数理解析研究所講究録
第617巻 1987年 37-48

Hilbert modular Eisenstein 級数の pullbackの一性質とその応用

名古屋市立保育短期大学　丹羽伸二 (Shinji Niwa)

この報告書では、3次元上半空間のEisenstein級数のpullbackとautomorphic wave formの内積がそのformの特殊値とL-関数の積になることを示しその応用を述べる。

Garrett [6] が示すようにSiegel modular Eisenstein級数のpullbackは核関数として大変面白い性質を持ちKlingenのEisenstein級数のFourier係数の計算やmodular formのL-関数のtriple productの解析的な性質を調べることに利用されている。Hilbert modular Eisenstein級数のpullbackについてはZagier [8] やBump, Goldfeld [9] などの結果があるが非常に特殊なものである。

Yoshida [2], [3], [4] は2つのmodular formからSiegel modular formを構成すること及びそのformが0ではないことを論じているが、ここでは一応それとは別の場合についてSiegel modular (非解析的な) formを構成し

とのformが消えてしまわないための一つの必要条件を述べる。

§1. 最初に3次元上半空間のEisenstein級数のpullbackに関する定理及び証明のすじ道を述べる。講演では結論しか話さなかったが詳細は[10]を見ていただきたい。

上半平面をHと書き3次元上半空間$\{(z,v) \mid z\in\mathbb{C}, v>0\}$を$\mathbb{H}$と書くことにする。$g_1, g_2\in G=SL(2,\mathbb{R})$に対し

$$\tilde{\Theta}(z,g_1,g_2) = v\sum_{X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\tilde{L}} \chi(a)\, e^{2\pi i\left(-u\det X + i2^{-1}v\,\mathrm{tr}\,{}^t({}^tg_1Xg_2)({}^tg_1Xg_2)\right)} \tag{1}$$

とおく。ここで$\tilde{L}=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} \mid a,b,c,d\in\mathbb{Z}\right\}$, $z=u+iv\in H$であり、χはmodulo $p\equiv1\ (4)$のprimitive characterである。$\chi(-1)=1$と仮定すると$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\Gamma=\Gamma_0(p)$に対し

$$\begin{aligned}&\tilde{\Theta}(\gamma z,g_1,g_2)=\chi(d)\tilde{\Theta}(z,g_1,g_2),\\ &\tilde{\Theta}(z,\gamma g_1,g_2)=\tilde{\Theta}(z,g_1,\gamma g_2)=\chi(d)\tilde{\Theta}(z,g_1,g_2)\end{aligned} \tag{2}$$

を得る。$w=x+iy\in H$に対し$g_w=\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{y}&0\\0&1/\sqrt{y}\end{pmatrix}$とおき

$$\tilde{\theta}(z,w_1,w_2)=\tilde{\Theta}(z,g_{w_1},g_{w_2}) \tag{3}$$

とする。$\gamma=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\Gamma$に対し$\varphi(\gamma w)=\chi(d)\varphi(w)$となる$w$の関数$\varphi$の空間に作用するHecke作用素を$T_w^{\chi}(q)$と書く。即ち$\Gamma\begin{pmatrix}1&0\\0&q\end{pmatrix}\Gamma=\bigcup_i\Gamma\begin{pmatrix}1&0\\0&q\end{pmatrix}\gamma_i$, $\gamma_i=\begin{pmatrix}a_i&b_i\\c_i&d_i\end{pmatrix}$のとき

$$T_w^{\chi}(q)\varphi(w)=\sum_i\varphi\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&q\end{pmatrix}\gamma_i w\right)\bar{\chi}(d_i)$$

である。$T_z^{\chi}(q)^*$ を $T_z^{\chi}(q)$ の adjoint 作用素とすると

Prop. 1 すべての prime q に対し

$$T_z^{\chi}(q)^*\,\theta(z, w_1, w_2)$$
$$= T_{w_1}^{\chi}(q)\,\theta(z, w_1, w_2) = T_{w_2}^{\chi}(q)\,\theta(z, w_1, w_2)$$

を得る。

次の3つの条件をみたす H 上の関数 φ を character χ の automorphic wave form と呼ぶ。

1. $z = u + iv \in H$, $D_z = v^2\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)$ とするとき $D_z\varphi(z) = \lambda\varphi(z)$ $(\lambda \in \mathbb{C})$ が成立する。
2. $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ に対して $\varphi(\gamma z) = \chi(d)\varphi(z)$ となる。
3. u について一様に $\varphi(u+iv) = O(v^k)$, $(\exists k \in \mathbb{R})$ となる。

