+l_2-2C}{2}\,\frac{\sqrt{-1}+1}{2}-\frac{l_1}{2}.$$

一方，$u_2(\sqrt{-1})=\sqrt{-1}\,u_1(\sqrt{-1})=\frac{l_2}{2}\sqrt{-1}-\frac{l_1}{2}$。従って，補題4の証明

の方針と同様に考えれば，変数τが，$\sqrt{-1}$，$\sqrt{-1}+1$ を1まわりすれば，$u_1(\tau)$ は $u_1(\tau)+2c-l_1$ にうつり，$\sqrt{-1}$，$\frac{\sqrt{-1}+1}{2}$ を1まわりすれば，$u_2(\tau)$ は $u_2(\tau)-(2c-l_1)\tau$ にうつることを得る。

$\sqrt{-1}$　$\sqrt{-1}+1$　　$u_1(\tau) \to u_1(\tau)+2c-l_1$

$\sqrt{-1}$　$\frac{\sqrt{-1}+1}{2}$　　$u_2(\tau) \to u_2(\tau)-(2c-l_1)\tau$

従って，uの分岐の様子を調べる方法として，cとl_1の関係を調べる方法もある。先に注意したように，$|2c-l_1|$は$\wp$のみによって定まる定数である。以上より，次が得られる。

系6　Nが2以上の*even*，または$N>|2c-l_1|$なる*odd*のとき，任意のN^{th} $\wp$-*zero division value* ξ_Nは，真に有限多価な*semi-entire modular form*となる。

（証明の方針）　Nが*even*のとき，$\Phi_N(X,\sqrt{-1})$は重根のみをもつことより明らか。$N(\geq 3)$を*odd*とする。上記のu_1をつかえば，ξ_Nの$\sqrt{-1}$の近傍における任意の分枝は

$$\wp\left(\frac{1}{N}(u_1(\tau)+a\tau+b),\ \tau\right) \quad (a, b \in \mathbb{Z})$$

と表わされる。変数τが$\sqrt{-1}$を1まわりすれば，$u_1(\tau)$が
$-u_1(\tau)+l_1\tau+l_2$　にうつることより

$$(a, b) \not\equiv \left(\frac{l_1}{2}(N-1),\ \frac{l_2}{2}(N-1)\right) \bmod N$$

ならば，$\wp\left(\frac{1}{N}(u_1(\tau)+a\tau+b), \tau\right)$ は別のものにうつることが

わかる。そこで，$(a,b)\equiv\left(\frac{l_1}{2}(N-1),\ \frac{l_2}{2}(N-1)\right) \bmod N$ のとき分岐することを示せばよい。$N>|2c-l_1|$ とすれば，変数 τ が $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-1}+1$ を1まわりするとき，$u_1(\tau)$ は $u_1(\tau)+2c-l_1$ にうつることより，$\frac{1}{N}(u_1(\tau)+a\tau+b)$ は $\frac{1}{N}(u_1(\tau)+a\tau+b+2c-l_1)$ にうつる。このとき，$(a,b)\not\equiv(a,\ b+2c-l_1) \bmod N$ となるので題意は示された。//

<u>予想</u>　　$|2c-l_1|=1$

この予想が示されれば，次のことが得られる。

◦　u は <u>Γ に対する</u> weight -1 の無限多価 semi-entire modular form である。

◦　$N(\geq 2)$ なる任意の整数に対して，$\wp_N$ は <u>Γ に対する</u> weight 2 の <u>N^2価</u> semi-entire modular form である。

◦　$N(\geq 2)$ なる任意の整数に対して，多項式 $\Phi_N(X,\tau)$ は $\mathbb{Z}[15G_4(\tau),\ 35G_6(\tau)][X]$ 上既約である。

今のところ，多価な modular form が何の役にたつかは，考えていないのでわからないが，有限多価となる $\wp_N$ よりは，無限多価となる u の方が，得るものが多いように思われる。

参考文献

[1] J.W.S. Cassels, *A note on division values of* $\wp(u)$, Proc. Cambridge Philos. 45 (1949), 167-172

[2] M. Eichler, D. Zagier, *On the zeros of the Weierstrass* $\wp$*-function*. Math. Ann. 258 (1982), 399-407

[3] M. Eichler, D. Zagier, *The Theory of Jacobi Forms*, Progress in Math. 55. Birkhäuser (1985)

[4] H. Ohta, 多価 modular form について (zero-division value の定義), 1985年度学習院大学修士論文

[5] B. Schoeneberg, *Elliptic Modular Functions*, Springer (1974)