$\rho = (1+\sqrt{1+4\lambda})/2$, $\nu = \sqrt{1/4+\lambda}$ とおく。$u_0, u_1, \cdots$ を cusps の Γ-equivalence class の代表とし $\sigma_j \in SL(2, \mathbb{Z})$ を $\sigma_j\infty = u_j$ なるものとする。φ はこのとき

$$\varphi(\sigma_j z) = a^{(j)}v^{\rho} + b^{(j)}v^{1-\rho} + \sum_{n\neq 0} a_n^{(j)} v^{\frac{1}{2}} K_\nu(2\pi|n|v/N_j)\, e^{2\pi n i u/N_j}$$

という Fourier 展開をもつ。K_ν は変形ベッセル関数で N_j は適当な整数である。$u_0 = \infty$, $\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とし $a_n^{(0)} = a_n$ とおく。このときは $N_0 = 1$ であるが、すべての j について $a^{(j)} = b^{(j)} = 0$ のとき φ を cusp form と呼ぶことにする。簡単なため更に

$\varphi(-\bar{z})=\varphi(z)$ を仮定する。これは $a_n=a_{-n}$ ($\forall n$) を意味する。$a_1=a_{-1}=1$ と normalize する。$g(\chi)=\sum_{l \bmod p}\chi(l)e^{\frac{2\pi i l}{p}}$ のとき

(4) $F(w_1,w_2)=p^{-1}g(\bar{\chi})\int_{\Gamma\backslash H}\varphi(-1/pz)\tilde{\theta}(z,w_1,w_2)\frac{du\,dv}{v^2}$

($z=u+iv$) とおくと次の Proposition は F が D_{w_1}, D_{w_2} の固有関数であることを保証する。

Prop. 2

$$D_z\,\tilde{\theta}(z,w_1,w_2)=D_{w_1}\tilde{\theta}(z,w_1,w_2)=D_{w_2}\tilde{\theta}(z,w_1,w_2)$$

Prop. 1 と Prop. 2 によって適当な定数 c があって

(5) $$F(w_1,w_2)=c\,\varphi(w_1)\varphi(w_2)$$

となることがわかるがこの定数 c を正確に求める必要がある。そのために両辺の "Mellin 変換" を計算する。左辺の "Mellin 変換" を計算するのにはこれから述べる定理が必要となる。

(6) $\Theta_3(z,g)=\sqrt{v}\sum_{X=\begin{pmatrix}a&b\\b&d\end{pmatrix}\in L_3}\chi(a)e^{2\pi i(-\det X+i\,v\,\mathrm{tr}(({}^t g X g)^2))}$

とおく。ただし $L_3=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}\,\middle|\,a,b,c\in\mathbb{Z}\right\}$ である。

(7) $E_\theta(z,s)=\int_0^\infty\int_0^1\Theta_3\left(z,\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{y}&0\\0&1/\sqrt{y}\end{pmatrix}\right)dx\,y^{s-1}dy$,

$\lambda_1(a/c)=2^{-1}\sqrt{i/c}\sum_{h=1}^{2c}e^{\pi i h^2 a/c}$,

$\varphi_\chi(z,s)=v^{s/2}\sum_{\substack{(a,c)=1\\c>0}}\lambda_1(-a/c)\chi(c)(cz-a)^{-1/2}|cz-a|^{-s}$,

$\psi_\chi(z,s)=v^{s/2}\sum_{\substack{(a,c)=1\\c>0;\ \mathrm{odd}}}\lambda_1(-a/c)\chi(c)(cz-a)^{-1/2}|cz-a|^{-s}$

とおくと

定理 1

$$E_\Theta(z,s)=2^{s+1}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)(2\pi)^{-\frac{s+1}{2}}L(s,\chi)$$

$$\left(\left(1-\chi(2)2^{-s}\right)\psi_\chi(2z,s)+2^{-s}\chi(2)L(s,\chi)\varphi_\chi(2z,s)\right)$$

を得る。これにより定数 c が求まって

定理 2

ψ が character $\bar{\chi}$ の cusp form で Hecke 作用素の同時固有関数で最初の Fourier 係数が 1 であると

$$\int_{\Gamma\backslash H}\psi(z)\tilde{\Theta}(z,-1/p w_1,-1/p w_2)\,du\,v^{-2}dv$$
$$=2^3\sqrt{p}\,g(\bar{\chi})\psi(w_1)\psi(w_2)$$

が成り立つ。

を得る。

$\mathfrak{a}_i$ を虚 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ の ideal 類の代表とする $(i=1,\cdots,h)$。$\mathfrak{f}=(\sqrt{-p})$ とし $\mathfrak{O}$ を整数環とし、$n, l\in\mathbb{Z}$ に対し $\chi(n+\sqrt{-p}\,l)=\chi(n)$ とおいて χ を $\mathfrak{O}/\mathfrak{f}$ の上へ更に $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ の上に拡張する。

(8) $$E_{\mathfrak{a}_i}(w,s)=N\mathfrak{a}_i^{\,s}\sum_{n\in\mathfrak{a}_i,\ m\in\mathfrak{f}\mathfrak{a}_i}v^s\left(|mz+n|^2+|m|^2v^2\right)^{-s}\bar{\chi}(n)$$

とおく。($w=(z,v)\in\mathbb{H}$ である。) これは $\mathbb{H}$ 上の Eisenstein 級数である。$\mathfrak{a}_i=[1,z_i]$, $z_i=(pu_i+\sqrt{-p})/N\mathfrak{a}_i$, $u_i\in\mathbb{Z}$ と取れるがこのとき

定理3

$\psi(z)=\sum_{n\neq 0} a_{|n|}\, v^{1/2} K_\nu(2\pi|n|v)\, e^{2\pi i u}$ が character $\bar{\chi}$ の cusp form で Hecke 作用素の同時固有関数で $a_1=1$ のとき $L(s,\psi,1)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ と書くと

$$\int_{\Gamma_0(p)\backslash H} E_{\mathfrak{a}_i}((u,v),s)\,\psi(u+\sqrt{-1}v)\,v^{-2}\,du\,dv$$

$$=\pi^{1/2}\Gamma(s)^{-1}\Gamma\left(\frac{s-\frac{1}{2}-\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-\frac{1}{2}+\nu}{2}\right)2^{2}\,\psi\left(-\frac{1}{z_i}\right)p^{-(s-1)/2}L(s-1/2,\psi,1)$$

が成り立つ。

を得る。$E_{\mathfrak{a}_i}(w,s)$ は虚2次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ 係数の binary "indefinite" な2次形式のテータ関数の積分で表わせるが、$w=(z,v)\in\mathbb{H}$ を H の上に制限したものは $\mathbb{Q}$ 上の signature が $(+2,-2)$ の quaternary な2次形式のテータ関数と見なせ、定理2によって定理3の左辺は $\int_0^\infty \psi(-z_i^{-1})\,\psi(\sqrt{-1}y)\,y^{s-2}dy$ という形になり右辺になるのである。

定数 c を求めるためには $\int_0^\infty\int_0^1 F(w,w)\,dx\,y^{s-1}dy$ $(w=x+iy)$ を2通に計算する。(4)の式で $F(w,w)$ を見ると $\widehat{\Theta}(z,w,w)$ は $\theta(z)$ と(6)の $\Theta_3(z,gw)$ の積にほぼ等しい。$\int_0^\infty\int_0^1 F(w,w)\,dx\,y^{s-1}dy$ は(4),(7)によって $\int_{HH}\varphi(z)\theta(z)E_\theta(z,s)\,du\,v^{-2}dv$ のような形にな

り. 定理1により $E_\theta(z,s)$ が covering の Eisenstein 級数になり [1] によって $\int_{\Gamma\backslash H} \varphi(z)\theta(z)E_\theta(z,s)\,du\,dv$ が計算できる。$\int_0^\infty\int_0^1 c\varphi(w)\varphi(w)\,dx\,y^{s-1}dy$ は通常の Rankin convolution である。

§2. Siegel modular form の構成について述べる。

H_2 を Siegel 上半平面 (degree 2) とする。$(g_1,g_2)\in SL(2,\mathbb{R})\times SL(2,\mathbb{R})$ のとき、$E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $g_2=\begin{pmatrix}a_2&b_2\\c_2&d_2\end{pmatrix}$ とすると

$$\rho(g_1,g_2)=\left(\begin{array}{c|c}\begin{matrix}0&1\\-1&0\end{matrix}&\\\hline &\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c}g_1^{-1}&\\\hline &g_1^{-1}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c}a_2E&c_2E\\\hline b_2E&d_2E\end{array}\right)$$

は $\begin{pmatrix}&E\\E&\end{pmatrix}$ の直交群の元である。lattice M を

$$M=\left\{\begin{pmatrix}m_{11}&m_{12}\\m_{21}&m_{22}\\m_{31}&m_{32}\\m_{41}&m_{42}\end{pmatrix}\;\middle|\;\begin{matrix}m_{ij}\in\mathbb{Z}\quad (i,j=1,2,3,4),\ (i,j)\neq(1,2)\\ p\,m_{12}\in\mathbb{Z}\end{matrix}\right\},$$

で定義し、$Z=X+iY\in H_2$ に対し

$$(9)\quad \Theta_\chi(Z,(g_1,g_2))=|Y|\sum_{\begin{pmatrix}m_{11}&m_{12}\\\vdots&\vdots\\m_{41}&m_{42}\end{pmatrix}\in M}\chi(p\,m_{12})\,e^{\pi i p\,\mathrm{tr}\left(X\left(\begin{pmatrix}&E\\E&\end{pmatrix}[\rho(g_1,g_2)m]\right)\right)}\,e^{-\pi p\,\mathrm{tr}\left(Y\left(\begin{pmatrix}E&\\&E\end{pmatrix}[\rho(g_1,g_2)m]\right)\right)}$$

とおくと $\sigma=\left(\begin{array}{c|c}*&*\\\hline *&\begin{matrix}a&b\\c&d\end{matrix}\end{array}\right)\in\Gamma_2$ に対して

(10) $$\Theta_\chi(\sigma Z, (g_1, g_2)) = \chi(d)\,\Theta_\chi(Z, (g_1, g_2))$$
が成り立つ。ただし

$$\Gamma_2 = \left\{ \sigma = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} \sigma \in Sp(2, \mathbb{R}), \\ a_{21}, a_{31}, a_{32}, a_{41}, a_{42} \in p\mathbb{Z} \\ pa_{13} \in \mathbb{Z},\ \text{その他の } a_{ij} \in \mathbb{Z} \end{array} \right\}$$

である。§1 のように $g_{x+iy} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{y} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{y} \end{pmatrix}$ と書くと
H_2 の Laplacian

$$\Delta = \mathrm{tr}\left(Y\,{}^t\!\left(Y\frac{\partial}{\partial Y}\right)\frac{\partial}{\partial Y}\right) + \mathrm{tr}\left(Y\,{}^t\!\left(Y\frac{\partial}{\partial Y}\right)\frac{\partial}{\partial Y}\right)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial Y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y_{11}} & \frac{\partial}{2\partial y_{12}} \\ \frac{\partial}{2\partial y_{12}} & \frac{\partial}{\partial y_{22}} \end{pmatrix},\quad Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{12} & y_{22} \end{pmatrix} \right)$$

に対して

(11) $$\Delta\,\Theta_\chi(Z, (g_{z_1}, g_{z_2}))$$
$$= \frac{1}{2}\left(y_1^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\right) + y_2^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\right)\right)$$
$$\Theta_\chi(Z, (g_{z_1}, g_{z_2}))$$

$$(z_1 = x_1 + iy_1,\quad z_2 = x_2 + iy_2)$$

が成り立つ。この Θ_χ を用いて Siegel modular form を構成しよう。φ_1, φ_2 を automorphic wave form (character χ) で $D_z\varphi_1(z) = \lambda_1\varphi_1(z)$, $D_z\varphi_2(z) = \lambda_2\varphi_2(z)$ であり

更に cusp form であるとする。最初のFourier係数は1とし
$\varphi_1(-\bar{z})=\varphi_1(z)$, $\varphi_2(-\bar{z})=\varphi_2(z)$ とする。

(12) $F_{\varphi_1,\varphi_2}(z)$
$$=\iint_{\Gamma\backslash H\ \Gamma\backslash H} \Theta_\chi(z,(g_{z_1},g_{z_2}))\varphi_1(z_1)\varphi_2(z_2)$$

$$\frac{dx_1dy_1}{y_1^2}\ \frac{dx_2dy_2}{y_2} \qquad (z_i=x_i+\sqrt{-1}\,y_i)$$

とすると $\Delta F_{\varphi_1,\varphi_2}=\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2)F_{\varphi_1,\varphi_2}$ となる。
この F_{φ_1,φ_2} が0であるかどうか？ F_{φ_1,φ_2} のFourier係数はどうなるか？ ということが問題になる。ここではこの問題が完全にわかるわけではないがある程度様子を知ることが出来る。Andrianov に習って F_{φ_1,φ_2} の"Mellin変換"を考え、それが0でなければ F_{φ_1,φ_2} も勿論0でないので一つの必要条件が得られることになる。$\mathbb{H}$ を H_2 へ次のように埋め込む。
$w=(x+\sqrt{-p}\,y,\ v)\in\mathbb{H}$ に対し $Z_w=\begin{pmatrix}\frac{x}{p} & -y\\ -y & -x\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}p^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}v$
$\in H_2$ を対応させる。そして"Mellin変換"

(13) $$\int_0^\infty\int_0^1\int_0^1 F_{\varphi_1,\varphi_2}(Z_{(x+iy,v)})\,dx\,dy\,v^{s-2}\frac{dv}{v}$$

を計算する。定義(12),(9)を眺めると(9)のテータ関数は Z を $\mathbb{H}$ 上に制限すると虚2次体係数の"signature $(+2,-2)$"の quaternary な2次形式のテータ級数とみなせることから

(13)は重要でない定数を除いて

$$\Gamma(s)\sum_{\varepsilon} L_{\mathbb{Q}(\sqrt{-p})}(s,\bar{\varepsilon})^{-1}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{h}\varepsilon(\mathfrak{a}_i)\int_{\Gamma\backslash H}\varphi_1(u+\sqrt{-1}v)E_{\mathfrak{a}_i}((u,v),s)\frac{du\,dv}{v^2}\right)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{h}\varepsilon(\mathfrak{a}_i)\int_{\Gamma\backslash H}\varphi_2(u+\sqrt{-1}v)E_{\mathfrak{a}_i}((u,v),s)\frac{du\,dv}{v^2}\right)$$

となる。ただし $\mathfrak{a}_i=[1,z_i]$, $z_i=\dfrac{pu_i+\sqrt{-p}}{N\mathfrak{a}_i}$ であり, ε はすべてのideal類のcharacterを動く。定理3によって(13)は重要でない定数を除いて ($\nu_1=\sqrt{1/4+\lambda_1}$, $\nu_2=\sqrt{1/4+\lambda_2}$ とおくと)

$$\Gamma(s)^{-1}\Gamma\left(\frac{s-\frac{1}{2}-\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-\frac{1}{2}+\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-\frac{1}{2}-\nu_2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-\frac{1}{2}+\nu_2}{2}\right)$$

$$p^{-(s-1)}L(s-\tfrac{1}{2},\varphi_1,1)\,L(s-\tfrac{1}{2},\varphi_2,1)$$

$$\sum_{\varepsilon} L_{\mathbb{Q}(\sqrt{-p})}(s,\bar{\varepsilon})^{-1}\left(\sum_{i=1}^{h}\varepsilon(\mathfrak{a}_i)\varphi_1\left(-\frac{1}{z_i}\right)\right)\left(\sum_{i=1}^{h}\varepsilon(\mathfrak{a}_i)\varphi_2\left(-\frac{1}{z_i}\right)\right)$$

に等しい。これが0でなければ F_{φ_1,φ_2} は0ではない。一方[5]と比較して見ると F_{φ_1,φ_2} の"最初の"Fourier係数は

$$\sum_{i=1}^{h}\varphi_1\left(\frac{-1}{z_i}\right)\varphi_2\left(\frac{-1}{z_i}\right)$$

であると推測されるがまだ証明はしていない。

文献

[1] G. Shimura, On the holomorphy of certain Dirichlet series, Proc. London Math. Soc. 31 (1975) 79-98.
[2] H. Yoshida, Siegel's modular forms and the arithmetic of quadratic forms, Inv. Math. 60 (1980) 193-248.
[3] ——, On an explicit construction of Siegel modular forms of genus 2, Proc. of Japan Acad., 55 Ser A (1979)
[4] ——, On Siegel modular forms obtained from theta series, Crelle J.
[5] I. Matsuda, Dirichlet series corresponding to Siegel modular forms of degree 2, level N, Sci. Pap. Coll. Gen. Educ. Univ. Tokyo 28. (1978) 21-49
[6] P. B. Garrett, Pullbacks of Eisenstein series, in Automorphic forms in several variables (Proc. of a Taniguchi symp)
[7] ——, Decomposition of Eisenstein series: Triple product L-functions, Preprint.
[8] D. Zagier, The Rankin-Selberg method for automorphic functions which are not of rapid decay, J. Fac. Sci. Tokyo Univ. 28 (1981) 415-437
[9] D. Bump and D. Goldfeld, A Kronecker limit formula for cubic fields, in Modular forms (editted by R. A. Rankin)
″

[10] S. Niwa, The inner product of an automorphic wave form and the pullback of an Eisenstein series, to appear in Nagoya Math. J.

[11] S. Rallis and G. Schiffman, On a relation between $\widetilde{SL}_2$ cusp forms and cusp forms on tube domain associated to orthogonal groups, Trans. of Amer. Math. Soc. 263 (1981) 1–58